3. INEGALITES - EQUIVALENCES . 4h/s 6h/s

Supposé acquis . Une connaissance explicite des principales propriétés de l'addition, de la multiplication et de l'ordre dans $\mathbb{R}$ (voir notamment chapitre 1 et VM5) . Premier contact (VM3; chap 22) avec diverses moyennes .

Objectifs . Premier contact avec l'axiomatisation de la notion de corps ordonné et par là acquérir une vision plus synthétique de $\mathbb{R}$. Démonstration d'inégalités par une exploration inductive . Applications à diverses notions de moyennes .

CORPS ORDONNES .

Dans le chapitre 1, nous avons vu l'importance de la propriété de corps pour $\mathbb{R}$ et certains de ses sous-ensembles tels que $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ etc .

Rappelons ce que signifie cette propriété :

1) $\mathbb{R}, +$ est un groupe commutatif de neutre 0

2) $\mathbb{R}, \times$ est un groupe commutatif de neutre 1 (on écarte 0 car celui-ci n'a pas d'inverse multiplicatif)

$$0x = x0 = 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}$$

3) $a(b + c) = ab + ac$ pour tout $a,b,c \in \mathbb{R}$.

Notre travail avec les inégalités fait appel à d'autres propriétés . En fait, $\mathbb{R}$ et chacun de ses sous-corps sont des corps ordonnés . Ceci signifie qu'en dehors de 1) 2) 3) on a encore

4) $\mathbb{R}$ est structuré par une relation $\leqslant$ (ordre) telle que

$a \leqslant b$ ou $b \leqslant a$ quels que soient $a,b \in \mathbb{R}$

$a \leqslant b$ et $b \leqslant c \Longrightarrow a \leqslant c$

$a \leqslant b$ et $b \leqslant a \Longrightarrow a = b$

$a \leqslant a$ quel que soit $a \in \mathbb{R}$

5) $a \leqslant b \Longleftrightarrow a + c \leqslant b + c$ quels que soient $a,b,c \in \mathbb{R}$

6) $a \leqslant b$ et $c > 0 \Longrightarrow ac \leqslant bc$

N'avons-nous rencontré aucune autre propriété ? Si, par exemple $x^2 \geqslant 0$ pour tout x . Pourquoi ne pas l'avoir mentionné dans la liste ci-dessus ? Parce que cette propriété et d'autres, peuvent se démontrer à partir de 1) - 6) . Nous découvrons ainsi un exemple d'axiomatique ou choix de propriétés (axiomes) dont les autres propriétés souhaitées dans une théorie, peuvent se dériver par une démonstration . L'avantage de cette méthode, aujourd'hui généralisée en mathématique, est de s'appliquer à tous les corps ordonnés que nous pourrons encore découvrir à l'avenir . Il y en a !

Voyons comment 1) à 6) permettent d'établir d'autres propriétés . (théorèmes de la théorie des corps ordonnés)

7) $(-a)b = -(ab)$

En effet, $(a - a)b = 0b = 0$ par 2) et par 3) et 2)

$(a - a)b = b(a - a) = ba + b(-a) = 0$

Donc $b(-a) = -ba$ et par 2) $(-a)b = -ab$

8) $(-a)(-b) = ab$

Par 7) $(-a)(-b) = -(a(-b)) = -((-b)a) = -(-(ba)) = ba = ab$

9) $x^2 \geqslant 0$ pour tout x

Si $x > 0$, on a évidemment $x \geqslant 0$, donc $x \cdot x \geqslant 0x$ par 6)

donc $x^2 \geqslant 0$ par 2)

Si $x < 0$, $-x > 0$ par 5) et $(-x)(-x) \geqslant 0$ comme dans le cas précédent. Donc par 8), $x^2 \geqslant 0$.

Si $x = 0$, $x^2 = 0$ par 2) et $x^2 \geqslant 0$ par 4).

<u>EXERCICES</u> 1. Dans un corps ordonné K, démontrer les propriétés

a) $-(a + b) = (-a) + (-b)$

b) $(ab)^{-1} = a^{-1}\, b^{-1}$

c) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

d) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

e) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$

f) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$

g) K^+ est stable pour l'addition et pour la multiplication.

h) K_0^+ est un groupe pour la multiplication.

