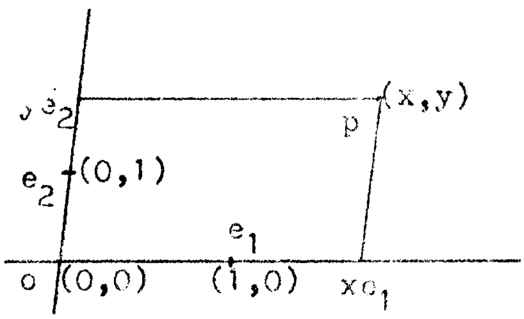
5. POLYNOMES DU PREMIER DEGRE . 6h/s

<u>Supposé acquis</u> . Lien entre les droites du plan et les équations $y = ax + b$. Coordonnées dans l'espace . (VM3; chap 15, VM4; chap 1)

<u>Objectifs</u> . Interprétation graphique et géométrique des polynômes du premier degré de plusieurs variables ainsi que des équations et inéquations associées . Revision et fixation du lien entre les droites du plan et l'équation $y = ax + b$.

UN RETOUR AUX DROITES ET A LEURS EQUATIONS .

Il convient à présent d'assimiler parfaitement les notions relatives aux droites, traitées dans le chapitre 1 . Rappelons l'essentiel . Considérons le plan E^2 muni d'un repère cartésien constitué d'une origine (0, 0) et de deux points unités $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. Alors tout point p du plan, s'identifie à un couple de nombres réels (x, y) ou (x_1, x_2) qui sont ses coordonnées et p s'identifie aussi au vecteur $\overline{op} = x_1\overline{oe_1} + x_2\overline{oe_2}$ ou $\overline{p} = x\overline{e_1} + y\overline{e_2}$



En outre, toute fonction du premier degré $x \to ax + b$ $a,b \in \mathbb{R}$ admet pour graphique, l'ensemble des points (x, y) vérifiant l'équation $y = ax + b$. Cet ensemble est toujours une droite du plan . Lorsque a est fixé et que b varie, cette droite conserve la même direction . Réciproquement, toute droite du plan possède une équation de la forme $y = ax + b$ ou de la forme $x = c$ où a, b, c sont des réels fixés . Les droites d'équation $x = c$ où $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = c\}$ constituent une direction . Voici quelques applications de ces résultats qu'il importe de ne plus oublier .

1) Lorsqu'on donne une fonction du premier degré, par exemple $x \to 3x - 7$ ou l'équation associée $y = 3x - 7$ et qu'il faut en déterminer le graphique, il est inutile de donner mettons douze valeurs à x, de calculer y pour chacune d'elles et de reporter les douze points obtenus sur un graphique . Puisque le graphique livre une droite, il suffit toujours de calculer deux points . Toutefois, pour la précision du dessin (si elle a de l'importance), mieux vaut éloigner ces deux points autant que possible, par rapport à l'instrument dont on dispose pour le tracé .
Par ailleurs, pour la simplicité des calculs, mieux vaut donner à x la valeur 0 et une autre valeur bien choisie .

2) Si on se donne un point p, par exemple (-3, 7) et qu'on souhaite manipuler les équations des droites passant par p, on commence par écrire la forme générale de l'équation d'une droite : $y = ax + b$ ou $x = c$ et on exprime que celle-ci passe par p, ce qui donne les contraintes

$$7 = -3a + b \quad \text{donc} \quad b = 7 + 3a$$
$$-3 = c$$

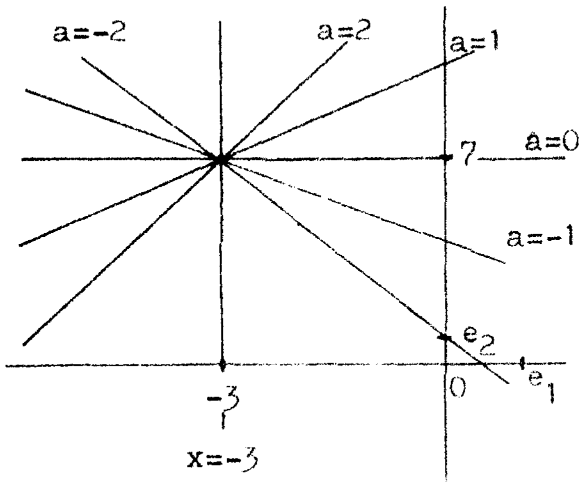
Donc les droites par p = (-3, 7) ont une équation de la forme

$$y = ax + 7 + 3a$$
$$x = -3$$

ou mieux encore

$$y - 7 = a(x + 3) \qquad (1)$$
$$x = -3$$

Ici a est <u>paramètre</u> variable dans $\mathbb{R}$, à savoir le <u>coefficient angulaire</u> ou <u>pente</u> de la droite .
Lorsque la droite est fixée, a est fixé et réciproquement . Si a varie, la droite varie, en passant par p . Bref, dans (1) x et y représentent des coordonnées de points alors que a aurait plutôt un statut de coordonnée de droite .



Plus généralement, si $p = (p_1, p_2)$ et si on travaille avec des coordonnées (x_1, x_2) au lieu de (x, y), l'équation générale des droites passant par p est

$$\boxed{\begin{array}{ll} x_2 - p_2 = a(x_1 - p_1) & a \in \mathbb{R} \\ \text{ou} \quad x_1 = p_1 & \end{array}} \quad (2)$$

Ici a est un paramètre variable avec la droite, une coordonnée de droite . Les réels variables p_1, p_2 représentent les coordonnées d'un point commun à toutes les droites d'équation (1) tandis que (x_1, x_2) sont les coordonnées d'un point variant sur la droite d'équation (2), étant entendu que a, p_1 et p_2 sont fixés . Ces subtilités d'interprétation de (2) sont fondamentales et elles ne doivent pas non plus nous dérouter : mine de rien, (2) nous fait entrer dans un espace à 5 dimensions .

