## 7. TRIGONOMETRIE . TECHNIQUES DE CALCUL . 4h/s 6h/s

Supposé acquis . Premier contact avec les fonctions trigonométriques (chapitre 2) . Produit scalaire (chapitre 4)

Objectifs . Acquisition des formules d'addition et des formules associées . Nouvelle étude du triangle et de fonctions variées .

### CONSTRUIRE UNE TABLE DE VALEURS TRIGONOMETRIQUES .

Nous avons pu vérifier la puissance des fonctions trigonométriques sinus, cosinus et tangente dans la résolution de problèmes de mesure délicats . En pratique, l'usage de ces fonctions exige une calculatrice fournissant par exemple sin 27°, cos 50°, etc... ou une table de telles valeurs . Il n'est pas mauvais de se demander comment on a pu construire des tables pareilles . Comment firent les grands astronomes de l'Antiquité comme Hipparque (2e siècle avant J.C.) et Ptolémée (2e siècle après J.C.) ? Nous n'examinerons pas leurs méthodes en détail mais nous en donnerons les principales idées .

Supposons qu'on parte de la connaissance de sin 30° $= \frac{1}{2}$ qu'on démontre sans difficulté, comme nous l'avons vu . Peut-on en déduire la valeur de sin 15° ? La classe est tentée par $\frac{1}{4}$ . C'est l'habitude des proportionnalités qui conduit à cette réponse .
Nous rappelons que sin 60° $= \sqrt{3}/2$ n'est pas le double de sin 30° et que sin 90° = 1 n'est pas le double de sin 45° $= \sqrt{2}/2$ .
Et pourtant sin 15° peut être déterminé, à partir de sin 30° .
En fait, les Anciens découvrirent la relation entre un angle $\alpha$ et sa moitié $\alpha/2$ :

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \qquad (1)$$

Nous verrons un peu plus loin comment se démontre cette formule .
Essayons d'en comprendre l'usage pour la réalisation d'une table .
Posons $x = \sin 15°$ . Alors (1) montre que $2x\sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{2}$

donc $x^2(1 - x^2) = \frac{1}{16}$ ou $x^4 - x^2 - \frac{1}{16} = 0$

L'équation obtenue n'est peut-être pas encore très facile à résoudre mais nous en percerons bientôt le secret .
On conçoit que cette méthode de divisions successives d'un angle donné permette de calculer la valeur de sinus et cosinus pour un angle assez petit, proche de 1° par exemple . A partir de là, une autre formule remarquable découverte dès l'Antiquité, permet de calculer les valeurs des fonctions trigonométriques pour des angles plus grands, de manière très simple .
Cette formule est

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad (2)$$

et on a de même

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$$

Ainsi $\cos 2° = \cos^2 1° - \sin^2 1°$

$\cos 3° = \cos 2° \cos 1° - \sin 2° \sin 1°$

On peut même obtenir cos 15° par un moyen plus simple que (1) :

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30°$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1) \approx \frac{1,4 \times 2,7}{4} \approx 0,945$$

(la valeur exacte est plutôt 0,965 car nous avons arrondi chaque nombre à la première décimale !)

Dès lors $\sin 15° = \sqrt{1 - \cos^2 15°} \approx \sqrt{0,055} \approx 0,23$ (la valeur correcte est 0,25) .

Ptolémée calcula les valeurs pour 36°, puis 72° grâce à (1), puis pour 12° = 72° - 60° par (3) et par des techniques analogues, il parvint à maîtriser (3/4)° et (1/2)° . Ensuite (2) et (3) permirent le calcul pour tout entier et toute moitié d'entier .