2. Démontrer que

a) $\dfrac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \geqslant 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

b) $(x + y)(y + z)(z + x) \geqslant 8xyz$ pour tout $x,y,z \in \mathbb{R}^+$

c) $(a + b)^4 \leqslant 8(a^4 + b^4)$ pour tout $a,b \in \mathbb{R}$

d) $(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) \geqslant 2^n$ si $a_i > 0$ pour tout i et $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$

e) $\sqrt{(a + c)(b + d)} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$ pour tout $a,b,c,d \geqslant 0$

f) $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$ pour tout $a,b,c \in \mathbb{R}$

g) $\dfrac{bc}{a} + \dfrac{ca}{b} + \dfrac{ab}{c} \geqslant a + b + c$ pour tout $a,b,c \in \mathbb{R}_0^+$

3. Quand a-t-on l'égalité dans les inégalités de l'exercice 2 ?

<u>CONSTRUIRE DES INEGALITES</u>.

En partant d'une inégalité banale nous allons voir qu'il est possible de construire progressivement d'autres inégalités qui n'ont rien d'évident au départ. Nous exposons donc une méthode de découverte sans attendre du lecteur qu'il possède celle-ci dès que l'exposé est terminé. Les inégalités encadrées pourraient faire utilement partie d'un formulaire qui rendra service dans des tâches ultérieures.

Supposons que x soit un nombre réel . Une inégalité importante est

$$\boxed{x^2 \geqslant 0} \qquad (1)$$

L'égalité a lieu uniquement pour $x = 0$. Pouvez-vous justifier (1) ?
Bien sûr : x^2 est le produit de $x \cdot x$ de deux nombres positifs ou de deux nombres négatifs .

On peut tirer d'autres inégalités de (1) .

Posons $x = a - b$ avec $a > 0$, $b > 0$.

Alors (1) devient $(a - b)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow \boxed{a^2 + b^2 \geqslant 2ab}$ (2)

De même, $a^2 + b^2 + 2ab \geqslant 4ab$ et $(a + b)^2 \geqslant 4ab$

Comme les deux membres de la dernière égalité sont positifs et que $\sqrt{y} \geqslant \sqrt{x}$ si et seulement si $y \geqslant x \geqslant 0$, on en tire

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\frac{a + b}{2} \geqslant \sqrt{ab}} \qquad (3)$$

Utilisons le fait que $x > y > 0 \Longrightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$, pour transformer (3) en

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} \geqslant \frac{2}{a + b}$$

Multiplions les deux membres par le nombre positif ab, ce qui donne

$$\frac{ab}{\sqrt{ab}} \geqslant \frac{2ab}{a + b} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\sqrt{ab} \geqslant \frac{2ab}{a + b}} \qquad (4)$$

De même, (2) livre en ajoutant $a^2 + b^2$ aux deux membres

$$2a^2 + 2b^2 \geqslant a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \quad \text{ou} \quad 2(a^2 + b^2) \geqslant (a + b)^2 \qquad (5)$$

En divisant les deux membres par 4 et en extrayant les racines carrées de ces nombres positifs, on obtient

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geqslant \frac{a + b}{2} \qquad (6)$$

Divisons les deux membres de (2) par ab et on obtient encore

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} \geqslant \frac{2ab}{ab} \quad \text{ou} \quad \frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{ab} \geqslant 2 \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2} \qquad (7)$$

ce qui livre encore $\boxed{y + \frac{1}{y} \geqslant 2}$ (8) pour tout réel $y > 0$.

Notons min(a,b) le plus petit des nombres a et b et max(a,b) le plus grand . Alors (4), (3), (6) livrent

$$\boxed{\min(a,b) \leqslant \frac{2ab}{a + b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a + b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \leqslant \max(a,b)} \qquad (9)$$

Seules la première et la dernière inégalités doivent être justifiées, ce que nous laissons comme exercice facile .

Les quatre fonctions de a et de b qui apparaissent dans (9) sont connues sous le nom de <u>moyennes</u> .

Dans $\frac{a + b}{2}$, nous reconnaissons la moyenne la plus familière . On l'appelle <u>moyenne arithmétique</u> .

