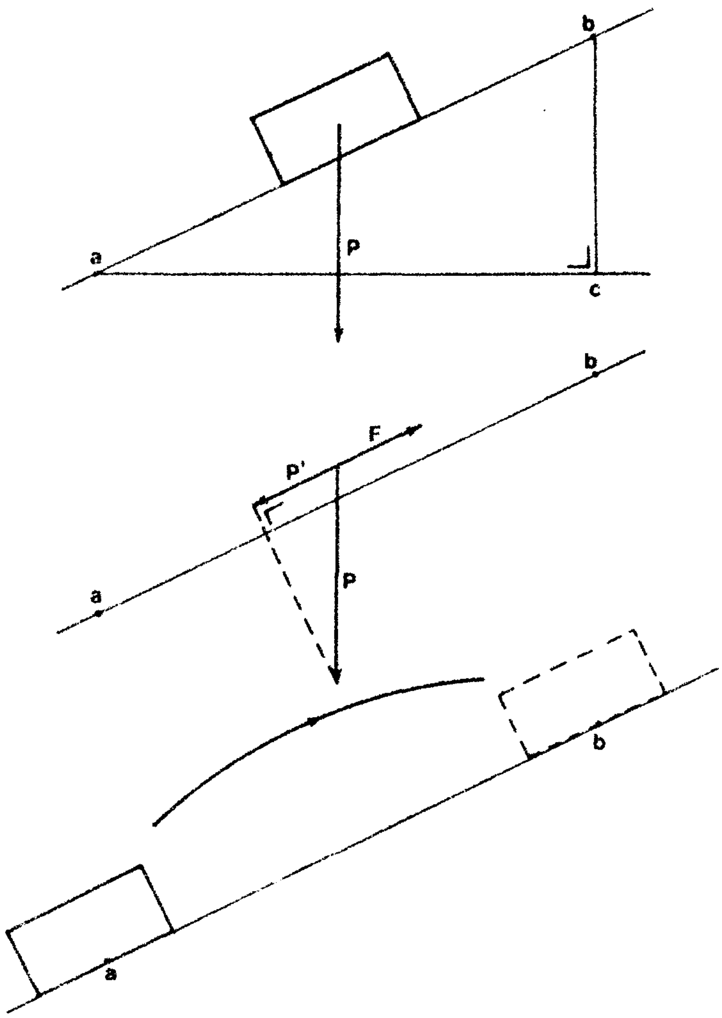
4. PRODUIT SCALAIRE . 4h/s 6h/s

Supposé acquis . Une double initiation à la trigonométrie (VM3, chapitre 18; VM4, chapitre 2) . Premier contact avec les vecteurs : addition des vecteurs, multiplication d'un vecteur par un réel (VM3, chapitre 11) . Repères orthonormés dans le plan et dans l'espace .

Objectifs . Découverte du produit scalaire en liaison avec la physique . Distributivité du produit scalaire . Expression du produit scalaire dans un repère orthonormé . Applications variées : théorème de Pythagore généralisé, loi du sinus, équation du cercle, etc...

TRAVAILLER POUR REMONTER LA PENTE .

Dans VM3, nous avons vu comment Simon Stévin (1586) avait résolu le problème de l'équilibre d'un corps solide de poids P posé sur un plan incliné ab . La situation était idéalisée en supposant que le corps peut glisser sans frottements . Le poids P est représenté par un vecteur dirigé vers le bas . Ce vecteur possède une projection orthogonale P' sur ab . Pour équilibrer le corps, il faut appliquer une force F opposée à P' et de même intensité . Considérons à présent un problème un peu plus ambitieux . On imagine que le corps solide est placé sur un plan incliné et en a . Nous souhaitons le faire glisser jusqu'en b . A cet effet, il faut dépenser une certaine énergie ou effectuer ce qu'on appelle un travail en physique, une notion qu'il ne faut pas encore comprendre à fond pour suivre notre démarche . Il est naturel de prévoir que ce travail est proportionnel à P' et à la longueur de [a,b] .



En choisissant l'unité de travail de manière que la constante de proportionnalité soit égale à 1, on arrive à

$$\text{travail} = \pm\ |P'|\ |ab|$$

La question du signe se pose .

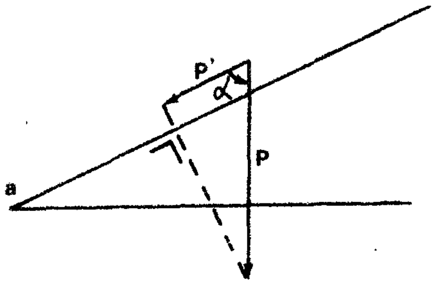
On fait glisser le corps solide de b en a, on ne dépense plus de l' énergie, mais on en récupère . Dans ce cas, il est naturel que le travail change de signe .

La difficulté se résout comme par enchantement, en introduisant une nouvelle notion mathématique : <u>le produit scalaire de deux vecteurs</u> qui est un nombre réel associé aux vecteurs $\overline{P}$ et $\overline{ab}$. Introduisons l'angle α que font P et P'

et nous savons que

$$|P'| = |P| \cos\alpha$$

Nous voyons encore que α est l'angle des vecteurs $\overline{ba}$ et $\overline{P}$.



Si $\overline{ab}$ est remplacé par $\overline{ba}$, il convient de remplacer α par $\pi - \alpha$ et il apparaît clairement que $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$

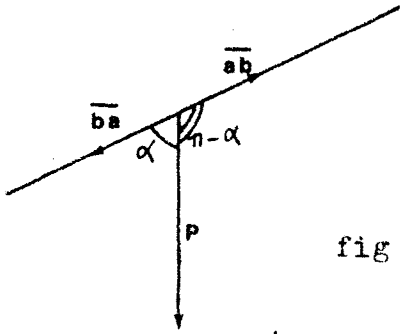


fig 1

<u>Résumons-nous</u> . Oublions les notations précédentes et désignons par $\overline{a}$ et $\overline{b}$ deux vecteurs d'angle α .