3) Si on se donne deux points distincts p et q, par exemple p = (4, 6) et q = (-2, 5) on doit pouvoir écrire l'équation de la droite pq .
Les droites par p ont une équation

$$y - 6 = a(x - 4)$$
$$x = 4$$

Si on veut passer en outre, par (-2, 5) la droite x = 4 ne convient pas . Par contre, $5 - 6 = a(-2 - 4)$ livre $a = \frac{1}{6}$

La droite cherchée est donc $y - 6 = \frac{1}{6}(x - 4)$

Plus généralement, la droite par $p = (p_1, p_2)$ et $q = (q_1, q_2)$ est donnée par

$$q_2 - p_2 = a(q_1 - p_1) \quad \text{d'où} \quad a = \frac{q_2 - p_2}{q_1 - p_1}$$

et on obtient l'équation

$$\boxed{\begin{array}{ll} x_2 - p_2 = \dfrac{q_2 - p_2}{q_1 - p_1}(x_1 - p_1) & \text{si} \quad p_1 \neq q_1 \\ \text{ou} \quad x_1 = p_1 & \text{si} \quad p_1 = q_1 \end{array}} \qquad (3)$$

Il est possible de mémoriser (3) sous une forme plus symétrique :

$$\boxed{\frac{x_1 - p_1}{q_1 - p_1} = \frac{x_2 - p_2}{q_2 - p_2}} \qquad (\text{si } q_1 - p_1 \neq 0 \neq q_2 - p_2)$$

ou encore $\boxed{(q_2 - p_2)(x_1 - p_1) = (q_1 - p_1)(x_2 - p_2)}$ sans aucune restriction .

EXERCICES . 1. Ecrire de plusieurs manières l'équation des droites passant par les points p et q si

a) $p = (2, -5)$, $q = (0, 2)$ b) $p = (-1, -3)$, $q = (-2, -3)$

c) $p = (0, 0)$, $q = (-3, 5)$ d) $p = (4, 9)$, $q = (4, 0)$

e) $p = (a, 2)$, $q = (1-a, 0)$ f) $p = (2, 0)$, $q = (2, 0)$

2. a) Voici un point variable p de coordonnées $(2t - 5, 7t - 9)$. Quelle est la trajectoire (ou le lieu) de p lorsque t varie ?

b) Même question si $p = (at + b, ct + d)$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

c) Nous venons de rencontrer ce qu'on appelle des équations paramétriques d'une droite . Pouvez - vous trouver des équations paramétriques pour la droite passant par (1, 2) et (3, 4) ?

3. Soit p le point $(-2, 5)$, D une droite par p et a, b les points d'intersection de D avec les axes ox et oy (si ces points existent) . Soit m le milieu de $[a, b]$. Quelle est la trajectoire (ou le lieu) de m lorsque D varie ?

4. a) Voici une droite D dont l'équation dépend du paramètre m . Dessiner plusieurs positions de D sur un même graphique et essayez de visualiser "l'enveloppe" de ces droites : $y - m^2 = 2m(x - m)$.

b) Même question pour $y - \sin m = \cos m \cdot (x - m)$

c) Même question pour $y - 5 = m(x - 3)$

POLYNOMES LINEAIRES DE PLUSIEURS VARIABLES .

Un gros défaut de l'exposé précédent est la présence lancinante de deux types d'équations de droites :

$$y = ax + b \qquad \text{et} \qquad x = c$$

En outre, la dissymétrie des rôles de x et y dans ces équations est un inconvénient supplémentaire. On y remédie en écrivant d'abord

$$ax - y + b = 0 \qquad \text{et} \qquad x - c = 0$$

et en passant à une forme plus générale, unifiant ces deux types d'équations, à savoir $\boxed{ax + by + c = 0}$ (2)

qu'on appelle <u>équation linéaire</u> ou <u>équation du premier degré à deux variables</u>. On y associe également le <u>polynôme du premier degré à deux variables</u> $ax + by + c$

Voici des exemples, parfois surprenants :

$$3x + 5y - 6 \qquad\qquad 2x - 0y + 5 = 2x + 5$$

$$-x + 7y - 3 \qquad\qquad 0x + 0y + 9 = 9$$

Nous imaginons volontiers une machine construisant des polynômes du premier degré en trois variables

$$ax + by + cz + d$$

ou de n variables

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n + a_{n+1}$$

A l'aide de ces polynômes nous construisons des équations et des inéquations du premier degré comme

$$ax + by + c = 0$$

$$ax + by + cz + d < 0$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5 \geqslant 0$$

Facile mais à quoi bon ? L'équation dont nous sommes partis a une interprétation géométrique familière. Peut-on en espérer autant pour les généralisations abordées ?

<u>EXERCICES</u>. 5. Représenter graphiquement dans $\mathbb{R}^2$

a) $2x - y + 5 = 0$
b) $-x - y + 7 = 0$
c) $2x - 3y - 9 = 0$
d) $6x - 2y + 5 = 0$
e) $2x - y + 5 > 0$
f) $-x - y + 7 \leqslant 0$
g) $2x - 3y - 9 \geqslant 0$
h) $6x - 2y + 5 < 0$
i) $2x - y - 5 = 0$
j) $x + 2y - 3 = 0$
k) $43(x-y) + 22(2y-x+1) = 21$
l) $0,9(x + y) \leqslant 3$

6. Représenter sur un même graphique pour k = -2, -1, 0, 1, 2, 3

a) $x + y + k = 0$
b) $3x - 2y + k = 0$
c) $-2x + 5y - k = 0$
d) $x + y + k \geqslant 0$
e) $(x + y - 1)(2x - y + k) = 0$
f) $xy\,(2x + y + k) = 0$

7. Etant donné une fonction f de deux variables

$$(x,y) \longrightarrow f(x,y)$$

la <u>courbe de niveau</u> de f, de niveau c, est l'ensemble des points du plan coordonné $\mathbb{R}^2$ tels que $f(x,y) = c$

Représenter sur un même graphique quelques courbles de niveau de

a) $(x,y) \longrightarrow x + y$ b) $(x,y) \longrightarrow 3x - 2y + 1$ c) $(x,y) \longrightarrow -2x + 5y$

Comparer à l'exercice 6.

LE CONTROLE DE LA SITUATION .

Partons de l'équation linéaire $ax + by + c = 0$ (3) $a, b, c \in \mathbb{R}$ à représenter graphiquement dans $\mathbb{R}^2$. Après les exercices qu'on vient de faire, la classe pense qu'on obtient toujours une droite . Gare aux surprises . Comment passer de (3) à une situation familière ? Bien sûr, en séparant les variables x et y . Ceci livre

$$ax + by + c = 0 \Leftrightarrow by + ax + c - ax - c = - ax - c$$
$$\Leftrightarrow by = - ax - c$$

Et ensuite ? La classe pense qu'on divise les deux membres par b . Est-ce toujours possible ? Non . Il faut éviter le cas où $b = 0$. Nous examinerons donc deux cas .

1er cas $b \neq 0$. Alors $ax + by + c = 0 \Leftrightarrow by = - ax - c$
$\Leftrightarrow b^{-1}(by) = b^{-1}(- ax - c) \Leftrightarrow y = -b^{-1}ax - b^{-1}c$
et nous trouvons évidemment une droite .

