10. VARIATIONS SUR LES DERIVEES

3h/s, 5h/s, 7h/s

Rappels: chapitres 3 et 5

LA FONCTION EST-ELLE CROISSANTE OU DECROISSANTE ? BREF, A-T-ON ↗ OU ↘ ?

Nous demandons d'établir un graphique de la fonction

$$f : x \to x^5 - 0{,}01\,x \quad \text{sur } [-10,10]$$

et d'étudier la croissance de cette fonction.

L'idée de départ de nos élèves est de calculer patiemment un certain nombre de points du graphique, à intervalles réguliers. Les calculatrices sont dégainées.

Réfléchissons et observons, tout en calculant. Lorsque x est assez grand, mettons $x \geqslant 2$, on voit que f(x) est proche de x^5 et que $0{,}01x$ peut être négligé. Il en va de même pour $x \leqslant -2$.

Le graphique de $x \longrightarrow x^5$ que nous devons connaître déjà, livre donc une première approximation du graphique de f (figure 1).

Que se passe-t-il pour f dans $[-2,2]$?

On a

$$x^5 - 0{,}01\,x = x(x^4 - 0{,}01)$$

et de ce fait, f(x)=0 pour x=0 ou pour

$$x^4 - 0{,}01 = 0$$

Cette dernière expression est équivalente à

$$x^4 = 10^{-2} \quad \text{ou } x^2 = \pm\, 10^{-1}$$

ou

$$x = \pm\, 0{,}316\ldots = \pm \frac{\sqrt{10}}{10}$$

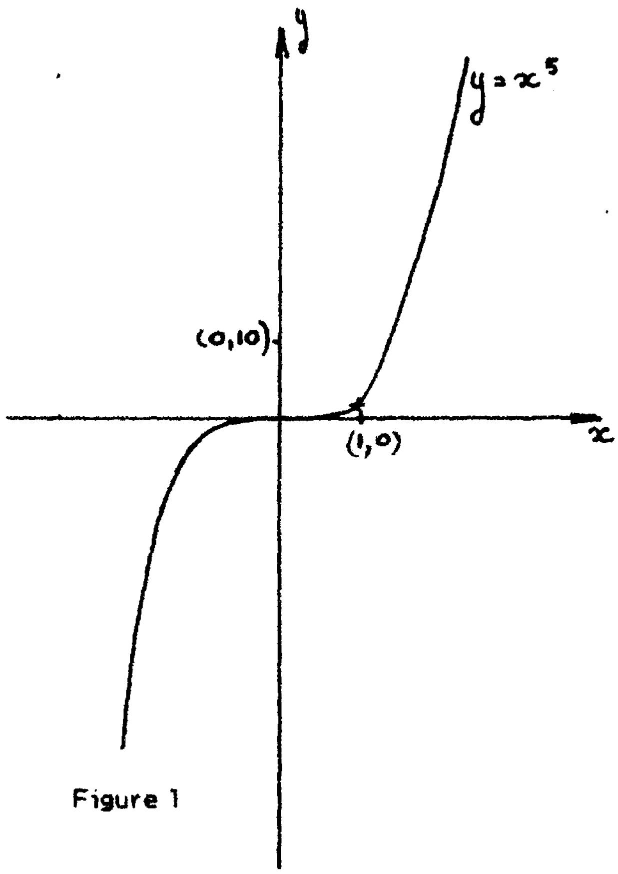


Figure 1

Dès lors, nous pouvons deviner que la fonction aura l'allure de la figure 2 et ce, sans faire de calculs.

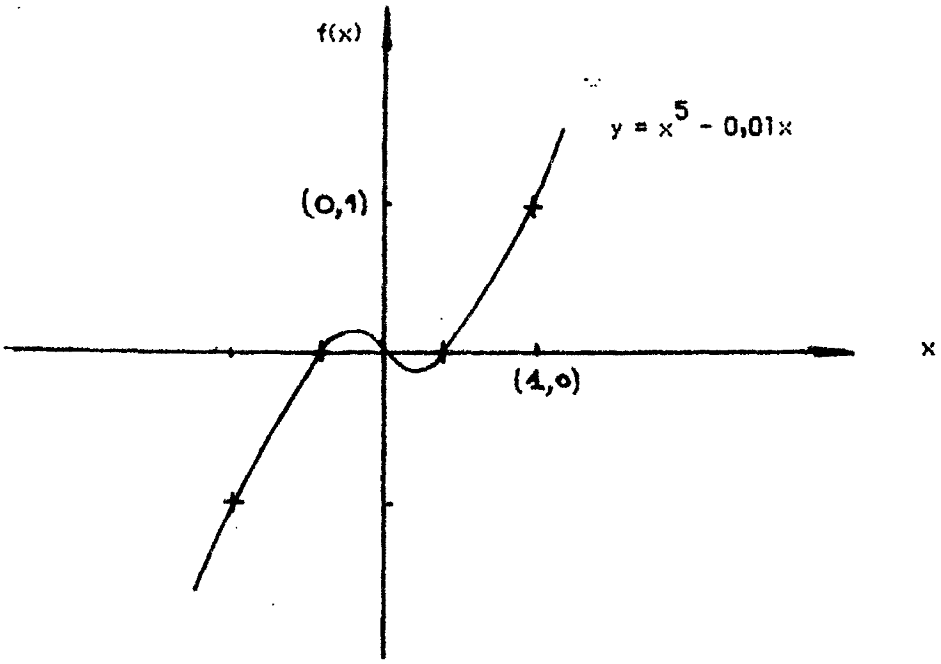


Figure 2

Nous pouvons le vérifier grâce à un programme qui calcule des valeurs de f(x) en donnant un accroissement (à fixer) de x.