Nous décidons que le <u>produit scalaire</u> de ces deux vecteurs est le <u>nombre réel</u> (et non un vecteur)

$$\boxed{\overline{a}\cdot\overline{b} = |a||b|\cos\alpha} \quad (1)$$

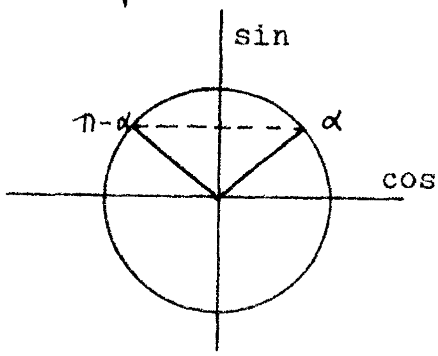


fig 2

Cette définition présente un inconvénient . Elle ne s'applique pas si un des vecteurs $\overline{a}$ ou $\overline{b}$ est nul car dans ce cas, l'angle α est indéterminé .

La définition (1) possède une autre interprétation (fig 3) :

On considère le vecteur $\overline{a'}$, projection orthogonale de $\overline{a}$ sur $\overline{b}$ et $\overline{a}\cdot\overline{b}$ est le produit des longueurs de $\overline{a'}$ et $\overline{b}$ affecté du signe + si ces vecteurs sont des multiples positifs l'un de l'autre et du signe - s'ils sont des multiples négatifs l'un de l'autre .

Donc $\boxed{|\overline{a}\cdot\overline{b}| = |a'|\cdot|b|}$

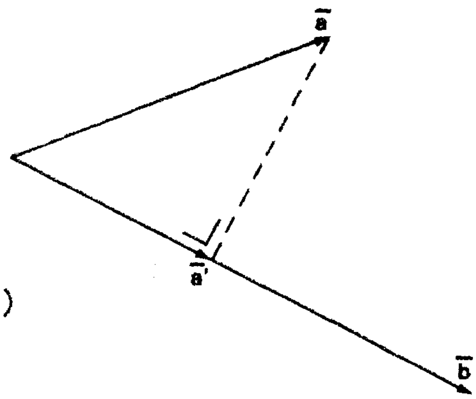


fig 3

Dans cette vision, il est naturel de poser

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = 0 \quad \text{dès que} \quad \overline{a} = \overline{0} \quad \text{ou} \quad \overline{b} = \overline{0} \qquad (2)$$

Une autre observation s'impose . Nous avons dit que le produit scalaire $\overline{a}\cdot\overline{b}$ est un nombre réel . Ceci suppose que la longueur d'un segment est un nombre réel et à cet effet, il faut choisir dans le plan ou dans l'espace, une unité de longueur .

Convention . Retenons qu'en étudiant le produit scalaire, on convient que l'espace (ou le plan) est muni d'une unité de longueur .

Revenons un instant à la situation de départ, pour constater que le travail accompli pour faire glisser le solide de poids $\overline{P}$ de a en b est égal à $\overline{P}.\overline{ab}$ (on pourrait décider, nouvelle convention, que c'est $-\overline{P}.\overline{ab}$ mais à condition de se tenir à cette convention par la suite) .

Un élève s'inquiète . Si le plan incliné devient horizontal, l'angle que font $\overline{P}$ et $\overline{ab}$ est droit, donc $\overline{P}.\overline{ab} = 0$. Il trouve choquant de penser que le travail accompli pour faire glisser $\overline{P}$ de a en b est nul . Cela cesse d'être choquant quand on se rappelle notre hypothèse de départ : toute absence de frottement . Chacun peut expérimenter que le travail est minime pour glisser sur la glace ou pour "rouler" à l'horizontale et ce sont là, des situations où le frottement est fort réduit .

EXERCICES . 1. Démontrer que le produit scalaire est commutatif .

2. Pour faciliter notre travail, nous supposons le plan et l'espace muni d'un repère orthonormé . Ceci signifie que les vecteurs unités sont de longueur 1 et deux à deux perpendiculaires .

Dessiner les vecteurs sur une feuille quadrillée et s'aider du dessin pour estimer la valeur du produit scalaire .

$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{ab}$
(1,0)	(5,6)	
(1,0)	(-5,2)	
(3,0)	(5,6)	
(-3,0)	(5,6)	
(4,1)	(0,2)	
(4,-1)	(0,9)	
(1,0,0)	(5,6,3)	

Remarque méthodologique . Cet exercice peut servir à découvrir de manière empirique la distributivité du produit scalaire, qu'on prouvera par la suite . Indispensable pour visualiser le produit scalaire .
Songer à utiliser la commutativité .

3. Démontrer que le produit scalaire de deux vecteurs est nul si et seulement si ces vecteurs sont orthogonaux .

Convention : Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur .

4. Dans l'espace vectoriel E_o^3 obtenu par le choix d'une origine o dans E^3, on fixe un point $a \neq o$ et on cherche tous les points p tels que $\overline{op}\cdot\overline{oa} = 0$

a) Quel est l'ensemble de ces points ?

b) Peut-on interpréter cette recherche comme la résolution d'une équation . Quelle équation ?