2e cas $b = 0$. Alors $ax + by + c = 0 \Leftrightarrow ax + c = 0$
et nous retrouvons une équation bien connue :

- si $a \neq 0$, l'équation est équivalente à $x = a^{-1}c$
  qui représente une droite du plan, parallèle à l'axe des y
- si $a = 0$, l'équation est équivalente à $c = 0$
  ce qui livre soit la partie vide (si $c \neq 0$), soit le plan tout entier (si $c = 0$) .

En résumé :

L'ensemble des points (x,y) du plan coordonné $\mathbb{R}^2$ tels que
$ax + by + c = 0$ est
1) une droite si l'un des coefficients a,b est non nul .
2) vide si $a = b = 0$ et $c \neq 0$
3) $\mathbb{R}^2$ si $a = b = c = 0$

Toute droite a-t-elle une équation pareille ? Oui, toute droite a une équation $y = ax + b$ ou $x = c$ ce qui donne
$ax - y + b = 0$ ou $x - c = 0$
A noter qu'une même droite admet plusieurs équations à présent : ainsi $2x + 3y - 1 = 0$ et $4x + 6y - 2 = 0$ représentent évidemment la même droite .

EXERCICES . 8. Trouver un moyen rapide de dessiner une droite d'équation $ax + by + c = 0$ en recherchant les intersections avec les axes

a) $3x + 2y - 5 = 0$ b) $x + y - 7 = 0$ c) $x - 2y + 3 = 0$

9. Montrer que les équations $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ représentent la même droite si et seulement si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

(ou plutôt s'il existe un réel r tel que $a' = ra$, $b' = rb$, $c' = rc$)

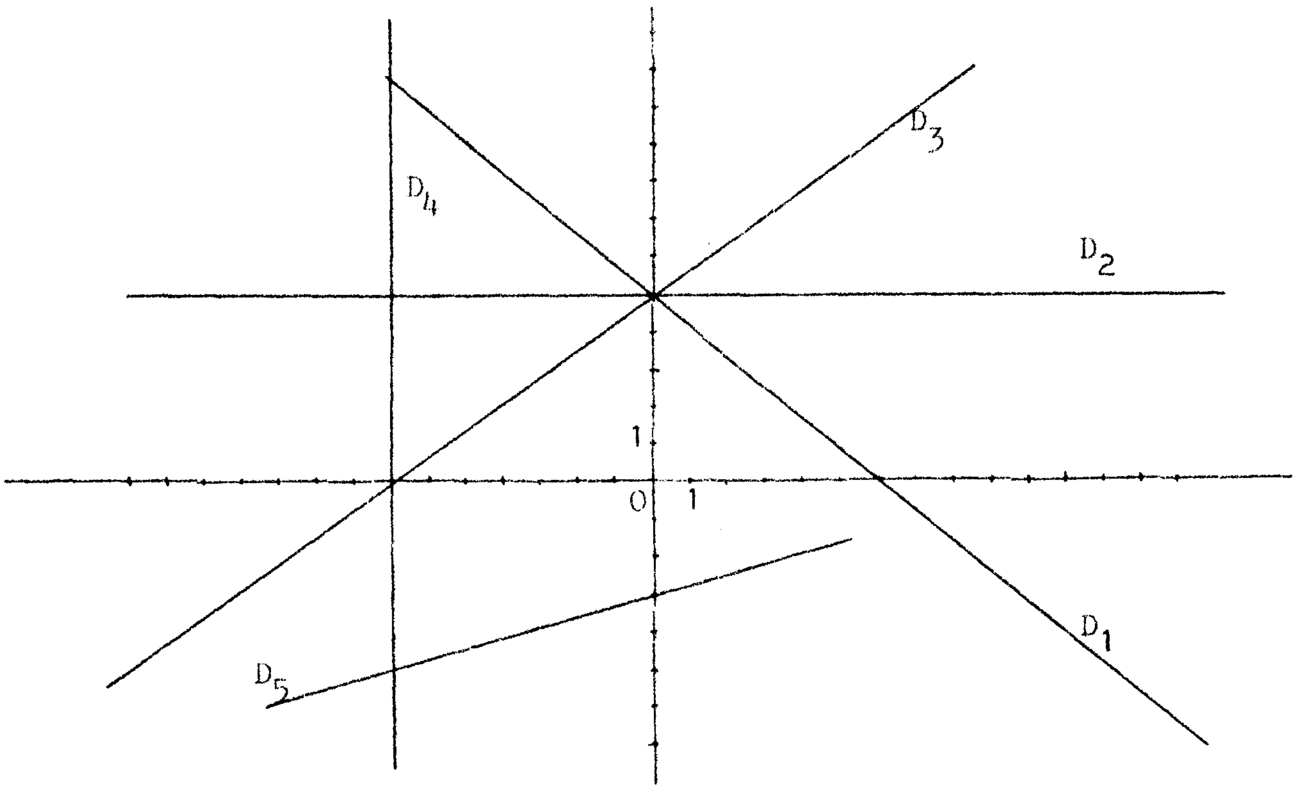
10. Démontrer le

Théorème . Les équations linéaires $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ représentent des droites parallèles si et seulement si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ (ou plutôt s'il existe un réel r tel que $a' = ra$, $b' = rb$)

11. Si a, b, c sont non nuls, montrer que $ax + by + c = 0$ est équivalente à une équation de la forme $\boxed{\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1}$
et que la droite correspondante coupe les axes en $(A, 0)$ et $(0, B)$.