TI-58C	BASIC (TRS 80)
LRN	5 CLS
2nd Lbl A	10 INPUT "Valeur initiale de X = ";x
STO 0 0	20 INPUT "Accroissement = ";A
R/S	30 INPUT "Valeur finale de X = ";F
2nd Lbl B	40 FX = X**5 - 0.01*X
STO 0 1	50 PRINT "X = ";X;" f(X) = ";FX
2nd Lbl C	60 X = X + A
RCL00 + RCL01 =	70 IF X>F OR X=F GOTO 80 ELSE GOTO 40
STO 0 0	80 END
RCL00 y^x5 - (0.01 × RCL00)=	
R/S	
GTO C	
LRN	

Fonctionnement:

prenons par exemple 0 A
0.1 B
et la machine affiche f(x) en x=0.1 puis
on presse R/S et elle affiche f(0,2), etc...

Attention: ce programme ne convient pas toujours à des valeurs négatives de x parce que -2y^x5 n'affiche pas -32 pour certaines calculatrices.

X=-5	f(X) = -3124.95
X=-4	f(X) = -1023.96
X=-3	f(X) = -242.97
X=-2	f(X) = -31.98
X=-1	f(X) = -0.99
X=0	f(X) = 0
X=1	f(X) = 0.99
X=2	f(X) = 31.98
X=3	f(X) = 242.97
X=4	f(X) = 1023.96

On obtient une vision plus fine en mettant un accroissement de 0,01 et pour une valeur initiale comme x=0,15.

Une question se pose: peut-on prévoir et détecter de manière systématique les modifications de croissance et de décroissance d'une fonction ?

La réponse se trouve dans un résultat fondamental que nous allons accepter momentanément sans démonstration.

<u>THEOREME 1</u> **Soit f une fonction d'une variable réelle définie sur un intervalle I (ouvert ou fermé, segment, demi-droite ou droite) et supposons que f possède une dérivée f'.**
Alors

(1) $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$ implique que f est croissante sur I (c'est-à-dire $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) \leqslant f(x_2)$);

(2) $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$ implique que f est décroissante sur I (c'est-à-dire $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) \geqslant f(x_2)$);

(3) $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ implique que f est strictement croissante sur I (c'est-à-dire $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) < f(x_2)$);

(4) $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$ implique que f est strictement décroissante sur I (c'est-à-dire $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) > f(x_2)$).

Réciproquement, si f est (strictement) croissante sur I, $f'(x) \geqslant (>) 0$ pour tout x et si f est (strictement) décroissante sur I, $f'(x) \leqslant (<) 0$ pour tout x.

Si on se souvient que <u>f'(x) livre la pente de la tangente à y=f(x) en x</u>, et si on relie la pente de la tangente à la croissance ou décroissance de x, ce théorème n'a rien d'étonnant.

Voyons comment le théorème s'applique à notre problème. Le professeur livre

$$f(x) = x^5 - 0{,}01\,x$$

et livre sa dérivée (on verra plus tard comment elle se calcule) :

$$f'(x) = 5x^4 - 0{,}01$$

La classe est priée d'étudier les variations de signe de f'(x). C'est une question qui nous ramène aux factorisations:

$$5x^4 - 0{,}01 = (\sqrt{5}\,x^2 + 0{,}1)(\sqrt{5}\,x^2 - 0{,}1)$$
$$= (\sqrt{5}\,x^2 + 0{,}1)(\sqrt[4]{5}\,x + \sqrt{0{,}1}\,)(\sqrt[4]{5}\,x - \sqrt{0{,}1}\,)$$

dont les zéros sont $-\sqrt{0{,}1}\,/\sqrt[4]{5} = -0{,}21\ldots$ et $\sqrt{0{,}1}\,/\sqrt[4]{5} = 0{,}21\ldots$

Donc

x		$-0{,}21$		$0{,}21$	
$\sqrt{5}\,x^2 + 0{,}1$	+	+	+	+	+
$\sqrt[4]{5}\,x + \sqrt{0{,}1}$	-	0	+	+	+
$\sqrt[4]{5}\,x - \sqrt{0{,}1}$	-	-	-	0	+
$5x^4 - 0{,}01$	+	0	-	0	+

et nous complétons ce tableau par une ligne qui schématise la croissance de f et qui indique les minima et maxima locaux rencontrés :

x		$-0{,}21$		$0{,}21$	
$5x^4 - 0{,}01$	+	0	-	0	+
$x^5 - 0{,}01\,x$	↗	max tangente horizontale	↘	min tangente horizontale	↗

Sur un graphique, ceci livre la figure 3 qui confirme que la figure 2 avait été correctement établie.

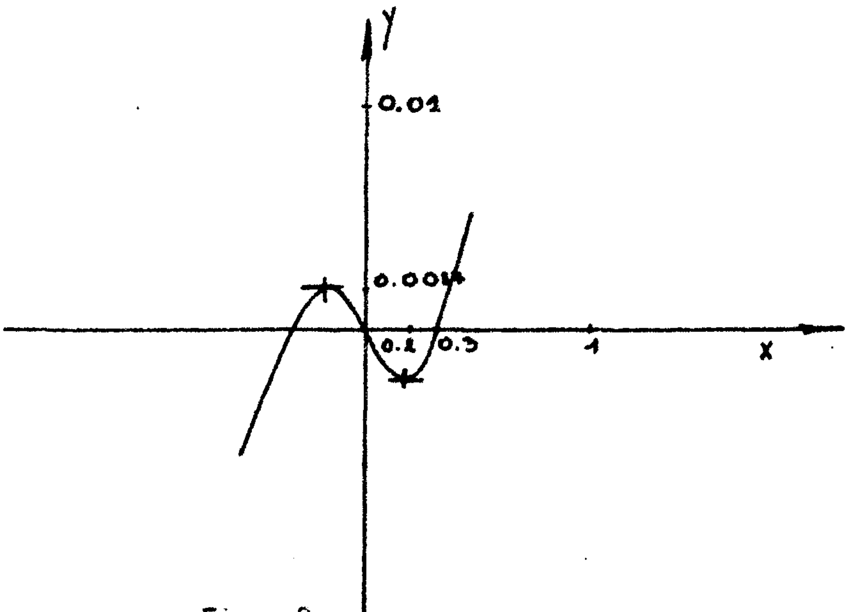


Figure 3

Nous voyons les avantages de cette méthode: l'étude du signe de la dérivée si elle peut être faite avec précision, livre une vision sûre des intervalles où la fonction est croissante ou décroissante.