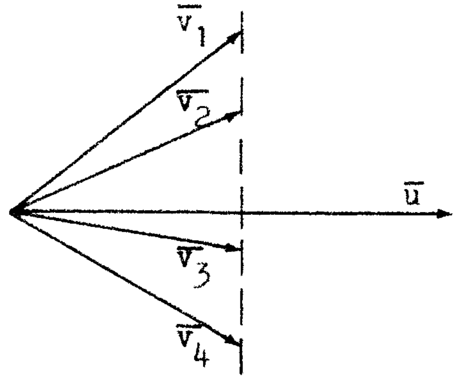
c) Que devient cette question dans E_o^2 et dans E_o^1 ?

5. Si k est un réel, a-t-on $(\overline{oa})\cdot(k\overline{ob}) = k(\overline{oa}\cdot\overline{ob})$ et $(k\overline{oa})\cdot(\overline{ob}) = k(\overline{oa}\cdot\overline{ob})$? Justifier .

6. Que peut-on dire de $\overline{oa}\cdot\overline{oa}$ si $\overline{oa} = 1$?

7. A-t-on toujours $(\overline{u}\cdot\overline{v})\overline{w} = \overline{u}(\overline{v}\cdot\overline{w})$?

8. Sur ce dessin, quelles sont les égalités et les inégalités qu'on peut prévoir entre $\overline{u}\cdot\overline{v}_1$, $\overline{u}\cdot\overline{v}_2$, $\overline{u}\cdot\overline{v}_3$, $\overline{u}\cdot\overline{v}_4$?



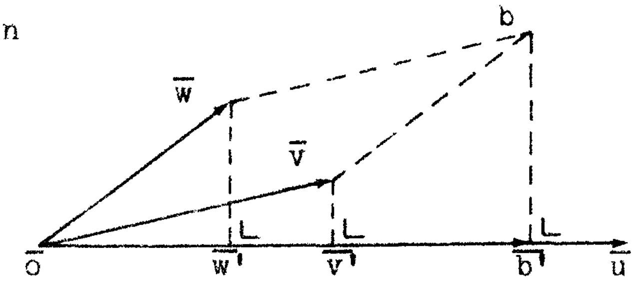
LA DISTRIBUTIVITE DU PRODUIT SCALAIRE .

Nous avons appris à additionner des vecteurs, à les multiplier par un nombre réel . Nous avons découvert ainsi, la structure d'espace vectoriel (VM3 chapitre 11)

A présent, nous disposons également d'un produit scalaire qui associe à deux vecteurs, un nombre réel . Quel est le lien entre la structure d'espace vectoriel et le produit scalaire ? Quel type de propriété relie parfois deux opérations sur les nombres ? La distributivité

Voila une question fondamentale : a-t-on

$$\overline{u}\cdot(\overline{v} + \overline{w}) = \overline{u}\cdot\overline{v} + \overline{u}\cdot\overline{w} \qquad (1)$$



Les essais font apparaître un dessin intéressant où $\overline{b} = \overline{v} + \overline{w}$ et où les projections se font sur ou .

Un raisonnement apparaît :

$\overline{u}\cdot(\overline{v} + \overline{w}) = \overline{u}\cdot\overline{b} = \overline{u}\cdot\overline{b'} = \overline{u}\cdot(\overline{v'} + \overline{v'b'})$

qu'on est tenté d'égaler à

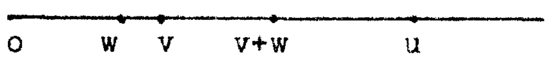
$\overline{u}\cdot\overline{v'} + \overline{u}\cdot\overline{v'b'} = \overline{u}\cdot\overline{v'} + \overline{u}\cdot\overline{w'} = \overline{u}\cdot\overline{v} + \overline{u}\cdot\overline{w}$

Au passage, on a admis que $\overline{v'b'} = \overline{w'}$ ce qui se justifie par exemple, en utilisant des translations : la translation t qui transforme o en v, transforme le triangle oww' en un triangle vbb" où bb" // ww' , donc b" $\in$ bb' . De plus vb" // v'b', donc vb"b'v' est un parallélogramme et $\overline{v'b'} = \overline{vb''} = \overline{ow'}$.

Il reste à justifier $\overline{u}\cdot(\overline{v'} + \overline{v'b'}) = \overline{u}\cdot\overline{v'} + \overline{u}\cdot\overline{v'b'}$.

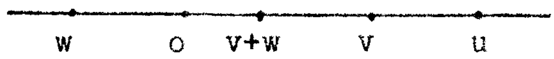
Des esprits logiques s'inquiètent . Cela ressemble à un cercle vicieux . En réalité, nous sommes ramenés à la preuve d'un cas particulier de (1) : celui où tous les points o, u, v, w sont alignés . Dans ce cas, $\cos\alpha = 1$ ou -1 selon que les deux vecteurs considérés ont le même sens ou des sens opposés .

1)



si $\overline{v}$ et $\overline{w}$ ont le même sens, $|\overline{v} + \overline{w}| = |\overline{v}| + |\overline{w}|$ et de ce fait, $\overline{u}\cdot(\overline{v} + \overline{w}) = \overline{u}\cdot\overline{v} + \overline{u}\cdot\overline{w}$

2)



si $\bar{v}$ et $\bar{w}$ sont de sens opposés, nous pouvons supposer que $\bar{v} \geq \bar{w}$ de sorte que $|\bar{v} + \bar{w}| = |\bar{v}| + |\bar{w}|$

Supposons que $\bar{u}$ ait le même sens que $\bar{v}$.

Donc $\bar{u}\cdot(\bar{v} + \bar{w}) = |\bar{u}|(|\bar{v}| - |\bar{w}|) = |\bar{u}||\bar{v}| - |\bar{u}||\bar{w}| = \bar{u}\cdot\bar{v} + \bar{u}\cdot\bar{w}$.