---

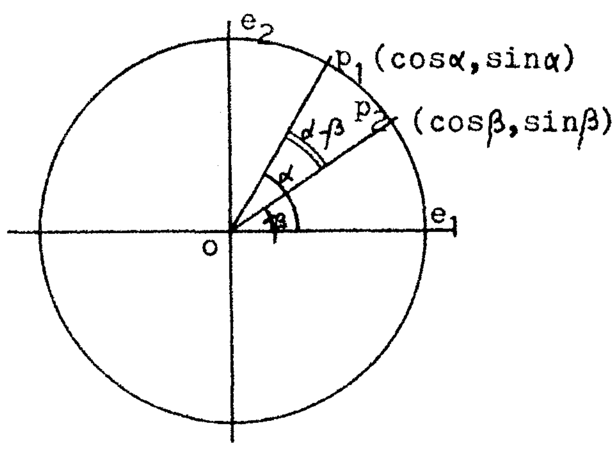
EXERCICES . 1. On donne $\sin 1° \approx 0,017452$ et $\cos 1° \approx 0,999847$ . Calculer à la main, une approximation de sin 2°, sin 3°, sin 4° sin 5°, cos 2°, cos 3°, tg 1°, tg 2°, tg 3° et comparer ces approximations à celles que fournit une table ou une calculatrice .

2. Rechercher dans une table de valeurs numériques sin 72° et cos 72°
a) Arrondir au centième près (par défaut) et utiliser ces valeurs pour calculer à la main des approximations de sin 12° et cos 12°
b) Vérifier si $\sin^2 12° + \cos^2 12° = 1$ d'après a) .

---

FORMULES D'ADDITION .

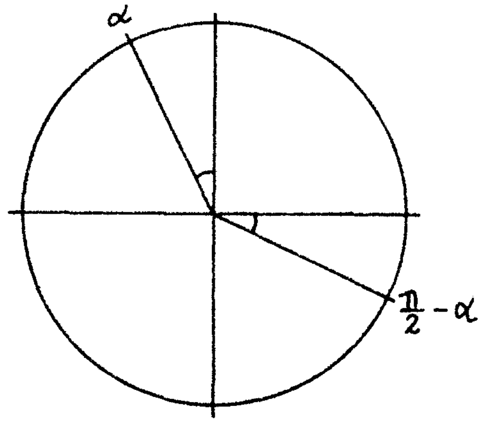
Comment peut-on établir des formules telles que (2) et (3) rencontrées ci-dessus . Avouons qu'elles sont un peu étonnantes . De nos jours, la stratégie est simple . Une de ces formules découle du produit scalaire inconnu des Anciens . Les autres formules se dérivent de la précédente . Voici comment .




Considérons dans le plan, un cercle C de centre o et de rayon unité passant par les points $e_1$, $e_2$ d'un repère orthonormé . L'angle $\alpha$ détermine un point $p_1$ de C, de coordonnées $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ et l'angle $\beta$ détermine

$p_2 = (\cos\beta, \sin\beta)$ .

Le produit scalaire $\overrightarrow{op_1}\cdot\overrightarrow{op_2}$ s'exprime de deux manières . D'une part, il est égal au produit des longueurs de ces vecteurs c'est à dire 1 et du cosinus de leur angle, soit $\cos(\alpha-\beta)$ .




D'autre part, il est égal au produit des abscisses de $p_1, p_2$ auquel on ajoute le produit de leurs ordonnées . Donc

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \qquad (1)$$

D'autre part, il est clair, pour des raisons de symétrie , que

$$\cos(-\beta) = \cos\beta \quad \text{et} \quad \sin(-\beta) = -\sin\beta \qquad (2)$$

Par (1) et (2), on obtient

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)\\ &= \cos\alpha\cos \quad - \sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

donc $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ (3)

Comment passer à $\sin(\alpha+\beta)$ ?

On observe (par une rotation de 90° centrée en o) que

$$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha) \qquad (4)$$
$$\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$$

et de ce fait,

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \cos(90^\circ - (\alpha+\beta)) = \cos((90^\circ-\alpha)-\beta)\\ &= \cos(90^\circ-\alpha)\cos\beta + \sin(90^\circ-\alpha)\sin\beta\\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

et $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta)$

$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

donc

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\end{aligned} \qquad (5)$$

---

EXERCICES . 3. Démontrer

Convention : le signe à retenir est toujours le signe supérieur ou toujours le signe inférieur .

a) $\mathrm{tg}(a \quad b) = \dfrac{\mathrm{tg}\,a \pm \mathrm{tg}\,b}{1 \mp \mathrm{tg}\,a\,\mathrm{tg}\,b}$

b) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$

$\mathrm{tg}\,2a = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,a}{1-\mathrm{tg}^2 a}$

c) $\cos(\alpha \pm \pi) = \cos(\alpha \pm 180^\circ) = -\cos\alpha$

$\sin(\alpha \pm \pi) = \sin(\alpha \pm 180^\circ) = -\sin\alpha$

d) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

$\mathrm{tg}(\pi - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$

e) $\sin a = \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$ $\qquad$ $\cos a = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$