==

EXERCICES

1. Etudier rapidement la fonction $(x-a)^5 - 0{,}01x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pout tout $a \in \mathbb{R}$.

2. On donne la fonction f, sa dérivée f' et un intervalle I. Déterminer un tableau de variation du signe de f' sur I et de la croissance de f. Introduire ces données dans un graphique.

f	f'	I
a) $x - \sin x$	$1 - \cos x$	$[-12\pi, 12\pi]$
b) $x^3+11x^2-900x-5$	$3x^2+22x-900$	$[-10^3, 10^3]$
c) $\sqrt{x-1}$	$\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$	$[1, +\infty[$
d) e^x	e^x	$\mathbb{R}$

3. Faire une étude des fonctions suivantes, données avec leurs dérivées, en utilisant toutes les techniques connues : recherche du domaine de définition, examen des limites de la fonction aux extrémités des intervalles de définition, idée du graphique par des techniques de superposition de graphiques, tableau de variation, calcul point par point, etc...

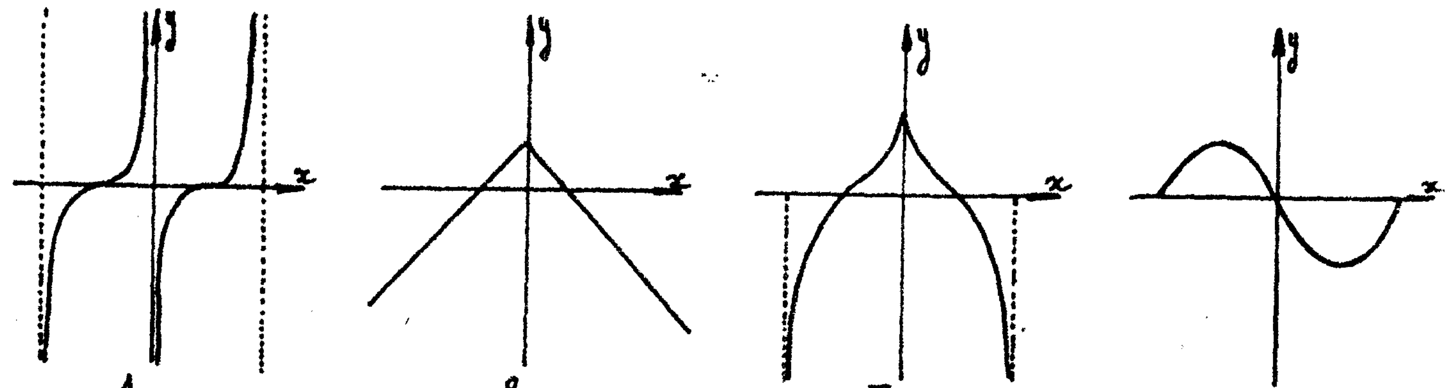
	f(t)	f'(t)	
a)	$a.\cos t$	$-a.\sin t$	$a \in \mathbb{R}_0$
b)	$\cos bt$	$-b.\sin bt$	$b \in \mathbb{R}_0$
c)	$\cos(t+c)$	$-\sin(t+c)$	$c \in \mathbb{R}$

d) traiter a),b),c) sur un même graphique pour diverses valeurs des paramètres a,b,c.

e)	$\frac{1}{x^2 - 1}$	$\frac{-2x}{(x^2-1)^2}$

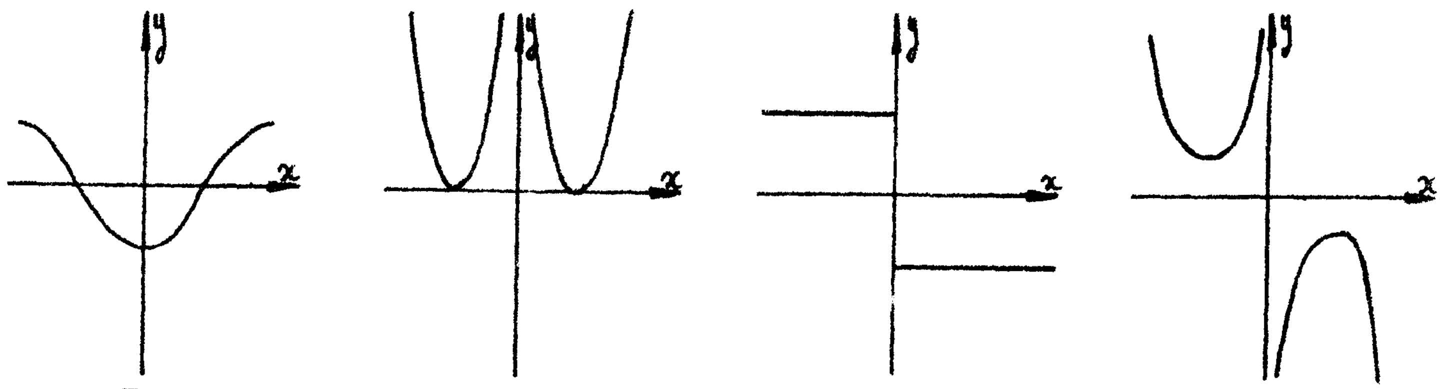
4. Voici un assortiment de 4 fonctions 1,2,3,4, données par leurs graphiques. Leurs dérivées sont données dans le désordre par A,B,C,D. Rétablir l'ordre exact. Les dérivées des dérivées, ou dérivées secondes, sont données dans le désordre par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Rétablir l'ordre exact.