Si $\bar{u}$ a le même sens que $\bar{w}$, on procède de même .

Ouf ! Ce n'est pas facile, mais nous avons tout de même établi le résultat visé .

> __Théorème__ : Dans l'espace vectoriel E_o^3 , l'addition vectorielle et le produit scalaire de vecteurs, sont liés par la distributivité :
> $\bar{u}\cdot(\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u}\cdot\bar{v} + \bar{u}\cdot\bar{w}$ quels que soient $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$.

Tout ceci est-il bien utile ? Souvenons-nous des efforts effectués dans l'exercice 1, pour évaluer le produit scalaire de deux vecteurs dont on donne les coordonnées dans un repère orthonormé . Ce n'était pas facile . Et l'énoncé de l'exercice 1 est pourtant gentil : une au moins des coordonnées est toujours nulle . Que dire alors s'il fallait évaluer $(3, 5)\cdot(2, 1)$? C'est ici que la distributivité intervient . Modifions un moment la question en cherchant

$$(3\bar{a} + 5\bar{b})\ (2\bar{c} + \bar{d}) .$$

On obtient $(3\bar{a} + 5\bar{b})\cdot(2\bar{c}) + (3\bar{a} + 5\bar{b})\cdot\bar{d} = 6\cdot\bar{a}\cdot\bar{c} + 10\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} + 3\cdot\bar{a}\cdot\bar{d} + 5\cdot\bar{b}\cdot\bar{d}$

Revenons à $(3, 5)\cdot(2, 1)$ dans un repère orthonormé où e_1, e_2 sont les vecteurs unités . On voit que

$$(3, 5) = 3\,\bar{e}_1 + 5\,\bar{e}_2 \qquad (2, 1) = 2\,\bar{e}_1 + \bar{e}_2$$

On observe que $\bar{e}_2\cdot\bar{e}_2 = 1$, $\bar{e}_1\cdot\bar{e}_1 = 1$, $\bar{e}_1\cdot\bar{e}_2 = 0$

donc $(3, 5)\ (2, 1) = 6\ \bar{e}_1\cdot\bar{e}_1 + 10\ \bar{e}_2\cdot\bar{e}_1 + 3\ \bar{e}_1\cdot\bar{e}_2 + 5\ \bar{e}_2\cdot\bar{e}_2 = 11$

Et dans E_o^3 ? Calculons $(5, -2, 19)\cdot(3, 7, -11)$

On a $(5, -2, 19) = 5\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + 19\bar{e}_3$; $(3, 7, -11) = 3\bar{e}_1 + 7\bar{e}_2 - 11\bar{e}_3$

$\bar{e}_1\cdot\bar{e}_1 = \bar{e}_2\cdot\bar{e}_2 = \bar{e}_3\cdot\bar{e}_3 = 1 \qquad \bar{e}_1\cdot\bar{e}_2 = \bar{e}_2\cdot\bar{e}_3 = \bar{e}_3\cdot\bar{e}_1 = 0$

donc $(5, -2, 19)\cdot(3, 7, -11) = 5\cdot3 + (-2)\cdot7 + 19\cdot(-11)$

$= 15 - 14 - 209 = -208$.

Les mêmes raisonnements livrent un résultat plus général :

> dans E_o^3, muni d'un repère orthonormé o, e_1, e_2, e_3 le produit scalaire des vecteurs $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ et $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ est égal à
>
> $$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$
>
> dans E_o^2, muni d'un repère orthonormé o, e_1, e_2 le produit scalaire des vecteurs $\bar{a} = (a_1, a_2)$ et $\bar{b} = (b_1, b_2)$
>
> $$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$
>
> dans E_o^1, muni d'un repère orthonormé o, e_1 le produit scalaire des vecteurs $\bar{a} = (a_1)$ et $\bar{b} = (b_1)$ est égal à
>
> $$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_1b_1$$

Bref, plus besoin de cosinus et de calculs de longueurs pour déterminer le produit scalaire, dans cette situation .
On est ramené simplement à des produits et sommes de nombres réels
En outre, le passage d'une dimension à une autre se fait sans difficulté . Chacun peut deviner ce qui se passe à 4 dimensions
Convention importante . Chaque fois que nous traiterons du produit scalaire de vecteurs donnés par leurs coordonnées il doit être compris, à partir d'ici, que le repère est toujours orthonormé . Cette convention s'applique par exemple dans l'exercice 10.

EXERCICES . 9. a) Si $\overline{ab}$ est un vecteur de E_o^3, montrer que sa longueur est donnée par $|\overline{ab}| = \sqrt{\overline{ab}\cdot\overline{ab}}$

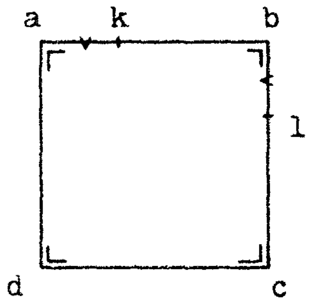
b) Dans E_o^3, calculer avec une machine, la longueur des vecteurs suivants (5, -7, 90), (12, 3, 1), (12,43; 13,5; 11,19)

c) Rédiger un programme qui permette d'automatiser ce calcul .