Voici des noms pour les autres :

$\sqrt{ab}$ est la <u>moyenne géométrique</u>

$\frac{2ab}{a + b}$ est la <u>moyenne harmonique</u>

$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ est la <u>moyenne quadratique</u> .

D'où vient cette terminologie ? La moyenne arithmétique est la plus familière et n'exige pas d'autre explication . Dans VM3, chap.22 nous avons rencontré les exemples suivants :

1) <u>Moyenne géométrique</u> . Une somme de 105 000 F est placée durant 3 ans à un taux d'intérêt cumulatif de 6 % puis la nouvelle somme obtenue est placée 3 ans à un taux cumulatif de 8 % . Quel est le taux cumulatif moyen m (celui qui aurait livré le même résultat en 6 ans) ? Nous avons vu par un calcul simple que m est livré par

$1 + \frac{m}{100} = \sqrt{(1 + \frac{6}{100})(1 + \frac{8}{100})}$ c'est à dire par une moyenne géométrique et $\frac{m}{100} = 6,995$ %

2) <u>Moyenne harmonique</u> . Un automobiliste effectue 100 kilomètres à une vitesse moyenne de 90 km/h et ensuite 100 kilomètres à une vitesse moyenne de 120 km/h . Quelle est sa vitesse moyenne sur les 200 kilomètres accomplis ? Le calcul montre que c'est la moyenne harmonique de 90 et de 120 à savoir 102,85 .

Nous voyons donc bien qu'il y a plus d'une notion de moyenne . Une moyenne m(a,b) est une fonction à deux variables ou $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonction, symétrique en a,b c'est-à-dire telle que m(a,b) = m(b,a) et telle que

$$\min\{a,b\} \leq m(a,b) \leq \max\{a,b\}$$

Réfléchissons un moment . D'une inégalité banale comme (1) nous avons dérivé une comparaison inattendue de quatre notions de moyenne résumées dans (9) . Ces notions de moyenne se rencontrent dans des problèmes journaliers comme nous l'avons vu en troisième année . Comment sommes-nous parvenus de (1) à (9) ? Surtout par un effort d'imagination : remplacer x par a - b, extraire des racines carrées, rajouter ou multiplier, etc...

<u>EXERCICES</u> 4. Voici des fonctions de deux variables a et b . Quelles sont celles qui sont acceptables comme notion de moyenne ?

a) $m(a,b) = a + b + 2$ b) $m(a,b) = \sqrt{a(b + 1)}$

c) $m(a,b) = \sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}}$ d) $m(a,b) = \frac{a^2 + b^2}{2}$

e) $m(a,b) = \frac{1}{2}(\sqrt{ab} + \frac{a + b}{2})$ f) $m(a,b) = \sqrt{\frac{2\sqrt{ab}\,ab}{a + b}}$

5. <u>La moyenne arithmétique - géométrique</u>

Supposons $0 < a < b$. Alors $a < \sqrt{ab} < \frac{a + b}{2} < b$ par (9)

ou $a < MG(a,b) < MA(a,b) < b$ ou $a < a_1 < b_1 < b$
Partant de ces inégalités Gauss eut l'idée de répéter le processus en prenant les moyennes géométrique et arithmétique de MG(a,b) et MA(a,b) ce qui livre $a < a_1 < MG(a_1,b_1) = a_2 < MA(a_1,b_1) = b_2 < b_1 < b$
Il démontra que la répétition infinie de ce processus (limite) livre un nombre bien déterminé qu'on appelle depuis la moyenne arithmétique-géométrique MAG(a,b)

a) Elaborer un programme permettant le calcul d'encadrements successifs de MAG(a,b)

b) Application au cas $a = 5$, $b = 35$

6. Définir la moyenne géométrique, la moyenne quadratique et la moyenne harmonique de n nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Calculer ces moyennes sur divers exemples. Peut-on espérer une généralisation de (9) ? Laquelle ?

7. En relativité restreinte, la notion de vitesse moyenne conduit à l'introduction d'une <u>moyenne relativiste</u> de a et de b égale à

$$\frac{a+b}{1-\frac{ab}{c^2}} \quad (a,b \in \mathbb{R}^+)$$ où c est la constante qui représente la vitesse de la lumière dans le vide.

a) Faire des essais de comparaison de la moyenne relativiste avec les autres moyennes rencontrées.

b) Essayer de démontrer des relations telles que (9) pour comparer la moyenne relativiste à d'autres.