Fonctions:



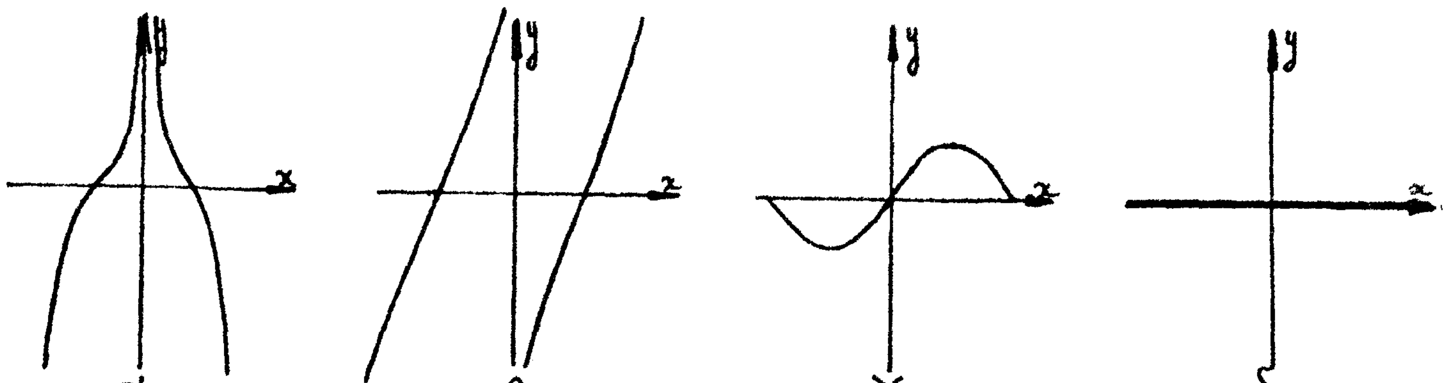
1. 2. 3. 4.

Dérivées premières:

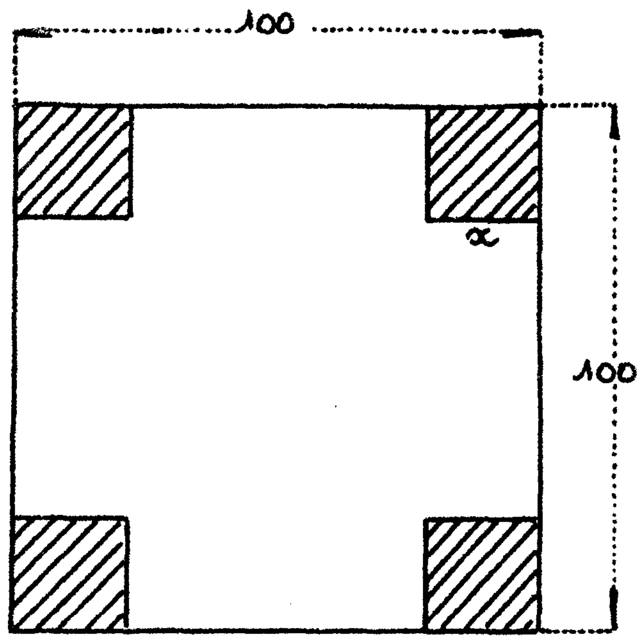


A. B. C. D.

Dérivées secondes :



α. β. γ. δ.



FABRIQUER UNE BOITE

On désire fabriquer une boîte à fond carré et sans couvercle, en découpant les parties coloriées dans une feuille métallique carrée.

On souhaite que le volume de cette boîte soit aussi grand que possible! Comment faire ?

On introduit une variable x, longueur du côté d'un carré découpé. Alors le volume V de la boîte s'exprime par

$$V = x.(100-2x)^2 \text{ et } x \in [0,50]$$

La question se ramène à la recherche du maximum (éventuel) de V. La classe calcule

$$V = 10^4x - 400x^2 + 4x^3$$

et le professeur livre la dérivée

$$V' = 10^4 - 800x + 12x^2$$

Comment varie le signe de celle-ci ? C'est le signe du trinôme

$$12x^2 - 800x + 10^4$$

dont les racines sont

$$\frac{800 \pm \sqrt{800^2 - 4.12.10^4}}{24}$$

$$= \frac{800 \pm 400}{24} = \begin{cases} 50 \\ 16.6... \end{cases}$$

Donc le tableau des variations de V est

x	0		16.6...		50
V'		+	0	−	0
V		↗	max	↘	min

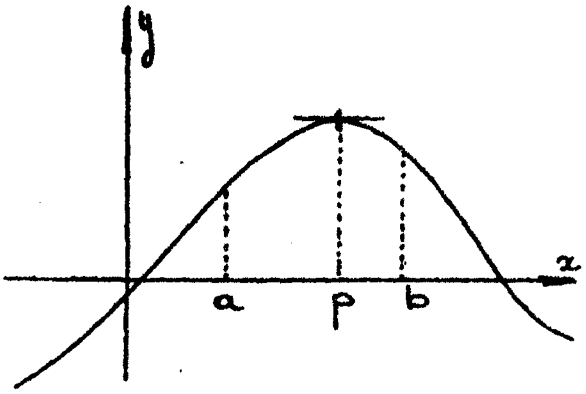
Ceci montre clairement que le volume V est maximal pour x=16,6... Une dernière remarque: le physicien bondirait en voyant une plaque de côté 100. Il s'agit bien sûr de 100 unités et on découpe des carrés dont le côté vaut environ 16,6 unités.