12. Si $A \neq 0 \neq B$, quelle est l'équation de la droite passant par les points $(A, 0)$ et $(0, B)$?

13. Trouver rapidement des équations aux droites dessinées ci-dessous .



14. Quel est l'ensemble des points du plan coordonné $\mathbb{R}^2$ vérifiant une inéquation $ax + by + c > 0$?

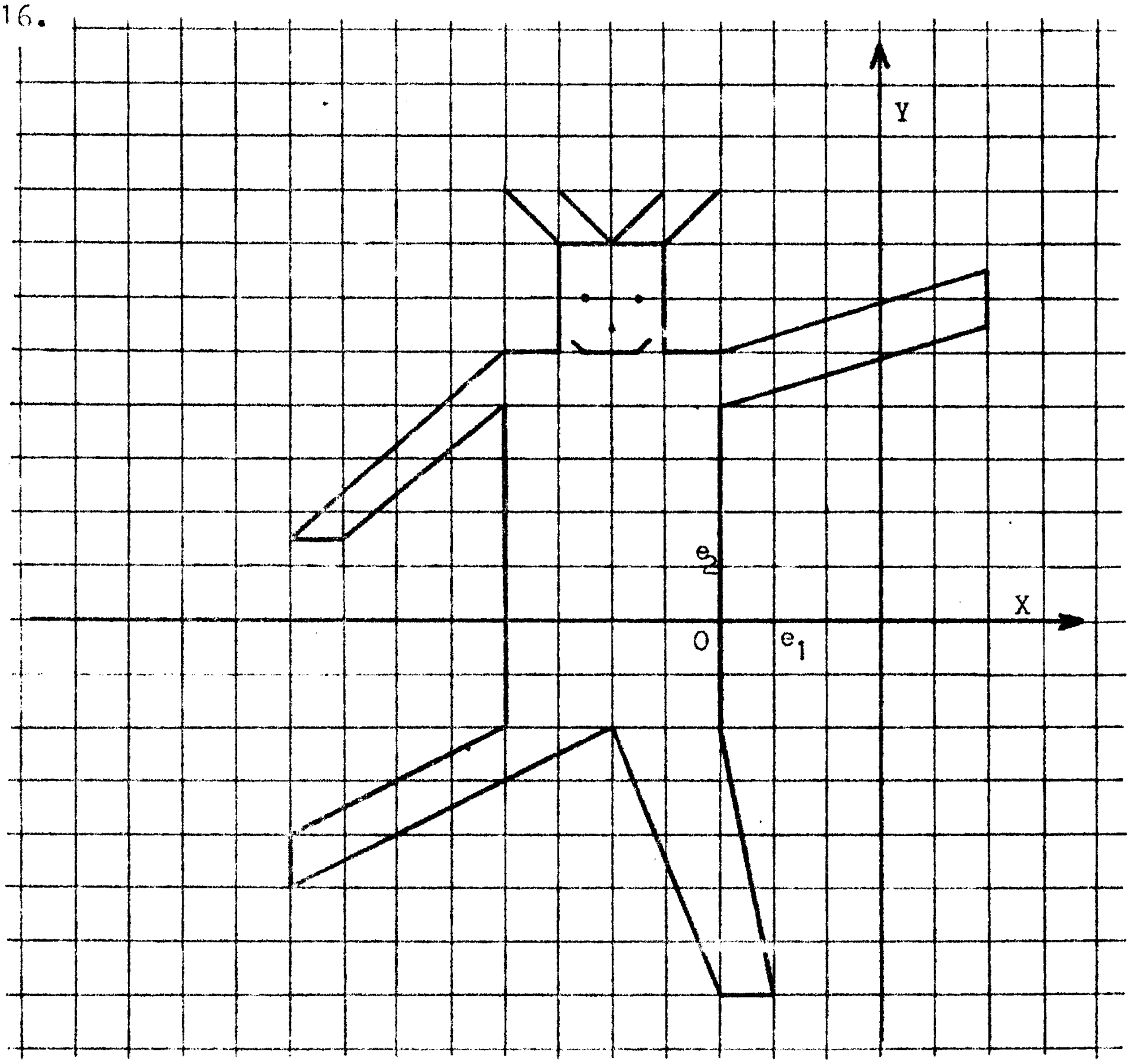
15. Voici un repère orthonormé du plan et deux droites d'équations

$ax + by + c = 0$ $\qquad a'x + b'y + c' = 0$

Montrer que ces droites sont orthogonales si et seulement si

$aa' + bb' = 0$

16.



Trouver les équations de chaque droite utilisée pour dessiner Monsieur Matocalculs (Et ce de la manière la plus simple !) .

17. Montrer que l'équation générale des droites passant par un point (x_o, y_o) est de la forme

$$\boxed{a(x - x_o) + b(y - y_o) = 0}$$

où a, b sont des réels non simultanément nuls (a et b sont des paramètres ou des coordonnées de droites) .

18. Les droites d'équation $(1 + m)x - (3 - 5m)y + 1 = 0$ ont-elles un point commun ?

Et $ax + by + cz + d = 0$?

Bien que cette équation ne soit pas au programme, une petite incursion à trois dimensions, ne nous fera pas de tort, afin de situer la matière précédente dans un contexte plus large .

Commençons par un exemple . Que dire de l'équation

$$3x - 2y - 5z + 11 = 0 \qquad (4) \quad ?$$

Sur le modèle de la section précédente, nous exprimons une des variables en fonction des deux autres, par exemple

$$z = \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}y + \frac{11}{5} \qquad (5)$$

Ici, nous sommes bloqués . Dans la section précédente, nous obtenions une droite . Que faire à présent ? Nous disposons d'une fonction de deux variables et une technique éprouvée consiste à examiner les lignes de niveau de cette fonction :

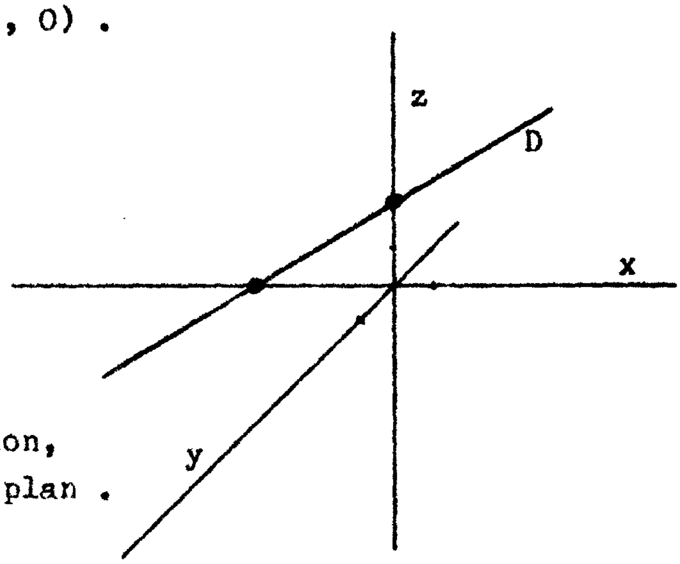
$$\frac{3}{5}x - \frac{2}{5}y + \frac{11}{5} = k \qquad \text{où} \quad k \in \mathbb{R}$$

ou encore $\quad y = \frac{3}{2}x + \frac{11 - 5k}{2} \qquad (6)$

Ces lignes de niveau sont des droites parallèles .

En revenant à (5), nous voyons que pour $y = 0$, l'équation se réduit à $\; z = \frac{3}{5}x + \frac{11}{5} \qquad (7)$

ce qui livre une droite D de l'espace $\mathbb{R}^3$, s'appuyant sur les axes ox, oz en $(0, 0, \frac{11}{5})$ et $(-\frac{11}{3}, 0, 0)$.



Dès lors, le graphique de (5), dans l'espace $\mathbb{R}^3$, est constitué par la réunion d'une famille de droites parallèles horizontales (les courbes de niveau) s'appuyant sur la droite D : pour k donné, la courbe de niveau k, recoupe D en $(-\frac{11 - 5k}{3}, 0, k)$. En conclusion, (5) et (4) sont l'équation d'un plan .