8. Dans une compétition de football, on départage souvent les équipes terminant à égalité de victoires et de défaites, par la différence de buts marqués et encaissés. Ceci conduit à de nouvelles égalités. Peut-on utiliser les diverses moyennes pour départager deux telles équipes ? Faites des essais. (sujet de recherche à domicile).

9. <u>Encore un problème de moyenne</u>.
Vous achetez \$ 1 à 50 FB et votre ami vend \$ 1 pour 40 FB. La valeur moyenne d'un dollar semble être de 45 FB. Si vous vendez 1 FB pour $1/40^e$ de dollar et votre ami achète 1 FB pour \$ 1/50, la valeur moyenne d'un franc semble être de $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{40}+\frac{1}{50}\right) = \frac{9}{400}$ dollars ou la valeur moyenne d'un dollar est de $\frac{400}{9} = 44{,}44\ldots$ francs. Ni la moyenne arithmétique, ni la moyenne harmonique ne sont donc satisfaisantes car chacune d'elles dépend de la manière dont on effectue l'opération de change. Il faut que la moyenne M(x,y) n'ait pas ce défaut. Pour cela il faut que

$$(1) \qquad A\left(\frac{1}{x}\,;\,\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{A(x,y)} \quad \text{quels que soient } x,y \in \mathbb{R}^+$$

En cas de dévaluation, nous souhaitons que le même coefficient affecte les sommes et la moyenne , donc nous voulons que

(2) $A(kx, ky) = kA(x,y)$ si $k > 0$

a) Démontrer que la moyenne géométrique de x et de y vérifie les propriétés (1) et (2) .

b) Démontrer qu'une fonction A vérifiant (1), (2) est forcément la moyenne géométrique .

EQUATIONS ET INEQUATIONS EQUIVALENTES

Considérons des $\mathbb{R}-\mathbb{R}$ fonctions f, g, h etc . Une équation peut se présenter ou se ramener à une des formes $f(x) = 0$ ou $g(x) = h(x)$.
Ainsi $x^3 - \frac{1}{x} = 3$ se ramène à $x^3 - \frac{1}{x} - 3 = 0$ avec $f(x) = x^3 - \frac{1}{x} - 3$
ou à $g(x) = h(x)$ avec $g(x) = x^3 - \frac{1}{x}$ et $h(x) = 3$

De même une inéquation peut se présenter ou se ramener à une des formes

$f(x) \geq 0$ ou $f(x) > 0$

$g(x) \geq h(x)$ ou $g(x) > h(x)$

La solution est l'ensemble Sol des nombres réels vérifiant la rélation (égalité ou inégalité) exigée .

Deux équations $f = g$ et $h = i$
sont équivalentes si toute solution de la première est encore solution de la deuxième et réciproquement .

Ceci s'écrit $f(x) = g(x) \Leftrightarrow h(x) = i(x)$

Exemple : $x^2 - 1 = \cos x + 3 \Leftrightarrow x^2 = \cos x + 4$

S'agit-il bien d'une équivalence ?

1) On observe que $f = g \Leftrightarrow h = i$
et $h = i \Leftrightarrow j = k$
entraîne bien que $f = g$ et $j = k$ ont la même solution ,
donc $f = g \Leftrightarrow j = k$

2) De même $f = g \Leftrightarrow h = i$
entraîne $h = i \Leftrightarrow f = g$
et enfin $f = g \Leftrightarrow f = g$

On reconnait donc bien les trois propriétés qui caractérisent une équivalence .

Toutes les résolutions d'équations et d'inéquations sont basées sur l'idée d'équivalence, en particulier sur les deux propriétés suivantes, dérivées de la structure de corps ordonné .

Premier principe d'équivalence .