10. Rédiger un programme permettant de calculer le produit scalaire de deux vecteurs donnés par leurs coordonnées .

11. Utiliser la distributivité du produit scalaire pour établir les propriétés géométriques suivantes .

a) Dans un losange, les diagonales sont nécessairement perpendiculaires .
Un conseil : essayer de définir (avec soin) ce qu'est un losange et faire un dessin (pas forcément avec grande précision) pour se tracer une voie vers la solution .



b) Voici un carré de sommets a,b,c,d et des points k,l sur [a, b] [b ,c] tels que |ak| = |bl| .
Démontrer que al ⊥ dk

12. Voici un carré a,b,c,d dont les côtés ont une mesure égale à L
Soit m le milieu de ab, a' le symétrique de a par rapport à b, b' le symétrique de b par rapport à a, p le milieu des diagonales .
Calculer en fonction de L

a) $\overline{ab}^2$	b) $\overline{ab}\cdot\overline{pb}$	c) $\overline{b'p}\cdot\overline{cd}$	d) $\overline{ab}\cdot\overline{ac}$
e) $\overline{ab}\cdot\overline{pa}$	f) $\overline{bc}\cdot\overline{mp}$	g) $\overline{ab}\cdot\overline{ad}$	h) $\overline{ap}\cdot\overline{cd}$
i) $\overline{pa'}\cdot\overline{ap}$	j) $\overline{ab}\cdot\overline{am}$	k) $\overline{aa'}\cdot\overline{pa'}$	l) $\overline{pa}\cdot\overline{pb'}$

13. Voici deux points u et v donnés par leurs coordonnées
(u_1), (u_1, u_2), (u_1, u_2, u_3) dans E_o^1, E_o^2, E_o^3
(v_1), (v_1, v_2), (v_1, v_2, v_3)

a) Démontrer que

$$|u| = \sqrt{u_1^2} \quad \text{ou} \quad \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \quad \text{ou} \quad \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

$$|uv| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2} \quad \text{ou} \quad \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2} \quad \text{ou}$$

$$\sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2}$$

b) Rédiger un programme qui permette d' appliquer ces formules, lorsqu'on donne u et v par leurs coordonnées dans l'un quelconque des espaces E_o^1, E_o^2, E_o^3 .

14. Voici des points $a = (2, 3)$, $b = (0, 4)$, $c = (-1, 2)$, $d = (-3, 2)$ dans $\mathbb{R}^2$. Calculer l'angle des droites ab et cd .

15. Voici des vecteurs $\overline{a} = 2\overline{e}_1 - 3\overline{e}_2$, $\overline{b} = 3\overline{e}_1 - 2\overline{e}_2$ et $\overline{c} = (2, x)$
Trouver x pour que $\overline{c} \perp (3\overline{a} - 2\overline{b})$

16. Dans un triangle équilatéral abc, on donne des points p $[a,b]$, q $[b,c]$, r $[c,a]$ tels que
$|ap| = |bq| = |cr| = \frac{|ab|}{3}$. A-t-on $ab \perp pr$?

17. Utiliser le produit scalaire pour démontrer le théorème de Pythagore si a, b, c sont les sommets d'un triangle rectangle en a,
$|bc|^2 = |ab|^2 + |ac|^2$

18. <u>Le théorème de Pythagore généralisé</u> .

Si a, b, c sont trois points distincts de E^3 et si α désigne l'angle $b\hat{a}c$, démontrer que

$$|bc|^2 = |ac|^2 + |ab|^2 - 2|ac|\cdot|ab|\cos\alpha$$

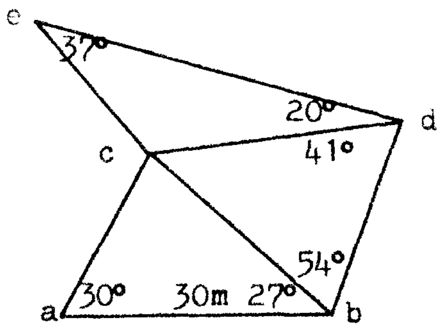
19. <u>Calculer des distances grâce au théorème de Pythagore généralisé</u>
Voici des points a, b, c du plan E^2 . On dispose des mesures des segments ab et ac soit 10^9 et 10^6 . On connaît l'angle $b\hat{a}c = 18°$ Quelle est la distance de b à c ?

20. <u>Comment construire un angle droit dans un salle de sport</u> ?
La technique n'a pas varié depuis l'époque des bâtisseurs égyptiens il y a 5000 ans . On utilise par exemple une corde partagée en 12 unités où des noeuds délimitent 5, 4 et 3 unités . En tendant la corde sur le terrain de manière à ce que les noeuds se trouvent aux sommets d'un triangle, on obtient un angle droit . Pourquoi ?
C'est la <u>réciproque du théorème de Pythagore</u> .
Démontrer que si a, b, c sont trois points distincts de E^3 et si $|bc|^2 = |ac|^2 + |ab|^2$ alors $b\hat{a}c$ est un angle droit .

21. <u>La loi des sinus</u> . Voici un triangle de sommets a, b, c dans E^3 . Démontrer que

$$\frac{\sin \hat{a}}{|bc|} = \frac{\sin \hat{b}}{|ac|} = \frac{\sin \hat{c}}{|ab|}$$

22. Calculer des distances par des mesures d'angles et une mesure effective de distance .



Voici des points a, b, c, d du plan E^2 et la donnée de $|ab|$ ainsi que de divers angles .
On demande de calculer (à l'aide d'une machine), la distance $|de|$.
Le dessin est volontairement incorrect . C'est un schéma qui représente des mesures faites sur le terrain .

23. Si R est le rayon du cercle circonscrit au triangle abc, montrer que $\dfrac{\sin \hat{a}}{|bc|} = \dfrac{\sin \hat{b}}{|ac|} = \dfrac{\sin \hat{c}}{|ab|} = \dfrac{1}{2R}$

24. Redémontrer le théorème de l'angle inscrit : si a, b, c sont des points d'un cercle C de centre o et si o, a sont situés d'un même côté de bc, dans le plan de C, alors $b\hat{o}c = 2\ b\hat{a}c$.