Le même raisonnement montre que

$$ax + by + cz + d = 0$$

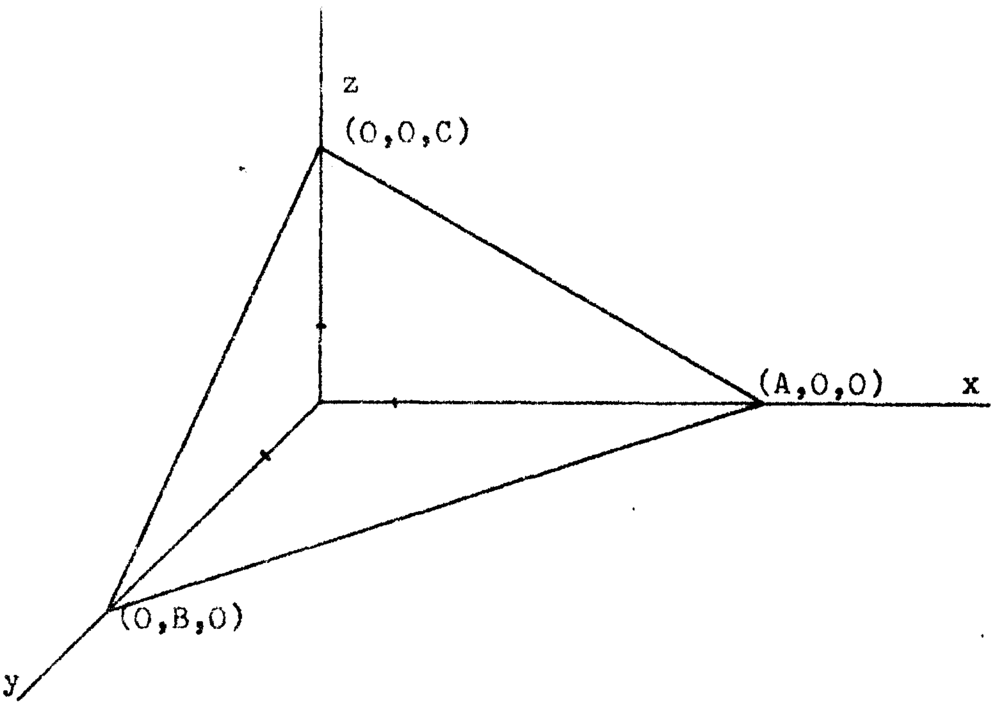
est l'équation d'un plan de l'espace $\mathbb{R}^3$, dès que l'un des coefficients est non nul .

En outre $\; z = mx + py + q \;$ représente toujours un plan .

On pourrait reprendre ici l'étude de l'équation générale des plans passant par un point, par deux points ou par trois points . Bornons-nous à signaler qu'un plan recoupant les axes en trois points distincts (A, 0, 0), (0, B, 0) (0, 0, C) possède une équation

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1$$

Ce plan se représente en perspective cavalière par un dessin que voici . Nous nous exercerons à faire des dessins analogues pour des plans passant par un axe ou par l'origine seule .



EXERCICES . 19. Voici un cube dont un sommet est l'origine et dont les trois sommets voisins de l'origine sont les vecteurs unités

a) Quelles sont les coordonnées des autres sommets ?

b) Ecrire les équations des faces et des plans diagonaux .

c) Traiter la même question en plaçant l'origine au centre du cube et les vecteurs unités aux centres des faces .

20. Dessiner les plans suivants en perspective cavalière :

a) $3x + 2y - z - 3 = 0$

b) $5x - 7y + 2z - 4 = 0$

c) $2x - 5y + 1 = 0$

d) $x + y - z = 0$

21. Déterminer l'intersection des plans suivants sur une perspective cavalière $\begin{cases} 2x + 3y - z + 4 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$

Utiliser les droites d'intersection de ces plans avec un plan par les axes, pour trouver un point de leur droite d'intersection .

DEMI - PLANS ET INEQUATIONS LINEAIRES .

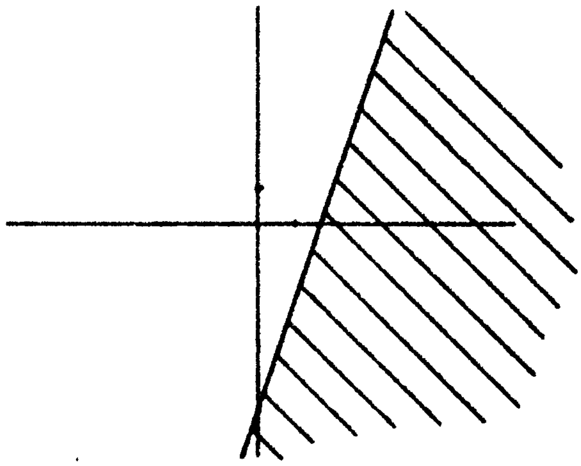
Que peut-on dire des solutions de l'inéquation $3x - y > 5$ (8)

Elle se ramène à $3x - 5 > y$ (9)

Si on représente graphiquement $y = 3x - 5$ on obtient une droite D et (9) montre qu'on veut les points pour lesquels $y < 3x - 5$ donc les points situés en dessous de cette droite D .

L'ensemble des solutions de (8) est le <u>demi-plan ouvert</u> hachuré sur le dessin . "Ouvert" signifie que la droite D elle-même n'en fait pas partie (ce qu'on ne voit pas sur notre dessin) .

Pour l'inéquation $3x - y \geqslant 5$ on obtiendrait le <u>demi-plan fermé</u> hachuré sur le dessin .



<u>EXERCICES</u> . 22. Représenter graphiquement l'ensemble des solutions des inéquations et systèmes d'inéquations suivants :

a) $3x - y \leqslant 5$ b) $2x + 3y - 6 \geqslant 0$

c) $4(3x - 5y + 7) - 9(6x + y - 5) \geqslant 10x - y$ d) $4x \geqslant 0$

e) $\begin{cases} x + y - 1 > 0 \\ 4x - y \leqslant 9 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x + y - 3 < 0 \\ y \geqslant 0 \\ x - y + 4 \leqslant 0 \end{cases}$

23. a) Montrer que toute inéquation $ax + by + c \geqslant 0$ (10) représente un demi-plan fermé si $(a, b) \neq (0, 0)$ et que toute inéquation $ax + by + c > 0$ (11) représente un demi-plan ouvert dans les mêmes conditions .

b) Qu'arrive-t-il si $(a, b) = (0, 0)$?

c) Que peut-on dire de l'ensemble des solutions d'un système d'inéquations telles que (10) et (11) ?