Si f, g, h sont des $\mathbb{R}-\mathbb{R}$ fonctions, les équations

$f = g$ et $f - h = g - h$ sont équivalentes

De même $f \geq g \Leftrightarrow f - h \geq g - h$

$f < g \Leftrightarrow f - h < g - h$

Démonstration 1) $f(x) = g(x) \Longrightarrow f(x) - h(x) = g(x) - h(x)$ dans le groupe $\mathbb{R},+$. De même, $f(x) - h(x) = g(x) - h(x)$ implique $f(x) - h(x) + h(x) = g(x) - h(x) + h(x)$ donc $f(x) = g(x)$.

2) Le cas des inégalités se traite pareillement .

Deuxième principe d'équivalence .

Si f,g sont des $\mathbb{R}$- $\mathbb{R}$ fonctions et a un réel non nul

$$f = g \Leftrightarrow af = ag \Leftrightarrow \frac{1}{a} f = \frac{1}{a} g$$

si en outre, $a > 0$ on a

$$f \geqslant g \Leftrightarrow af \geqslant ag \Leftrightarrow \frac{1}{a} f \geqslant \frac{1}{a} g$$

$$f < g \Leftrightarrow af < ag \Leftrightarrow \frac{1}{a} f < \frac{1}{a} g$$

Démonstration 1) $f(x) < g(x)$ et $a > 0$ implique $af(x) < ag(x)$. De même $af(x) < ag(x)$ et $a > 0$ entraîne $a^{-1} > 0$, donc $a^{-1}(af(x)) < a^{-1}(ag(x))$ donc $f(x) < g(x)$

2) Les autres relations s'établissent pareillement .

EXERCICES 10. Résoudre dans $\mathbb{R}$

a) $0,379\,x - 1,4187 = 0$

b) $|x| < -2$

c) $mx - 4 = 2x + m$

d) $\frac{1}{t} - t = 0$

e) $\sqrt{u^2} = 16$

f) $3x^2 < 4$

g) $|x - 6| = 9$

h) $\sin x - 5 = 0$

i) $\sin x - \frac{1}{2} = 0$

j) $\sin x = \cos x$

11. Diophante est un mathématicien célèbre de l'Antiquité, à vrai dire le plus grand algébriste de l'Antiquité . Son épitaphe rédigée sous forme de problème .

" Diophante passa dans l'enfance le sixième de sa vie, puis le douzième dans l'adolescence . Un septième de sa vie s'écoula, puis il se maria et cinq ans plus tard, eut un fils . Hélas ! Après avoir vécu la moitié de la vie de son père, cet unique enfant périt d'une mort malheureuse . Diophante lui survécut quatre ans . A quel âge est-il mort ? "

12. Démontrer

a) Toute équation $f = g$ est équivalente à une équation $h = 0$

b) Toute inéquation $f > g$ est équivalente à une inéquation $h > 0$

c) $\text{Sol}\ (fg = 0) = \text{Sol}\ (f = 0) \cup \text{Sol}\ (g = 0)$

d) $\text{Sol}\ (fg > 0) = [\text{Sol}(f > 0) \cap \text{Sol}(g > 0)] \cup [\text{Sol}(f < 0) \cap \text{Sol}(g < 0)]$

13. Résoudre dans $\mathbb{R}$

a) $\dfrac{(3x - 5)(6x + 7)}{(6x - a)} > 0$

b) $\sqrt{x - 1} = 3$

c) $\dfrac{1}{1-2x} \leqslant 1$

d) $\dfrac{1 + 2\,\dfrac{x+1}{x-1}}{\dfrac{3(x+1)}{x-1} - \dfrac{2(x-1)}{x+1}} = 1$

e) $\dfrac{1}{1-2x} + \dfrac{8-x}{3-x} = 2x - \dfrac{4x^2}{2x-1}$

f) $(x-2)^2 \leqslant (1-2x)^2$

g) $(3x^2 + 2x - 9)^2 = (x^2 + 2x + 9)^2$

h) $(2x+3)(x^2 - 4x + 4) = (4x^2 - 9)(2x - 3)$

i) $a^2x - a = b^2x - b$

14. Résoudre dans $\mathbb{R}$

a) $\dfrac{x}{2(x+2)} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{x^2 + 3x + 2}$ (attention aux dénominateurs)

b) $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{7x+8}{x^2 + 2x + 4} = \dfrac{12}{x^3 - 8}$