25. Dans un triangle abc, rectangle en a, soit h le point d'intersection de la hauteur issue de a avec le côté bc . Prouver que

$$|ah|^2 = |bh|\cdot|hc|$$

(des démonstrations très différentes sont possibles) .

ENCORE DES APPLICATIONS .

La variété des exercices qu'on vient de faire témoigne de la puissance du produit scalaire . Celui-ci rend une foule de problèmes calculables sans trop de peine . Voici d'autres illustrations de cette puissance .

1) LES ARÊTES D'UN TETRAEDRE .

Dans E^3, considérons un tétraèdre de sommets a, b, c, d . Quelles sont les relations d'orthogonalité dont les six arêtes peuvent jouir ?
Nous nous limiterons au cas le plus difficile : celui où des arêtes opposées sont orthogonales . Il y a trois paires d'arêtes opposées : ab et cd, ac et bd, ad et bc . Combien de ces paires peuvent être orthogonales ?
Supposons qu'on ait une paire orthogonale $ad \perp bc$
Peut-on en tirer quelque chose ? On a $\overline{da}\cdot\overline{bc} = 0$ et en choisissant une origine $o = d$, on obtient

$\overline{a}\cdot(\overline{c} - \overline{b}) = 0$, $\overline{a}\cdot\overline{c} - \overline{a}\cdot\overline{b} = 0$, $\overline{a}\cdot\overline{c} = \overline{a}\cdot\overline{b}$

donc les projections orthogonales de b et c sur da coïncident
Et si deux paires d'arêtes sont orthogonales ?
Supposons que $ad \perp bc$ et $dc \perp ab$.
On a donc $\overline{ad}\cdot\overline{bc} = 0 = \overline{dc}\cdot\overline{ab}$

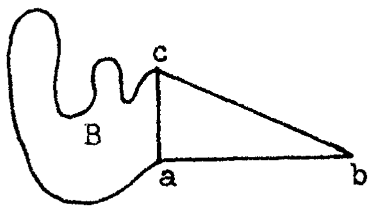
Calculons $\overline{db}\cdot\overline{ac}$ en essayant de prouver que $ac \perp db$.
Nos élèves ont trouvé une voie très simple .

$$\begin{aligned}\overline{db}\cdot\overline{ac} &= (\overline{da} + \overline{ab})\cdot(\overline{ab} + \overline{bc}) \\ &= \overline{da}\cdot\overline{ab} + \overline{da}\cdot\overline{bc} + \overline{ab}\cdot\overline{ab} + \overline{ab}\cdot\overline{bc} \\ &= \overline{ab}\cdot\overline{da} + 0 + \overline{ab}\cdot\overline{ab} + \overline{ab}\cdot\overline{bc} \\ &= \overline{ab}\cdot(\overline{da} + \overline{ab} + \overline{bc}) \\ &= \overline{ab}\cdot\overline{dc} \\ &= 0\end{aligned}$$

Voila une propriété difficile à deviner par la vue seule : un tétraèdre ayant deux paires d'arêtes opposées orthogonales a forcément trois paires d'arêtes opposées orthogonales .

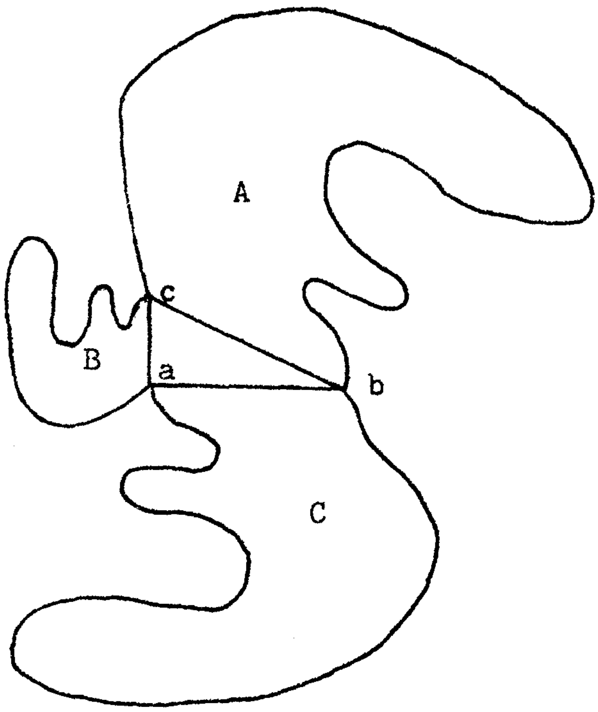
2) <u>UN THEOREME DE PYTHAGORE ARTISTIQUE</u> .

Partons d'un triangle abc rectangle en a et dessinons une figure B délimitée par un contour quelconque en nous imposant seulement que celui-ci passe par a et c et qu'il ne se recoupe pas . Ensuite nous construisons une figure A dont le contour passe par b et c et une figure C dont le contour passe par a et b .



Cette fois, toute liberté est supprimée . Nous voulons que A et C soient des figures semblables à B . (VM3, chapitre 9)

Peut-on affirmer que l'aire de A est la somme des aires de B et de C quelle que soit la fantaisie du tracé ? La classe est partagée . C'est le moment de se tourner vers le raisonnement .