24. Représenter graphiquement les solutions de

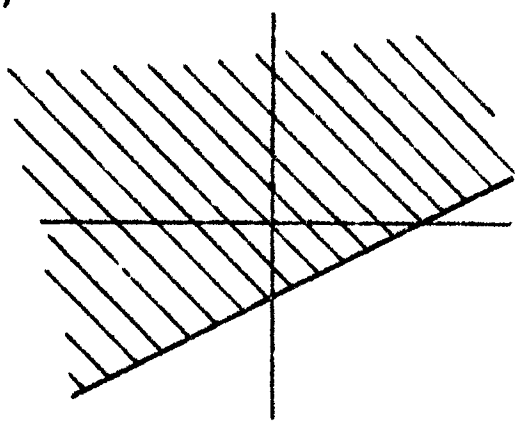
a) $xy > 0$ b) $(x + 1)(x - y) \leqslant 0$

c) $(x + y - 1)(2x - y + 3) \geqslant 0$ d) $xy(x + y - 1)(3x - y + 5) < 0$

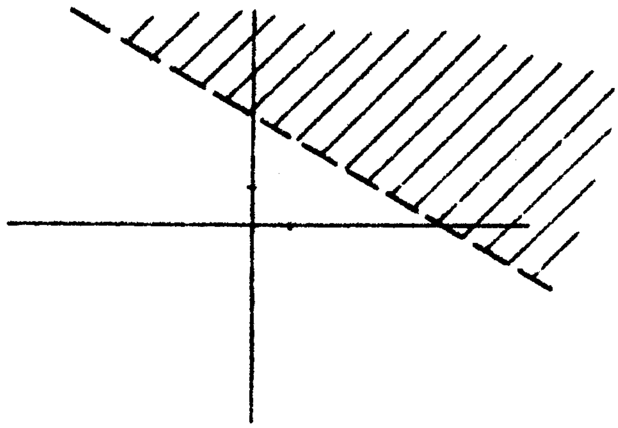
25. Voici des dessins de demi-plans fermés ou ouverts (droite en pointillé si le demi-plan est ouvert)

Trouver rapidement une inéquation qui représente ces demi-plans .

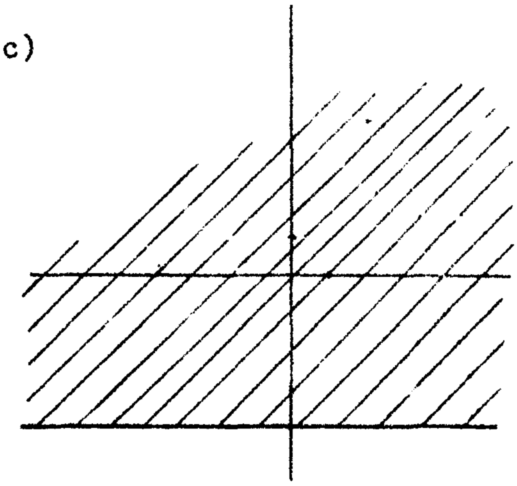
a)



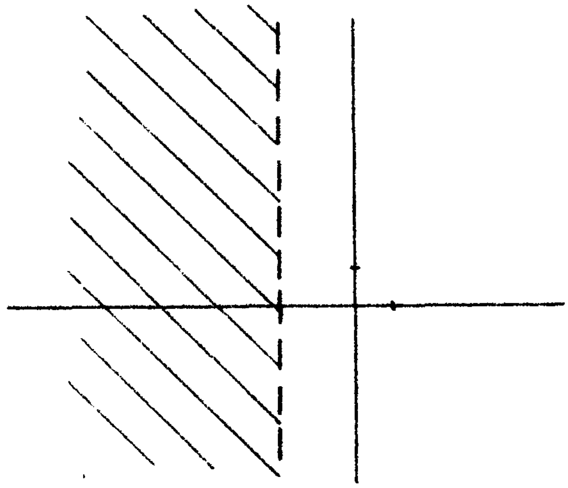
b)



c)

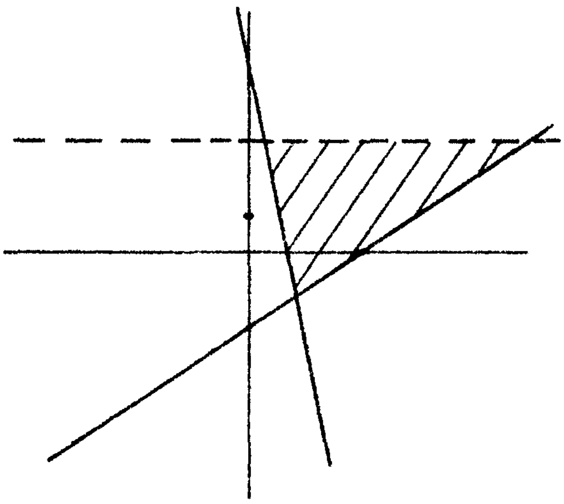


d)

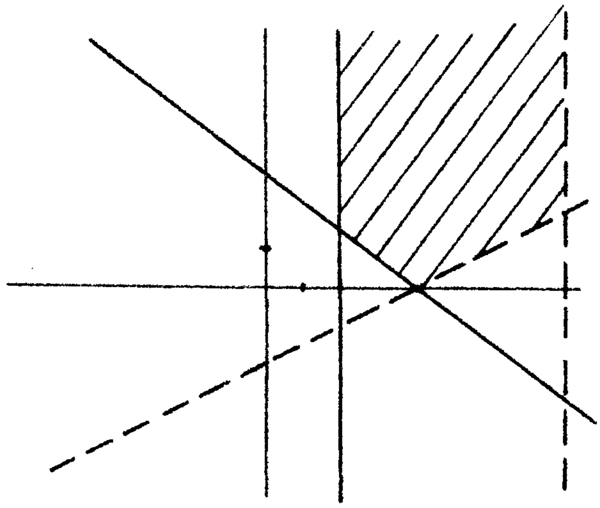


26. Voici le dessin d'une partie du plan (hachurée) dont la frontière est constituée de parties de droites qui font partie (trait plein) ou non (trait interrompu) de cette partie . Donner un système d' inéquations dont l'ensemble des solutions est cette partie .

a)



b)