15. Résoudre dans $\mathbb{R}$ (en fonction des valeurs des <u>paramètres</u> a,b,m)

a) $1 - \dfrac{x}{a-1} + \dfrac{x}{a+1} = \dfrac{1}{a^2 - 1}$

b) $\dfrac{a(x-a)}{b} - 4b = \dfrac{4(bx - a^2)}{a}$

c) $a(ax - 1) = 2ax - b + 1$

d) $x(m^2 + x + 1) = (x+1)^2 + m(m-2)$

e) $\dfrac{x+a}{x-b} - \dfrac{x-a}{x+b} = \dfrac{ab}{x^2 - b^2}$ (gare aux dénominateurs)

f) $\dfrac{a}{x-a} + \dfrac{b}{x-b} = \dfrac{a+b}{x-a-b}$

g) $\dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b} = \dfrac{2}{x}$

h) $\dfrac{x-b}{x-a} + \dfrac{(x+b)^2}{b(x+a)} = \dfrac{2x(a-b)}{x^2 - a^2}$

16. Résoudre dans $\mathbb{R}$

a) $(3x-4)(-5x+2) < 0$

b) $\dfrac{6x-8}{9-3x} \geqslant 0$

c) $x^2 - 4 > 0$

d) $x^2 \leqslant 9$

e) $\dfrac{3x-1}{x^2} \geqslant 2$

f) $\dfrac{x-m}{2} + \dfrac{2x+3}{4} \geqslant \dfrac{mx}{6}$

g) $mx > x + 2$

h) $2mx + 3 < x + 6m$

i) $2mx + 3 \leqslant x + 6m$

j) $\dfrac{2x-1}{m+1} - \dfrac{2x-5}{2(m+1)} > \dfrac{x+2}{3}$

k) $\dfrac{x+1}{3+m} - \dfrac{3x-1}{2} < 1$

RESUME

$\mathbb{R},+,\cdot,\leqslant$ est un corps ordonné

1) $\mathbb{R},+$ est un groupe commutatif (neutre 0)
2) $\mathbb{R}_0,\cdot$ est un groupe commutatif (neutre 1)
3) $a.(b + c) = a.b + a.c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$
4) $a \leqslant b$ ou $b \leqslant a \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$
   $a \leqslant b$ et $b \leqslant c \Longrightarrow a \leqslant c$
   $a \leqslant b$ et $b \leqslant a \Longrightarrow a = b$
   $a \leqslant a$
   $a \leqslant b \Longleftrightarrow a + c \leqslant b + c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$
   $a \leqslant b$ et $c > 0 \Longrightarrow ac \leqslant bc \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$

Quelques moyennes

$$\min\{a,b\} \leqslant \frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} \leqslant \max\{a,b\}$$

moyenne harmonique, moyenne géométrique, moyenne arithmétique, moyenne quadratique

Une moyenne des nombres a et b, $m(a,b)$ est une fonction telle que

$$m(a,b) = m(b,a)$$

et $\min\{a,b\} \leqslant m(a,b) \leqslant \max\{a,b\}$

Equations, inéquations équivalentes

Deux équations (inéquations) sont équivalentes si toute solution de la première est solution de la deuxième et réciproquement .

Principes d'équivalence des équations et inéquations

1. Si f, g, h sont des $\mathbb{R}$- $\mathbb{R}$ fonctions

$$f = g \Longleftrightarrow f - h = g - h$$
$$f \geqslant g \Longleftrightarrow f - h \geqslant g - h$$
$$f < g \Longleftrightarrow f - h < g - h$$

2. Si f, g sont des $\mathbb{R}$- $\mathbb{R}$ fonctions et si $a \in \mathbb{R}_0$

$$f = g \Longleftrightarrow a.f = a.g \Longleftrightarrow \frac{1}{a}.f = \frac{1}{a}.g$$

Si de plus $a > 0$

$$f \geqslant g \Longleftrightarrow a.f \geqslant a.g \Longleftrightarrow \frac{1}{a}.f \geqslant \frac{1}{a}.g$$

$$f < g \Longleftrightarrow a.f < a.g \Longleftrightarrow \frac{1}{a}.f < \frac{1}{a}.g$$