Il existe une similitude s_1 transformant B en C et [c,a] en [a,b] (ce qui était sous-entendu depuis le début et compris par chacun) .
Soit k_1 son rapport .
Alors aire C = k_1^2(aire B) (1)
En outre $|ab| = k_1 |ac|$ (2)
De même, il existe un nombre réel k_2 tel que

$$\text{aire } A = k_2^2(\text{aire } B) \qquad (3)$$
$$|bc| = k_2 \, |ac| \qquad (4)$$

Le théorème de Pythagore livre

$$|bc|^2 = |ac|^2 + |ab|^2 \quad \text{ou} \quad k_2^2 = 1 + k_1^2 \quad \text{par (4) et (2)}$$

Dès lors, (1) et (3) donnent

$$\begin{aligned} \text{aire } A &= k_2^2 \, (\text{aire } B) = (1 + k_1^2)(\text{aire } B) \\ &= \text{aire } B + k_1^2 \text{ aire } B \\ &= \text{aire } B + \text{aire } C \end{aligned}$$

Joli non ?

3) ET LES CALCULATRICES ?

Nous avons déja rencontré plusieurs formules qui se laissent traiter facilement sur machine . Voici un autre thème .

Dans $\mathbb{R}^2$ on donne deux vecteurs par leurs coordonnées $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$. Quel est l'angle α de ces vecteurs ?

On a
$$\begin{aligned} a \cdot b &= a_1 b_1 + a_2 b_2 \\ &= |a|\,|b| \cos \alpha \end{aligned}$$

donc
$$\cos \alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

Ceci nous livre une nouvelle occasion d'utiliser une calculatrice . Mais la formule livre $\cos \alpha$. Comment obtenir α à partir de là ? Sur TI 30, sur la CASIO College fx-80, cela se fait tout simplement en pressant les touches $\boxed{\text{inv}}$ $\boxed{\text{cos}}$.

EXERCICES . 26. a) Un tétraèdre régulier a-t-il trois paires d'arêtes opposées orthogonales ?

b) Existe-t-il un tétraèdre non régulier ayant trois paires d'arêtes opposées orthogonales ?

c) Si un tétraèdre abcd admet un plan de symétrie passant par ab, a-t-on forcément $ab \perp cd$?

d) Si $ab \perp cd$ dans un tétraèdre abcd, celui-ci admet-il forcément un plan de symétrie par ab ?

27. Si abcd est un tétraèdre tel que $ab \perp ac \perp ad \perp ab$. A-t-on forcément $ab \perp cd$, $ac \perp bd$, $ad \perp bc$?

Remarque . Les deux exercices précédents ne sont pas très difficiles mais exigent un effort d'imagination et d'observation . Le choix d'un repère et quelques calculs pourraient s'avérer utiles .

28. Quatre points trois à trois non alignés du plan E^2, déterminent six droites qui les relient deux à deux . A chacune de ces droites,

correspond une droite opposée (leur réunion recouvre les quatre points) . Peut-il arriver qu'il y ait trois paires de droites opposées orthogonales ? S'il y a deux paires de droites opposées orthogonales y en a-t-il forcément une troisième ?

29. Peut-on recouvrir entièrement une table carrée de 0,9m de côté par deux nappes rondes de 1,006 m de diamètre chacune ?

30. Calculer avec une machine, la longueur du vecteur u si u possède les coordonnées

a) (1, 1) b) (-8,798; 6,324) c) (100560,13; -24599,976)

31. Calculer cos α et α , à l'aide d'une machine, si α est l'angle des vecteurs a, b

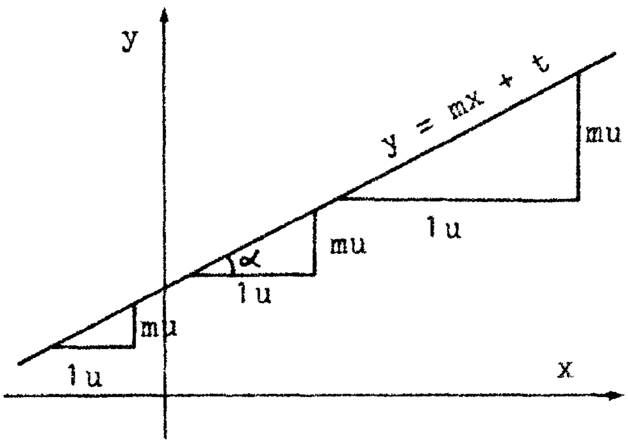
a	b	cos α	α
(2, 0)	(-1, 4)		
(4, -1)	(-5, 2)		
(-0,7894; 8,329)	(19,375; -8,899)		
(5, -2, 1)	(3, 1, 0)		

32. Le triangle de sommets (3,1; 4,8), (1,7; 6,4) et (2,3; 4,1) est-il rectangle au premier sommet ?

33. Dans un cube de côté égal à 1, calculer les longueurs des diverses diagonales, en fonction de 1 .

34. <u>La pente d'une droite</u> .

Nous travaillons dans un repère orthonormé du plan ou de l'espace .



Considérons dans le plan, la droite D d'équation $y = mx + b$ et soit α l'angle que fait D avec l'axe des x .

a) $\boxed{m = tg\,\alpha}$ Démontrer .

b) Donner l'équation des droites passant par l'origine, qui font un angle de 45°, 120°, 90° avec l'axe des x .

c) Donner l'équation des droites passant par (3, -7) qui font un angle de 30°, 15° avec l'axe des x .

d) Quel est l'angle que fait $y = 3x + 1$ avec l'axe des x (utiliser une calculatrice et les touches $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{tan}}$ s'il s'agit d'une machine de la gamme TI et CASIO)

e) Montrer que les droites d'équation $y = mx + b$ et $y = m'x + b'$ sont orthogonales si et seulement si $mm' = -1$.