$\operatorname{tg} a = \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$

4. Démontrer

a) $\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$

b) $\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$

c) $\operatorname{tg} 3a = \dfrac{3 \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 a}$

d) $\dfrac{\operatorname{cotg}^2 a - 1}{\operatorname{cotg}^2 a + 1} = \cos 2a$

5. Montrer que les expressions suivantes sont indépendantes de t .

a) $\cos^2 t + \cos^2 (120° + t) + \cos^2 (120° - t)$

b) $\cos^2 t - 2 \cos t \cos a \cos (a + t) + \cos^2 (a + t)$

6. Résoudre les équations .

a) $\sin 2a = \dfrac{2}{\operatorname{tg} a + \operatorname{cotg} a}$

b) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 2a}{2 + \operatorname{tg}^2 2a} = \dfrac{2 \operatorname{tg}^2 a}{1 + \operatorname{tg}^4 a}$

c) $\sin 2x = \dfrac{1}{\operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg} 2x}$

d) $\dfrac{\cos 3x}{\cos x} = \cos 2x - \sin 2x \operatorname{tg} x$

7. Dans un triangle abc, démontrer que

a) $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c$

b) $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c = 1$

8. Si $a + b + c = \frac{\pi}{2}$ , démontrer que

$\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c + \operatorname{tg} c \operatorname{tg} a = 1$

---

FACTORISER .

Nous avons vu que la recherche des solutions d'une équation est souvent ramenée à une factorisation . Supposons que l'on doive résoudre $\cos 4x + \cos 6x = 0$ .

Comment faire ? Il serait facile de résoudre $\cos x = 0$ et $\cos 5x = 0$ . La première équation se ramène aux deux dernières, grâce aux formules de Simpson que nous abordons à présent .

Reprenons les formules d'addition

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

et additionnons-lés membres à membres, avant de les soustraire .
Nous obtenons

$$\begin{aligned} \cos(a+b) + \cos(a-b) &= 2 \cos a \cos b \\ \cos(a+b) - \cos(a-b) &= -2 \sin a \sin b \end{aligned} \qquad (1)$$

Si p et q sont des angles quelconques, posons

$$\begin{cases} a + b = p \\ a - b = q \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2a = p + q \\ 2b = p - q \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a = \frac{p+q}{2} \\ b = \frac{p-q}{2} \end{cases}$$

ce qui ramène (1) aux formules de Simpson :

$$\boxed{\begin{aligned} \cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \end{aligned}}$$

De même, les formules d'addition du sinus livrent

$$\boxed{\begin{aligned} \sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q &= 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} \end{aligned}}$$

---

<u>EXERCICES</u> . 9. Démontrer

a) $1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2}$ $\qquad$ $1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2}$

b) $\dfrac{\cos 2p - \cos 2q}{\sin 2p + \sin 2q} = \operatorname{tg}(q - p)$

c) $\operatorname{tg} 3x = \dfrac{\cos 2x - \cos 4x}{\sin 4x - \sin 2x}$

d) $\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x} = \dfrac{\sin x + 2 \sin 3x + \sin 5x}{\sin 3x + 2 \sin 5x + \sin 7x}$

e) $\sin(b+c-a) + \sin(c+a-b) + \sin(a+b-c) - \sin(a+b+c)$
$= 4 \sin a \sin b \sin c$

f) $\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a+b+c) = 4 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{b+c}{2} \sin \frac{c+a}{2}$

g) $(\sin x - \sin y)^2 + (\cos x - \cos y)^2 = 4 \sin^2 \frac{x-y}{2}$

10. Factoriser

a) $\cos 6a - \cos 4a - \cos 2a + 1$

b) $\sin a + \sin b + \sin(a + b)$

c) $\cos a + \cos b + \cos(a + b) + 1$

11. Simplifier $\cos^2(a + b) + \cos^2(a - b) - \cos 2a \cos 2b$

12. Dans un triangle a-t-on nécessairement

$\cos a + \cos b + \cos c = 1 + 4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}$ ?