MAXIMA ET MINIMA

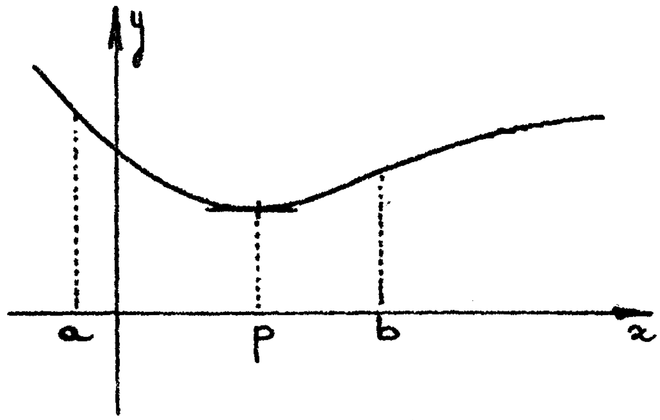
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $p \in I$.

On dit que f possède un <u>maximum local</u> en p s'il existe un intervalle $[a,p]$ avec $a \in I$, $a < p$ sur lequel f est croissante et un intervalle $[p,b]$ avec $b \in I$ et $p < b$ sur lequel f est décroissante.

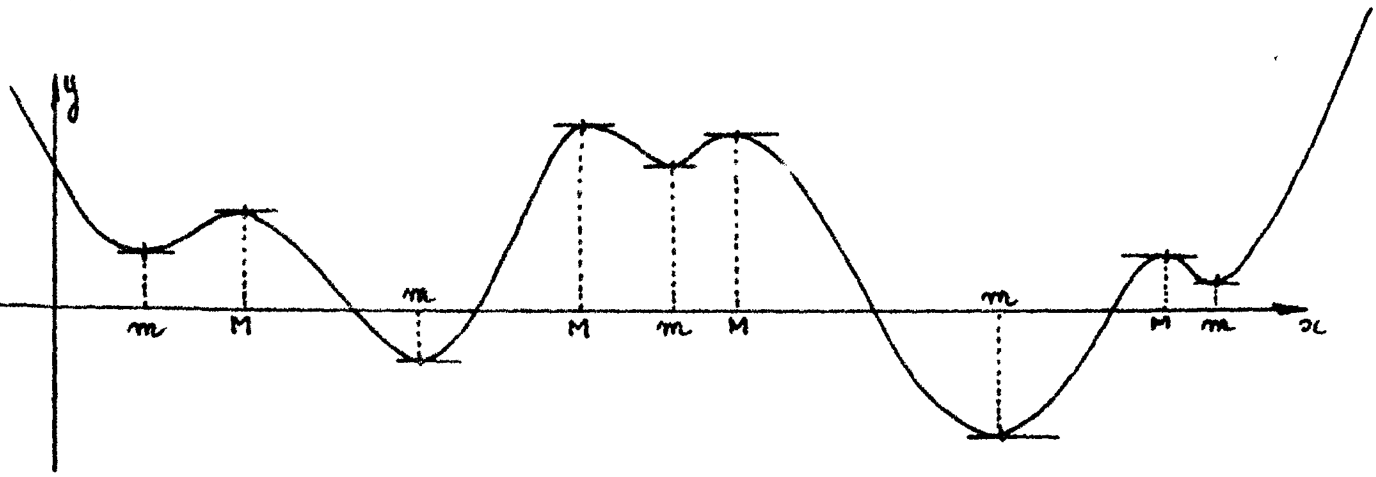
De même, f possède un <u>minimum local</u> en p s'il existe un intervalle $[a,p]$ avec $a \in I$, $a < p$ sur lequel f est décroissante et un intervalle $[p,b]$ avec $b \in I$ et $p < b$ sur lequel f est croissante.



maximum local



minimum local



Sur ce dessin, la fonction admet un minimum local en tout point m et un maximum local en tout point M.

A noter que la plus grande valeur de f (le <u>maximum global</u> ou <u>absolu</u> de f) peut être supérieur à tout M et que la plus petite valeur de f (le <u>minimum global</u> ou <u>absolu</u> de f) peut être inférieur à tout m.

THEOREME 2 **Si f est dérivable sur un intervalle ouvert I et si f possède un minimum local ou un maximum local en $p \in I$, alors $f'(p) = 0$.**

Démonstration : prenons le cas du maximum local. Grâce au théorème sur la croissance, on a que $f'(x) \geqslant 0$ sur $[a,p]$ et $f'(x) \leqslant 0$ sur $[p,b]$ où $a \leqslant p$, $b \geqslant p$
donc

$f'(p) \geqslant 0$ et $f'(p) \leqslant 0$ ce qui force $f'(p) = 0$.

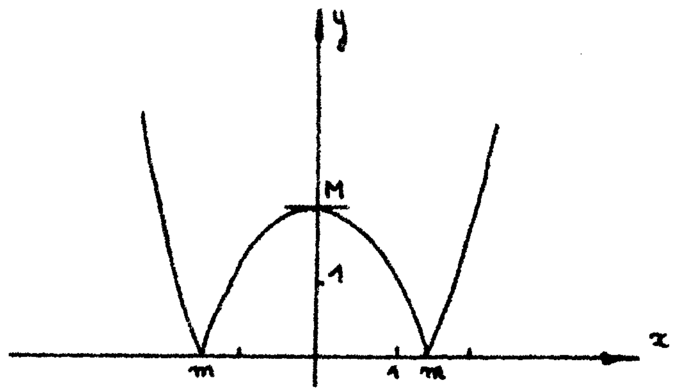
Un raisonnement analogue se tient pour un minimum local.

Attention ! La réciproque n'est pas vraie. L'exemple de $x \longrightarrow x^3$, dont la dérivée est nulle en 0 et qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, le montre bien.

En pratique, cela signifie qu'il faut accorder une attention prioritaire au signe de la dérivée et pas seulement à ses zéros.

Notons encore qu'une fonction peut posséder un minimum (ou maximum) local en un point où la dérivée n'existe pas. En voici un exemple:

$y = |x^2 - 2|$



Le dessin suggère clairement que la limite de la pente en $x = \pm\sqrt{2}$ n'existe pas, que cette pente a une limite à gauche et une limite à droite qui sont de signes opposés.