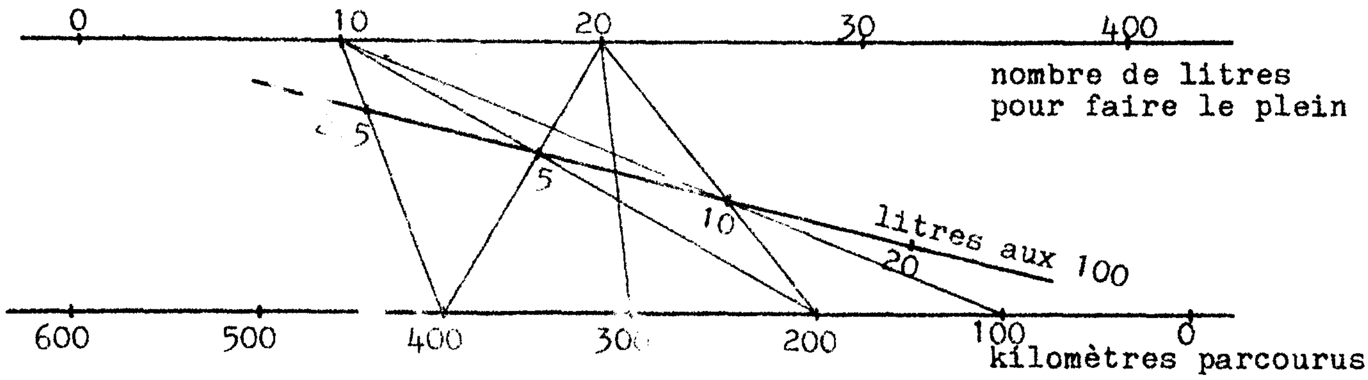


27. Interpréter géométriquement : $x + y - z + 1 \geqslant 0$

POUR FAIRE DES ECONOMIES

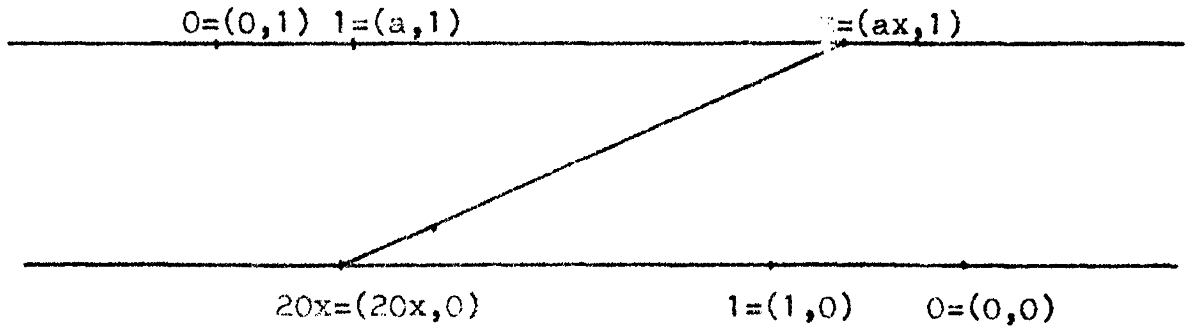
Aux Etats-Unis, un célèbre éditeur de cartes routières offre un petit moyen graphique qui permet de déterminer facilement la consommation d'essence en litres par 100 kilomètres (aux Etats-Unis, on la calcule plutôt en miles par gallon) connaissant le nombre de kilomètres parcourus et le nombre de litres consommés . Pour ceux qui ne connaissent pas la règle de trois ou dont le tableau de bord ne comprend pas une calculatrice : voici, sur cette idée, un petit appareil .

Pour déterminer la consommation on note sur la première droite horizontale, le point a correspondant au nombre de litres du plein effectué, sur la deuxième droite horizontale, le point b



correspondant au nombre de kilomètres parcourus depuis le plein précédent, on joint a par une droite qui recoupe la droite oblique en un point p et l'échelle notée sur celle-ci permet de lire la consommation . Attention , cette dernière échelle n'est pas une graduation régulière comme nous en avons l'habitude . Ainsi la distance de 2,5 à 5 est égale à celle de 5 à 10 et celle de 10 à 20 . Comment est-ce possible ? Est-ce vraiment possible ? Prenons une même consommation, par exemple 5l/100 . Si x représente le nombre de litres de plein, la distance parcourue (en kilomètres) est $\frac{x}{5}\cdot 100 = 20x$. Quel que soit x, la droite joignant x et 20x devrait passer par un même point .

Voyons ceci . Choisissons un repère et travaillons avec des équations .



La droite reliant les deux points x et 20x a une équation

$$(ax - 20x)Y = X - 20x \quad \text{ou} \quad x(aY - 20Y + 20) = X$$

Lorsque x varie, cette droite passe constamment par le point $(0, \frac{20}{20-a})$

Si nous remplaçons une consommation de 5l/100 par bl/100,

on trouve le point $\left(0, \dfrac{\frac{100}{b}}{\frac{100}{b} - a}\right) = \left(0, \dfrac{100}{100 - ab}\right)$

Donc tout va bien et la droite représentant les consommations n'est autre que X = 0 qui relie les deux origines choisies .

EXERCICES RECAPITULATIFS .

28. Sachant que la droite passant par les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2)

est constituée par les points (x, y) tels que

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \text{ (équations paramétriques)}$$

Déterminer les droites D et les points p ci-dessous :

a) D par $(3, -1)$ et $(2, 2)$

b) $p = ab \cap cd$ si $a = (1, -2)$, $b = (2, 1)$, $c = (1, 9)$, $d = (0, 5)$

c) D par $(1, -2)$ et parallèle à $2x + 3y + 5 = 0$

d) D par $(1, 4)$ et parallèle au vecteur $(2, 7)$

e) D par $(1, 1)$ et $(2, 2)$ sans faire de calculs

f) D par $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ et $(2, 4)$ sans faire de calculs

g) D par $(5, 6)$ et $(5, 7)$

h) D par $(2, 4)$ et parallèle à la droite par $(0, 3)$ et $(1, 6)$

i) D par $(0, 3)$ et parallèle à l'axe des x

j) $p = D_1 \cap D_2$ où D_1 est donnée par $-2x + 2y + 3 = 0$ et D_2 par $2x - 4y + k = 0$, $k \in \mathbb{R}$

29. Sachant que la droite passant par les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) possède une équation $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ si elle n'est pas parallèle aux axes,

déterminer la droite D ou le point p ci-dessous :

a) $p = D_1 \cap D_2$ où $D_1 : 2x - 3y + 6 = 0$, $D_2 : x + 5y - 10 = 0$

b) D par $(3, 0)$ et de coefficient angulaire ou pente $-2/3$

c) D par $(0, 0)$ et parallèle à la droite obtenue en b)

d) D parallèle à ox, qui coupe la droite obtenue en b) en un point de oy

e) D par $(0, 0)$ et parallèle à la droite obtenue en d)

f) D par les points d'intérsection des droites b)e) et des droites c)d)

g) D de pente $-4/3$ qui coupe oy et ox en déterminant un triangle d'aire 24 .

h) D par $(1, 5)$ et parallèle à la droite d'équations paramétriques $x = 2t + 3$, $y = 3t + 7$.