13. Résoudre les équations

a) $\sin x = 0$

b) $\sin x = \frac{1}{2}$

c) $\sin y = -0{,}17$

d) $\cos x = 0$

e) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\operatorname{tg} x = 1$

g) $\sin 2x = 0$

h) $\sin 3t \cos t = 0$

i) $\sin 3t + \sin 5t = 0$

j) $\sin a = \sin b \Leftrightarrow$

k) $\cos a = \cos b \Leftrightarrow$

l) $\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} b \Leftrightarrow$

m) $\sin x = \sin y$

n) $\cos^2 x + \frac{3}{2} \cos x + \frac{1}{2} = 0$

o) $\cos (5x - 120°) = -\frac{1}{2}$

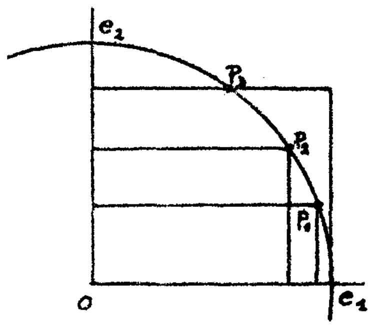
p) $\sin x = \sin 3x$

q) $\operatorname{tg} 2x = -\operatorname{cotg}(x - \frac{\pi}{4})$

r) $\sin x + \sin 3x = 2 \sin x$

s) $1 + \sin x \cos x = \cos^2 x$.

14. Voici trois rectangles $R_1$, $R_2$, $R_3$ dont un sommet est l'origine o, dont deux côtés sont sur les axes et dont les périmètres respectifs passent par $p_1$, $p_2$, $p_3$ de la manière indiquée sur le dessin. Si $\theta_i$ est l'angle $e_1\widehat{op_i}$, démontrer que

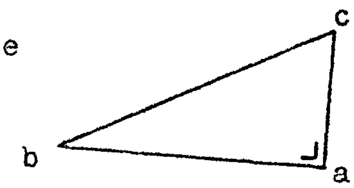



$$\theta_3 = \theta_1 + \theta_2 \Leftrightarrow \text{aire } R_3 = \text{aire } R_1 + \text{aire } R_2$$

---

RETOUR AUX TRIANGLES.

Nous rappelons que dans un triangle rectangle abc avec $\hat{a} = 90°$ on a

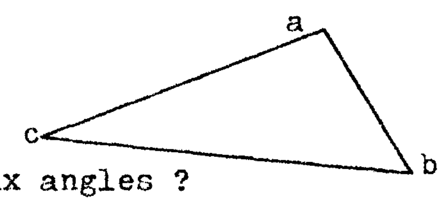



$\sin \hat{b} = \frac{ac}{bc}$ et $\cos \hat{b} = \frac{ab}{bc}$

et que dans un triangle quelconque abc

on a $(bc)^2 = (ab)^2 + (ac)^2 - 2\, ab \cdot ac \cdot \cos \hat{a}$

Cette relation qui généralise le théorème de Pythagore, permet de calculer un côté bc si on connait déjà deux côtés et un angle. Que faire si on connait un seul côté et deux angles ?

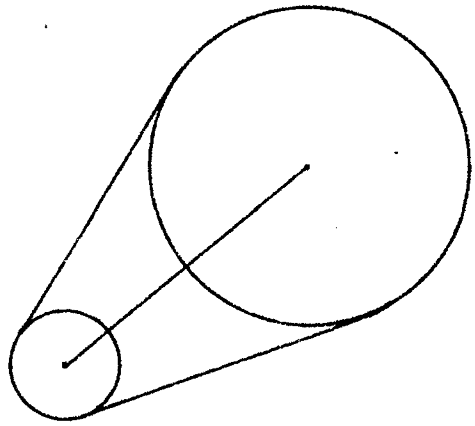



---

EXERCICES. 15. Deux points a et b sont situés de part et d'autre d'une rivière. A partir de a, on trace une ligne droite ac et on mesure ac = 275 m. Des mesures d'angles livrent $c\hat{a}b = 125° \, 40'$, $a\hat{c}b = 48° \, 50'$. Quelle est la distance de a à b ?
(attention : si vous utilisez une calculatrice en degrés d'angles, il convient de convertir les minutes en dixièmes et centièmes de degré).