On observe à nouveau un maximum local M qui est loin d'être un maximum absolu puisque l'ensemble des valeurs de la fonction est une demi-droite positive dont M est un élément parmi d'autres.

==

INTERPRETATION PHYSIQUE DE LA DERIVEE

1. Vitesse instantanée

La notion de dérivée est née historiquement en liaison avec le problème des tangentes à une courbe et c'est par ce biais que nous l'avons abordée.

Mais d'autres problèmes, de nature physique, faisant intervenir le temps, ont joué un rôle déterminant dans cette naissance. Aujourd'hui, ils livrent un champ d'application pour la notion de dérivée, qui couvre toutes les sciences un tant soit peu mathématisées.

L'exemple de base est la notion de vitesse. Considérons un point mobile sur une droite munie d'un repère. A l'instant t, la position du point s'exprime par une fonction $x(t)$. Accordons un accroissement Δt à t.

A l'instant $t + \Delta t$, la distance parcourue par le point mobile s'exprime par l'accroissement de la fonction x, c'est-à-dire

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$$

La <u>vitesse moyenne</u> du point sur le trajet Δx ou durant l'intervalle de temps Δt est égale par définition à

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{(t + \Delta t) - t}$$

Cette notion est acquise depuis l'Antiquité et aujourd'hui, les enfants apprennent à la maîtriser dès l'école primaire.

Physiquement, nous entrons en contact avec une notion de <u>vitesse instantanée</u> que nous ressentons cheveux au vent sur une bicyclette, que nous observons sur le tableau de bord d'une voiture ou, ce qui est plus désagréable, sur le radar des gendarmes. Ceux-ci ne verbalisent pas sur base d'une vitesse moyenne excédant 120 km/h mais bien sur base d'une vitesse instantanée. En cas de choc frontal, ce n'est pas la vitesse moyenne qui est impliquée dans les dégâts mais bien la vitesse instantanée. La notion de vitesse instantanée s'impose donc physiquement. Mais comment la cerner sur le plan mathématique?

On peut obtenir une approximation de précision croissante en considérant la vitesse moyenne sur un intervalle de temps de plus en plus petit. Finalement, la <u>vitesse instantanée à l'instant t</u> est

$$v_i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = x'(t)$$

donc $v_i(t)$ <u>est la dérivée de la fonction de position x par rapport au temps, à l'instant t.</u>

<u>Voici une exemple</u> bien connu dans le cours de physique. Si un objet est lancé verticalement vers le haut, dans le vide où règne une pesanteur supposée constante et d'accélération égale à g, à une altitude initiale x_0 et avec une vitesse initiale v_0, son altitude x à l'instant t est égale à

$$x(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + x_0 \qquad (1)$$

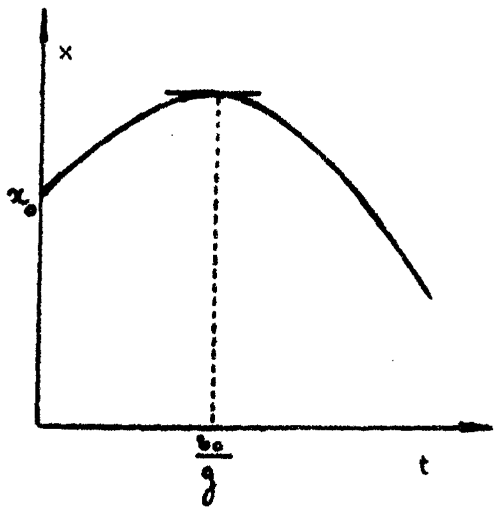
et sa vitesse à l'instant t, soit v(t) est égale à

$$v(t) = x'(t) = -gt + v_0$$

Celle-ci s'annulle (moment où l'objet cesse de monter et retombe) à l'instant $t = v_0/g$ et à cet instant, l'altitude maximale est atteinte :

$$x_{max} = -\frac{v_0^2}{2g} + \frac{v_0^2}{g} + x_0 = x_0 + \frac{v_0^2}{2g}$$

L'étude de (1) est au fond celle de la fonction $x \to ax^2 + bx + c$ entreprise en 4e, avec d'autres notations adaptées à la physique.



2. Quantités infinitésimales et différentielles

La dérivée est née durant la deuxième moitié du 17e siècle, à la fois dans les travaux de Newton et dans ceux de Leibniz. Elle est basée sur la notion de limite mais celle-ci ne sera pas maîtrisée mathématiquement avant 1830, avec Cauchy. Il faut donc près de 150 ans pour que les mathématiciens comprennent la merveilleuse mécanique héritée de Newton et d'autres. En attendant, la notion de dérivée est plutôt floue.

Comme Δx tend vers zéro lorsque Δt tend vers zéro, $\Delta x/\Delta t$ tend vers 0/0 qui est indéterminé. Les pères fondateurs se débrouillent en décrétant qu'en fait Δx tend vers une valeur infinitésimale (ou infiniment petite) mais non nulle, notée dx et que Δt tend de même vers dt. Comme Δx et Δt représentent des différences, on dit que dx et dt sont des **différentielles**. Ce seraient donc des infiniment petits et on aurait

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} \quad \text{et} \quad dx = x'(t).dt$$

Aujourd'hui, ces conceptions ne sont plus indispensables comme on l'a vu, mais la notation dx/dt est demeurée fortement ancrée et elle possède des avantages techniques et théoriques divers.

Il est indispensable d'en assimiler le maniement pour suivre un enseignement mathématisé de niveau supérieur.

3. Taux de variation instantané

La notion de vitesse instantanée se généralise comme suit en des notions ayant des applications en physique, en biologie, en sociologie, en économie, etc...