35. a) Dans le plan $\mathbb{R}^2$, montrer que le cercle C de centre (x_o, y_o) et de rayon R est constitué par les points (x, y) tels que

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = R^2$$

b) Montrer que l'ensemble des points du plan vérifiant une équation

$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$ où $m, n, p \in \mathbb{R}$

est un cercle, un ensemble constitué d'un seul point ou l'ensemble vide .

c) Trouver le centre et le rayon des cercles (si cercle il y a ...)

$x^2 + y^2 - 10x - 8y + 32 = 0$ $\quad$ $x^2 + y^2 - 10x - 3y + 62 = 0$

$3x^2 + 3y^2 - 4x + 5y - 6 = 0$ $\quad$ $x^2 + y^2 + 1 = 0$

d) Trouver l'équation du cercle tangent à oy et passant par (6, 3) .

e) Trouver l'équation du cercle circonscrit au triangle abc, où

a = (3, 2), b = (-1, 0), c = (0, 5)

f) Quelle est l'équation du cercle passant par o, de rayon 5 et de centre situé sur la droite d'équation $x + 2y - 5 = 0$.

36. Une porte rectangulaire mesure 2,25m sur 0,81m . Quelles sont les dimensions maximales d'un objet rectangulaire plat qu'on désire faire passer par cette porte, sans pliures ni déchirures ?

RESUME

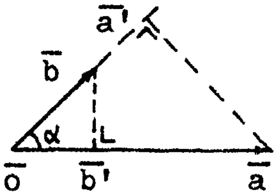
Nous travaillons en axes orthonormés.

Produit scalaire de deux vecteurs $\overline{a}$ et $\overline{b}$.

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = |a|\,|b|\cdot\cos\alpha$$

$= \overline{a'}\cdot\overline{b} = \pm\,|a'|\,|b|$ + si $\overline{a'}$ et $\overline{b}$ ont le même sens
- si $\overline{a'}$ et $\overline{b}$ sont de sens opposés

$= \overline{a}\cdot\overline{b'} = \pm\,|a|\,|b'|$ + si $\overline{a}$ et $\overline{b'}$ ont le même sens
- si $\overline{a}$ et $\overline{b'}$ sont de sens opposés



Propriétés du produit scalaire

$\forall\,\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c} \in V,\quad \forall r \in \mathbb{R}$

$\overline{a}\cdot\overline{b} \in \mathbb{R}$

$\overline{a}\cdot(\overline{b}+\overline{c}) = \overline{a}\cdot\overline{b} + \overline{a}\cdot\overline{c}$

$r\cdot(\overline{a}\cdot\overline{b}) = (r\cdot\overline{a})\cdot\overline{b} = r\cdot(\overline{a}\cdot\overline{b})$

$\overline{a}\cdot\overline{b} = 0 \Leftrightarrow \overline{a} = o$ ou $\overline{b} = o$ ou $\overline{a} \perp \overline{b}$

Calcul analytique du produit scalaire et formules dérivées.

Dans E^2 $\overline{a}(x_1, y_1)$ $\overline{b}(x_2, y_2)$ $\overline{c}(x_3, y_3)$ $\overline{d}(x_4, y_4)$

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = x_1x_2 + y_1y_2$$

$$\overline{ab}\cdot\overline{cd} = (x_2 - x_1)(x_4 - x_3) + (y_2 - y_1)(y_4 - y_3)$$

$$|a| = d(o, a) = \sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}}$$

$$|ab| = d(a, b) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}}\ \sqrt{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}}}$$

Dans E^3 $\overline{a}(x_1, y_1, z_1)$ $\overline{b}(x_2, y_2, z_2)$ $\overline{c}(x_3, y_3, z_3)$ $\overline{d}(x_4, y_4, z_4)$

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

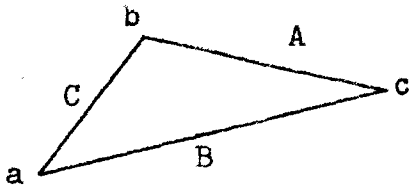
$$\overline{ab}\cdot\overline{cd} = (x_2 - x_1)(x_4 - x_3) + (y_2 - y_1)(y_4 - y_3) + (z_2 - z_1)(z_4 - z_3)$$

$$|a| = d(o, a) = \sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2}}$$

$$|ab| = d(a, b) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\,\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Théorème de Pythagore dans un triangle abc



Si a, b, c $\in \mathbb{R}^3$

alors $A^2 = B^2 + C^2 - 2BC \cos a$

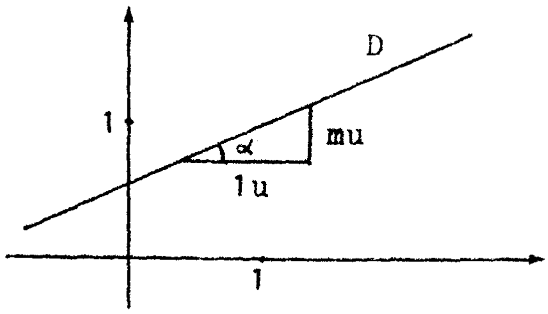
cas particulier : $\hat{a} = 90°$

$\Longrightarrow A^2 = B^2 + C^2$

Loi des sinus dans un triangle abc

$\frac{A}{\sin a} = \frac{B}{\sin b} = \frac{C}{\sin c} = 2R$ où R est le rayon du cercle circonscrit au triangle abc .

La pente d'une droite dans E^2



$D \equiv y = ax + b$

$a = \operatorname{tg}\alpha =$ pente de la droite D

Condition de perpendicularité de deux droites :

$D \equiv y = ax + b$

$D' \equiv y = a'x + b'$

$D \perp D' \qquad a \cdot a' = -1$

Equation d'un cercle de centre $c(x_o, y_o)$ et de rayon R

$$C \equiv (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = R^2$$