16. Une tour de 125 m de haut est bâtie sur une falaise au bord d'une rivière . Du sommet de la tour, l'angle de dépression sous lequel on voit un point de la rive opposée est de 28° 40' . Du pied de la tour, l'angle de dépression du même point est de 18° 20' . Quelle est la largeur de la rivière et quelle est la hauteur de la falaise ?

17. En partant de p, un pilote d'avion parcourt 125 km dans la direction N 38° 20' W et ensuite il fait demi-tour . Il se trompe et effectue 125 km dans la direction S 51° 40' E . Quelle distance doit-il alors parcourir et dans quelle direction pour atteindre p ? (on suppose que la Terre est un plan) .

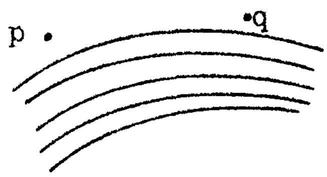


18. Trouver, au millimètre près, la longueur d'une courroie passant sur des poulies de rayons 15 cm et 5 cm si la distance des axes de celles-ci est de 30 cm .

19. Discuter des procédés permettant de :

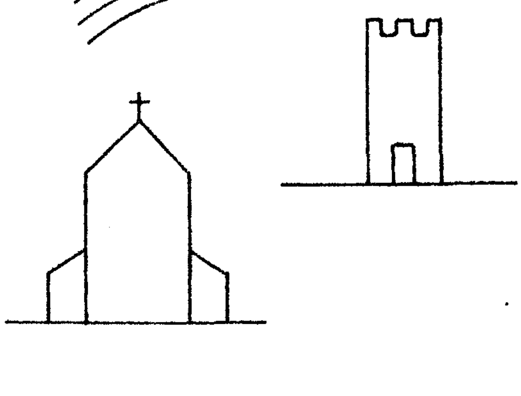
a) déterminer la distance d'un point accessible p à un point inaccessible q situés à la même altitude .


b) déterminer la distance de deux points inaccessibles p,q dans un plan .




c) déterminer la hauteur d'une tour dont le pied est accessible sur un terrain horizontal .

d) déterminer la hauteur d'une église dont le pied est inaccessible .



e) déterminer la hauteur d'une montagne .

f) déterminer le rayon d'une tour ou d'une enceinte circulaire inaccessible .

20. Du sommet s d'une montagne, on voit dans la plaine, deux points a et b dont la distance est de 2 km . Les lignes de vision de a et

b font un angle de 32° . L'inclinaison de la première ligne de vision par rapport à un plan horizontal est de 16° et celle de la deuxième ligne de vision est de 21° . Calculer à 1 m près, la différence d'altitude des points s et a . Notez bien que a et b sont situés à la même altitude .

---

FONCTIONS ET EQUATIONS .

EXERCICES . 21. Inventer, dessiner et décrire par une formule, des fonctions de période 1, de période 2, de période $\pi$ .

22. Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles qui sont périodiques ? Si tel est le cas, déterminer la période

a) $x \to x^2$ b) $x \to 2x + 1$ c) $x \to \sin 2x$
d) $x \to tg(-x)$ e) $y \to \sqrt{y}$ f) $t \to t - [t]$
g) $t \to \sin t^2$ h) $t \to 3 \sin t$ i) $t \to \sin(t - \frac{\pi}{4})$

23. Etudier le graphique de $t \to \cos t \cos 10t$

24. Représenter sur un même graphique
a) $x \to \sin x$ b) $x \to \sin(x + \frac{\pi}{4})$ c) $x \to \sin(x + \frac{\pi}{2})$
d) $x \to \sin(x + \varphi)$
Quelle est la période de $\sin(x + \varphi)$ ? Comment passe-t-on de a) à d) ? La fonction cosinus apparaît-elle en d) ? Et tangente ?

25. Représenter sur un même graphique
a) $x \to \cos x$ b) $x \to \cos 2x$ c) $x \to \cos(-x)$
d) $x \to \cos 5x$ e) $x \to \cos ax$
Quelle est la période de cos ax ? Comment passe-t-on de a) à e) ?