Considérons une grandeur scalaire C, variable dans le temps, qui s'exprime par une fonction d'une variable $t \to C(t)$.

Exemple: C peut être

1) un capital
2) une population

3) une quantité de rayonnement traversant une surface déterminée
4) une distance
5) une vitesse
6) un volume d'eau de rivière passant dans telle ville durant un intervalle de temps

Dans les diverses sciences concernées, on s'intéresse à l'accroissement

$$C = C(t + \Delta t) - C(t)$$

de la fonction C durant un intervalle de temps Δt.

Dans l'exemple où C est un capital placé avec un intérêt i applicable de mois en mois, Δt prend une valeur privilégiée égale à un mois. Le taux de variation moyen de C durant l'intervalle de temps Δt est $\Delta C/\Delta t$ et le taux de variation instantané de C à l'instant t est

$$C'(t) = \frac{dC}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t}$$

Pour certains exemples cités ci-dessus, C'(t) porte un nom classique :

1) intérêt
3) flux de rayonnement
4) vitesse
5) accélération
6) débit

4. Dérivée et population

La notion d'explosion démographique a été comprise grâce au modèle mathématique suivant.

Considérons une population comprenant un nombre N(t) d'individus où t est le temps, avec N_o le nombre d'individus à l'instant t= 0.

Une hypothèse simple et plausible quant à l'évolution de N(t) est que le taux d'accroissement de N est proportionnel à N si la population se développe dans un milieu favorable (pas de prédateurs, pas de fléaux, nourriture abondante, bref un jardin d'Eden). Dès lors

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = c \quad \text{où c est une constante,}$$

ou

$$\frac{dN}{N} = c.dt \qquad \text{ou} \quad N' - cN = 0 \qquad (1)$$

Ceci est un exemple d'équation différentielle. C'est une équation dont l'inconnue est une fonction N et dans l'équation on retrouve cette inconnue et certaines de ses dérivées.

On verra en classe de 6e que la solution de (1) avec $N(0) = N_o$ est

$$N(t) = N_o.e^{ct} \qquad \text{où } e = 2{,}718...$$

La constante c se détermine par un recensement de la population, par exemple en t= 50 (ans).

Voici un exemple numérique imitant quelque peu la population mondiale (en êtres humains). Si $N_0 = 4.10^9$ (4 milliards d'habitants) et si la population double en 50 ans, on a

$$N(50) = 8.10^9 = 4.10^9.e^{50c}$$

d'où on tire

$$c = 0{,}0138...$$

Quelle sera la population au bout de 200 ans, dans le jardin d'Eden ?

$$N(200) = 4.10^9.(2{,}718)^{200.0{,}0138} \approx 6.10^{10}$$

Bref, "nous" serons 60 milliards !

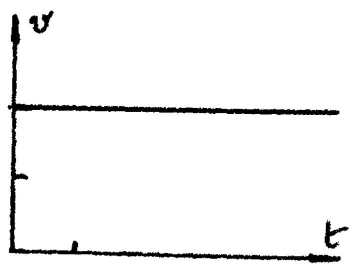
L'explosion démographique peut ainsi être prédite sinon jugulée.

EXERCICES

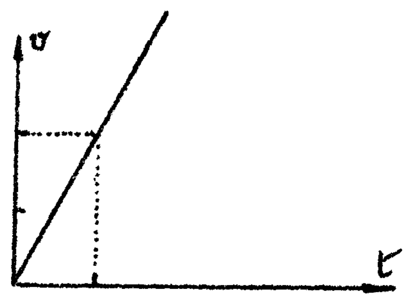
5. On considère le mouvement rectiligne d'un point sur une droite, avec une position initiale $x_0 = 0$.

On donne le graphique de la vitesse en fonction du temps. Dessiner approximativement le graphique de la position x en fonction du temps. Interpréter le graphique en langage physique (accélération, maxima, chocs,...).

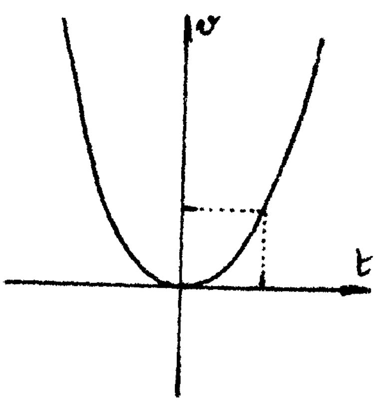
a)



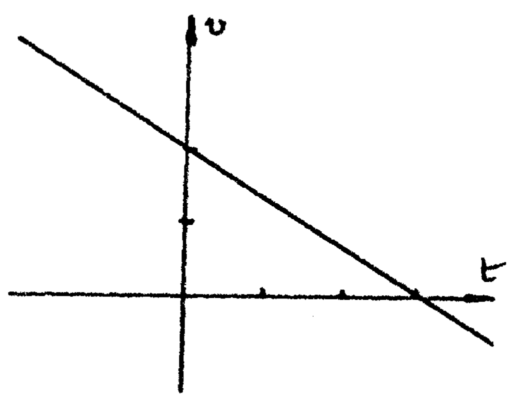
b)



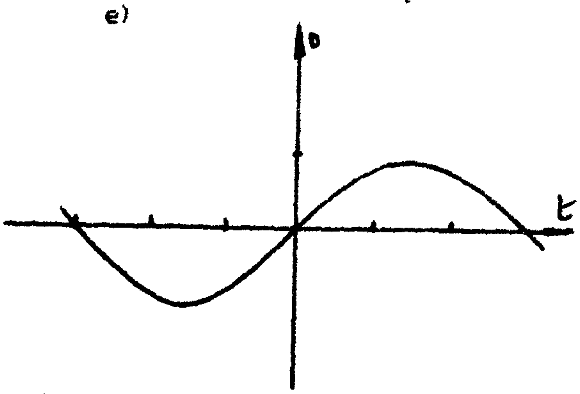
c)