30. Dans un repère orthonormé, on considère les points $a(0, 3)$, $b(-1, 0)$ $c(2, 0)$. Sur ab on détermine p et sur ac on détermine q de telle manière que l'origine o soit le milieu du segment [pq] . Calculer les coordonnées de p et de q .

31. L'intersection des médianes d'un triangle est appelée <u>centre de gravité</u> du triangle . Trouver le centre de gravité du triangle abc si $a = (1, 0)$, $b = (-2, 3)$, $c = (-4, 1)$

32. Dans un plan muni d'un repère, on donne $a = (1, 2)$ et $b = (4, -2)$.

On appelle p et q respectivement, les points d'intersection de la droite ab avec l'axe ox et l'axe oy. Par p on mène une parallèle R à l'axe oy et par q une parallèle S à l'axe ox. Quelles sont les coordonnées du point $r = R \cap S$ et les coordonnées du centre du quadrilatère oqrp ?

33. Dans un repère orthonormé, quelle est l'équation de la droite D si

a) D passe par (1, 4) et est perpendiculaire à $y = 2x + 3$

b) D passe par (5, 7) et est perpendiculaire à $2x + 3y - 7 = 0$

c) D passe par (1, 2) et est perpendiculaire à $x = 3$

d) D passe par (5, 7) et est perpendiculaire à $y = 6$.

34. Quelle est l'équation de la médiatrice du segment [a,b] si

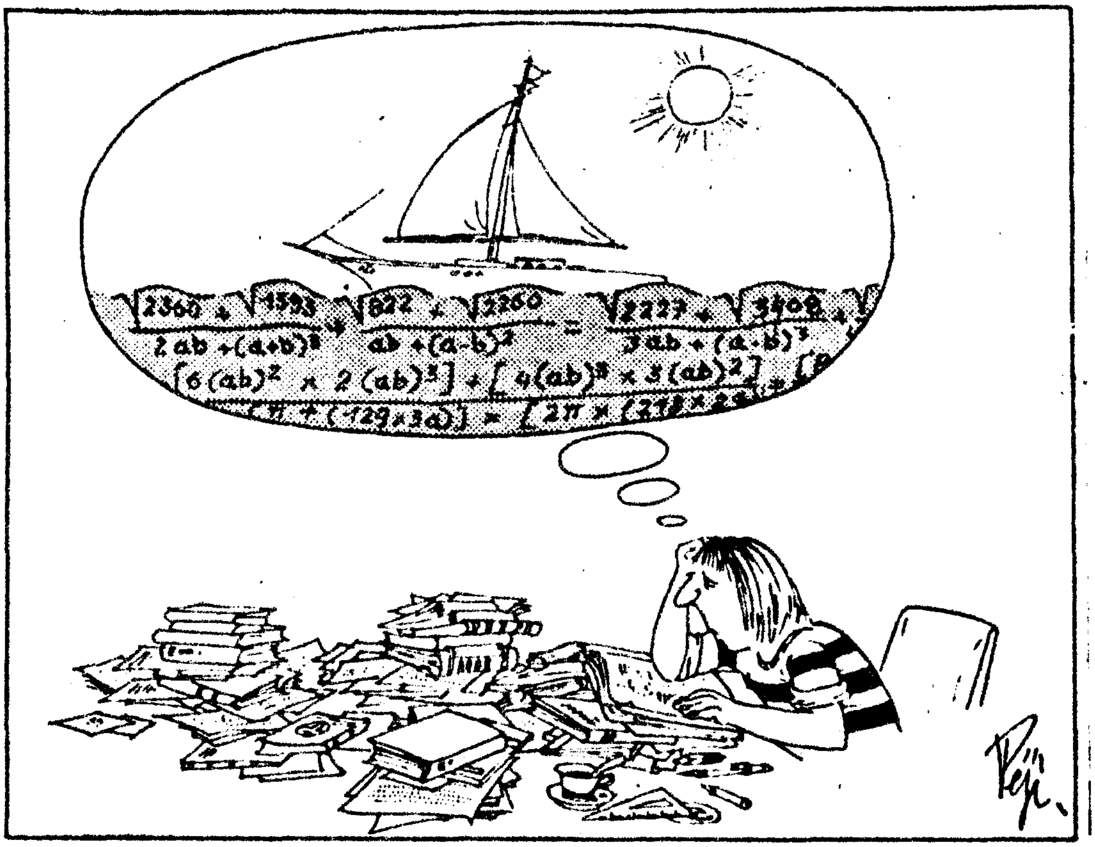
a) a = (5, 7), b = (12, -3)

b) a = (1, 2), b = (1, 6) .

35. Dans un repère orthonormé, soit C le cercle d'équation

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

Quelles sont les équations des tangentes à C formant un angle de 60° avec l'axe ox ?



RESUME

Equation générale d'une droite dans E^2.

$$ax + by + c = 0 \qquad \begin{cases} a, b, c \in \mathbb{R} \\ (a, b) \neq (0, 0) \end{cases}$$

Cas particuliers :

a) $x = a$ droite parallèle à oy et passant par $(a, 0)$

b) $y = b$ droite parallèle à ox et passant par $(0, b)$

c) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ droite passant par les points $(a, 0)$ et $(0, b)$ si $a \neq 0 \neq b$

d) $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ droite passant par les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2)

e) $y = ax + b$ droite de coefficient angulaire a et d'ordonnée à l'origine

Droites parallèles.

$D_1 : ax + by + c = 0$

$D_2 : a'x + b'y + c' = 0$ $\qquad D_1 /\!/ D_2 \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$

(attention au cas où un dénominateur est nul)

Equation générale d'un plan dans E^3.

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad \begin{cases} a, b, c, d \in \mathbb{R} \\ (a, b, c) \neq (0, 0, 0) \end{cases}$$

Cas particuliers :

a) $x = a$ plan parallèle au plan (oy, oz)

b) $y = b$ plan parallèle au plan (ox, oz)

c) $z = c$ plan parallèle au plan (ox, oy)

d) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ plan passant par les points $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ $(0, 0, c)$ et $a, b, c \in \mathbb{R}_0$

Equation générale d'un demi-plan dans E^2.

a) $ax + by + c > 0$: demi-plan ouvert $\qquad (a, b) \neq (0, 0)$

b) $ax + by + c \geqslant 0$: demi-plan fermé