26. Etudier graphiquement $x \to \cos(ax + \varphi)$ .
Quelle est sa période ? Comment est-elle liée à $x \to \cos x$ ?

27. Etudier graphiquement $t \to a \cos(bt + c)$ .

28. Etudier graphiquement
a) $\cos x + \sin x$ b) $2 \cos x - \sin x$ c) $\cos 2x + \sin 3x$
d) $\cos 3x \cos x$ e) $\sin x \cos 2x$

29. Résoudre
a) $\sin x = -\sqrt{3}/2$
b) $\cos x = -1/2$
c) $tg\, x = \sqrt{3}/3$
d) $2 \sin 2x = -\sqrt{2}$
e) $\cos^2 x = 1/4$
f) $tg\, 3x = -1$
g) $cotg\, 2x = -\sqrt{3}/3$
h) $\sin 5x = \sin 3x$
i) $\sin 5x = -\sin x$
j) $\sin(3x - \pi/4) = \sin x$
k) $\cos 2x = -\cos x$
l) $\cos(2x - \pi/6) = \cos x$
m) $cotg(2x - \pi/4) = cotg\, x$
n) $tg\, 2x = cotg\, x$
o) $\sin x = tg\, x$
p) $\sin^2 x - \cos^2 x - \cos x = 1$

q) $\sin x + 3 \cos x = 1$ (difficile)

r) $3 \operatorname{tg}^2 x + 5 = \frac{7}{\cos x}$

s) $3 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$

t) $2 \cos x \sin x + 2 \sin x + \cos x + 1 = 0$

u) $5 \cos^2 x + 2 \sin^2 x = 11/4$

v) $\sin 3x + \sin x = 0$

w) $3 \sin^2 x - 5 \cos x = 4$

x) $2 \cos x + 3 = 4 \cos x/2$

y) $\sin 7x - \sin x = \sin 3x$ .

---

ARC SINUS .

Dans les exercices précédents on est amené à déterminer y connaissant par exemple sin y . Il est utile d'introduire une nouvelle fonction correspondant à cette opération .

Lorsque $x = \sin y$ et que $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , on pose

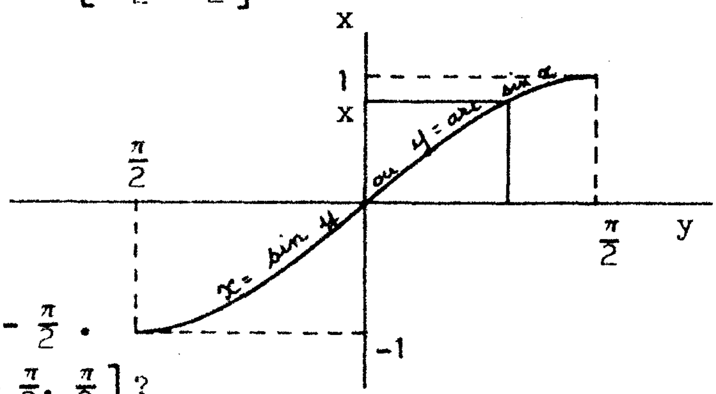
$\boxed{\arcsin x = y}$

(qui se lit y est l'arc dont le sinus est égal à x )

Ainsi $\arcsin \frac{1}{2} = 30°$ ,

$\arcsin -\frac{\sqrt{2}}{2} = -45°$ ,

$\arcsin 0 = 0$, $\arcsin -1 = -\frac{\pi}{2}$ .




Pourquoi se limiter à $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ?

Pour que arc sin soit vraiment une fonction . Dès qu'on prend un intervalle plus grand, la droite horizontale par le point (0, x) recoupe le graphique en deux points ou davantage et arc sin x deviendrait ambigu .

Bien entendu, on pourrait choisir un autre intervalle que $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ mais c'est là le choix le plus naturel, le plus grand intervalle contenant 0, sur lequel sin est une fonction croissante .

Et nos calculatrices ? Connaissent-elles arc sin ? Oui .

Considérons une TI 58 C à titre d'exemple .

La fonction sinus se traite comme suit :

pour obtenir sin (- 39° ) on réalise

$\boxed{39}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\sin}$

La machine affiche 0.629320391

Pour obtenir immédiatement arc sin (0,629320391) on réalise alors

$\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\sin}$

et la machine affiche 39 .

Voici le même travail sur HP

$\boxed{39}$ $\boxed{f}$ $\boxed{\sin}$

Affichage : 0.629320391

$\boxed{g}$ $\boxed{\sin^{-1}}$

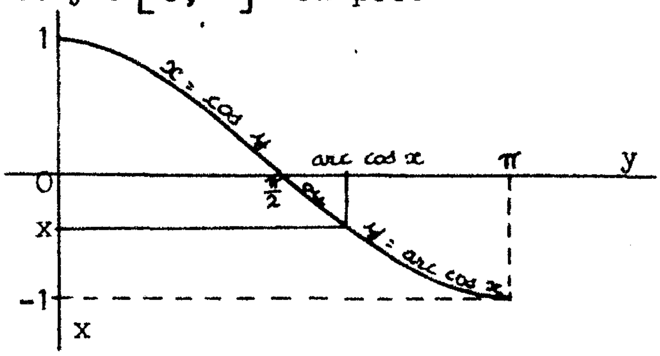
Affichage 39 .

A noter : dans les livres anglais, arc sin x se note plutôt $\sin^{-1} x$ qu'il ne faut pas confondre avec $\frac{1}{\sin x}$ .

De même, si $x = \cos y$ et $y \in [0, \pi]$ on pose

$$\boxed{\text{arc cos } x = y}$$

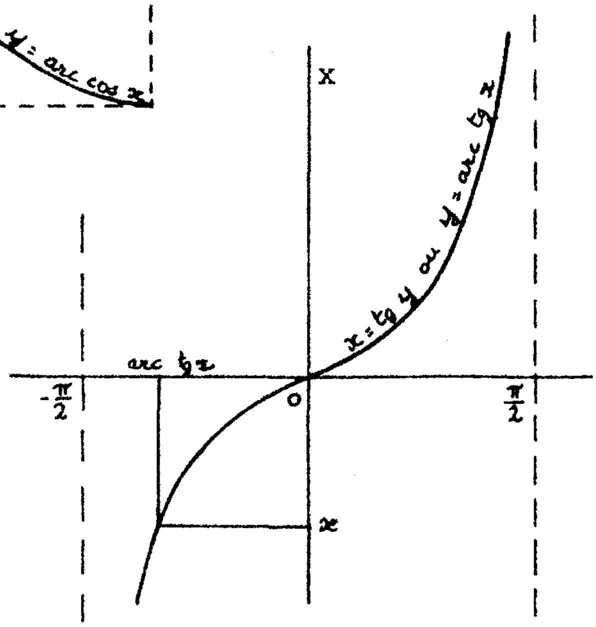
qui se lit "y est l'arc dont le cosinus est égal à x "




Enfin, si $x = \text{tg } y$ et $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

on pose

$$\boxed{y = \text{arc tg } x}$$




---

<u>EXERCICES</u> . 30. Utiliser une calculatrice pour réaliser successivement les calculs suivants :

a) $\sin 45° = x$, arc sin x
b) $\sin(-78°) = x$, arc sin x
c) $\sin 120° = x$, arc sin x
d) $\cos 120° = x$, arc cos x
e) $\cos 1° = x$, arc cos x
f) $\text{tg } 37° = x$, arc tg x
g) $\sin 37° = x$, arc sin x
h) $\sin \frac{49\pi}{4} = x$, arc sin x
i) $\sin 1 = x$, arc sin x

31. Quels sont les domaines de définition des fonctions arc sin, arc cos, arc tg ? Ces fonctions sont-elles croissantes, décroissantes, périodiques ?

32. Démontrer qu'on a $\text{tg arc cos } x = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$ pour $x \in [0, \pi[$

33. Résoudre l'équation $\text{arc sin } x = \text{arc sin } \frac{3}{5} + \text{arc sin } \frac{1}{3}$

34. Compléter

sin(arc sin x) =

cos(arc sin x) =

sin(arc tg x) =

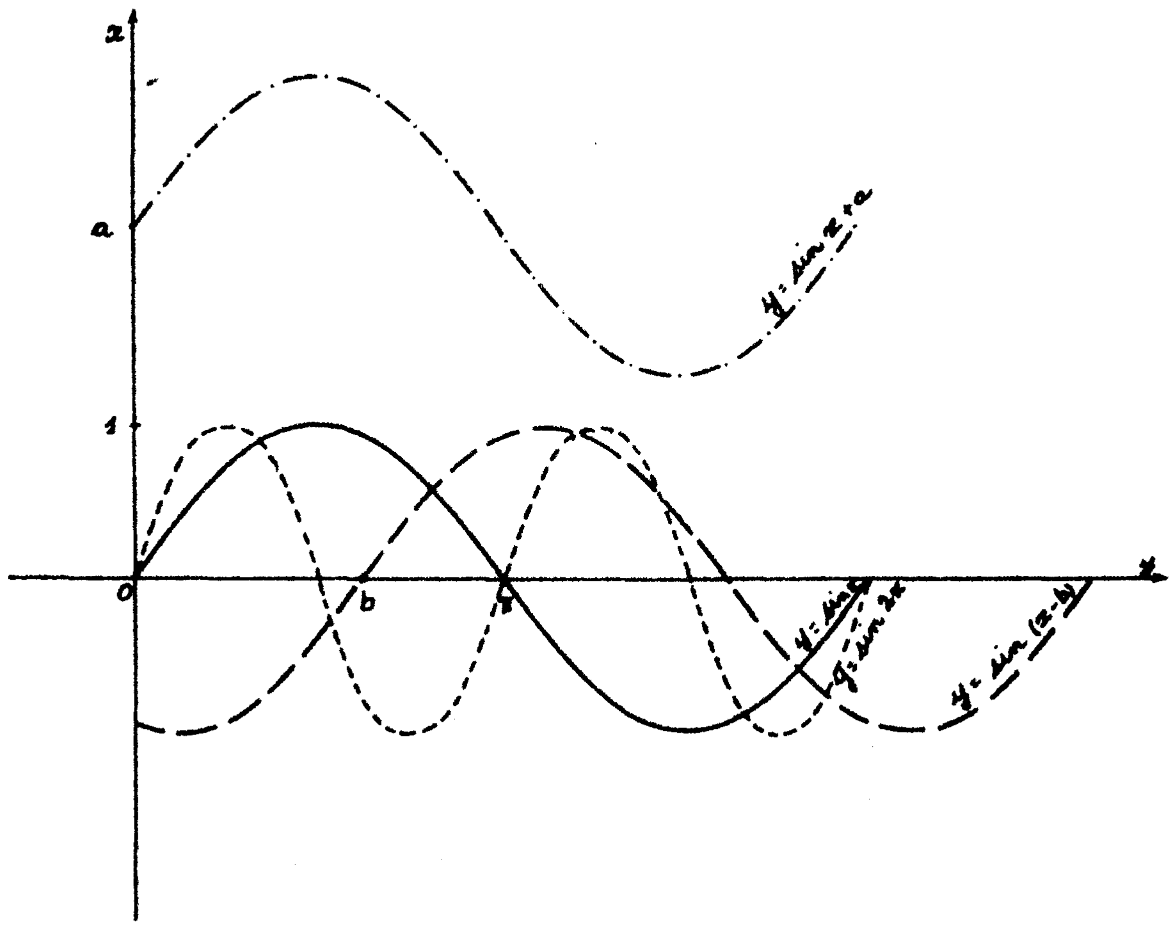
N.B. Cet exercice couvre un piège .

35. Démontrer que

$$\text{arc tg}\,\frac{2a - b}{b\sqrt{3}} + \text{arc tg}\,\frac{2b - a}{a\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$$

en précisant pour quelles valeurs de a et b, l'égalité est valable .

RESUME



## RESUME

### Identités "remarquables"

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\operatorname{cotg} x}$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\operatorname{cotg}^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b}{1 \mp \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

$$\sin a = \frac{2 \operatorname{tg} a/2}{1 + \operatorname{tg}^2 a/2}$$

$$\cos a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 a/2}{1 + \operatorname{tg}^2 a/2}$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{2 \operatorname{tg} a/2}{1 - \operatorname{tg}^2 a/2}$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}$$

### Arc sinus

Si $x = \sin y$ et $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, alors $\operatorname{arc\,sin} x = y$

Si $x = \cos y$ et $y \in [0, \pi]$ , alors $\operatorname{arc\,cos} x = y$

Si $x = \operatorname{tg} y$ et $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, alors $\operatorname{arc\,tg} x = y$