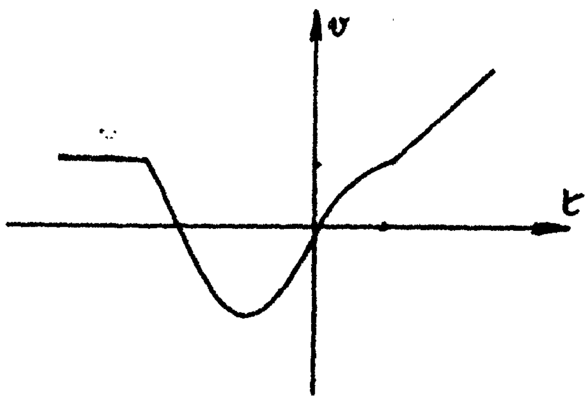
d)



e)



f)



DE LA TECHNIQUE

Souvenons-nous de la définition d'une dérivée:

$$f'(x) = \lim_{a \to 0} \frac{f(x+a) - f(x)}{a}$$

Nous allons développer diverses techniques permettant le calcul des dérivées mais nous ferons d'abord un peu de bricolage pour faire le point des difficultés.

Un peu de bricolage

1) Considérons la fonction $y = px + q$ où p, q sont des constantes réelles. Son graphique est une droite de coefficient angulaire p. On peut donc s'attendre à ce que la dérivée soit égale à p, pour tout x. Voyons cela :

$$\lim_{a \to 0} \frac{[p(x+a) + q] - [px + q]}{a} = \lim_{a \to 0} \frac{pa}{a} = p$$

Notons les cas particuliers où $f(x) = x$ et $f'(x)=1$, $f(x) = q$ et $f'(x) = 0$.

2) Quelles sont les fonctions les plus simples après le polynôme du premier degré ? Les puissances entières $x \to x^n$, $n \in \mathbb{N}$ sont de bonnes candidates. pouvons-nous déterminer leurs dérivées ?

Il faut examiner $\frac{(x+a)^n - x^n}{a}$. La difficulté est que nous n'avons pas de formule disponible pour développer $(x+a)^n$ sauf pour $n = 1, 2, 3$. Ici, on entre vraiment dans le bricolage en attendant mieux.

$$\begin{aligned}(x+a)^n &= (x+a)(x+a)\ldots(x+a)\\ &= x^n + nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} a^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3.2} a^3 x^{n-3} + \ldots + a^n\end{aligned}$$

Ayant plus ou moins digéré ce pas, la dérivée est à portée de la main :

$$\lim_{a\to 0} \frac{(x+a)^n - x^n}{a} = n.x^{n-1}$$

donc
$$\boxed{f(x) = x^n \Longrightarrow f'(x) = nx^{n-1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}}$$

Notons que ceci englobe $f(x) = x$ (pour $n=1$) et $f(x) = 1$ (pour $n=0$).

3. Nous venons de nous rendre compte que le calcul direct d'une dérivée ~~n'est pas~~ nécessairement facile quand on dispose seulement de la définition. Nous ~~reculons quelque~~ peu devant le calcul pour un polynôme quelconque.

Un brin de théorie va bientôt rendre la tâche plus aisée. Systématisons.

4. Dérivée d'une somme

Considérons la fonction $f(x) + g(x) = s(x)$ en admettant que chacun de ses termes possède une dérivée. On a

$$\begin{aligned} s'(x) &= \lim_{a\to 0} \frac{s(x+a) - s(x)}{a} \\ &= \lim_{a\to 0} \frac{f(x+a) + g(x+a) - f(x) - g(x)}{a} \\ &= \lim_{a\to 0} \frac{f(x+a) - f(x)}{a} + \lim_{a\to 0} \frac{g(x+a) - g(x)}{a} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

Donc
$$\boxed{\left[f(x) + g(x)\right]' = f'(x) + g'(x)}$$

5. Dérivée d'un multiple $c.f(x)$, $c \in \mathbb{R}$

Considérons la fonction $cf(x)$ obtenue en multipliant f par une constante c.

$$\boxed{\left[cf(x)\right]'} = \lim_{a\to 0} \frac{cf(x+a) - cf(x)}{a} = c.\lim_{a\to 0} \frac{f(x+a) - f(x)}{a}$$

$$\boxed{= c.f'(x)}$$

6. Grâce à 4) et 5), nous pouvons déterminer la dérivée d'une fonction F qui serait combinaison linéaire

$$F = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

de fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ dont la dérivée est connue. On a

$$\boxed{(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n)' = \lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_2' + \ldots + \lambda_n f_n'}$$

Ceci s'applique immédiatement aux polynômes entiers, grâce à 2). Ainsi

$$(5x^3 - 10x^2 + 900x - 500)' = (5x^3)' - (10x^2)' + (900x)' - (500)'$$

$$= 15x^2 - 20x + 900$$

Nous venons de procéder à un progrès important. Il n'empêche que le bricolage de 2) nous reste encore sur l'estomac.

7. **Dérivée d'un produit**

Considérons le produit de deux fonctions $f(x).g(x)$ qui ont chacune une dérivée en tout point de l'intervalle I. La classe est prête à parier que $\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g'(x)$. Voyons cela.

$$f(x+a)g(x+a) - f(x)g(x) = f(x+a)g(x+a) - f(x)g(x+a) + f(x)g(x+a) - f(x)g(x)$$

$$= \big[f(x+a) - f(x)\big]\, g(x+a) + f(x)\big[g(x+a) - g(x)\big]$$

Donc $\big(f(x)g(x)\big)' = \lim\limits_{a\to 0} \dfrac{f(x+a) - f(x)}{a} . \lim\limits_{a\to 0} g(x+a) + \lim\limits_{a\to 0} f(x) . \lim\limits_{a\to 0} \dfrac{g(x+a) - g(x)}{a}$

ou

$$\boxed{\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$

Nous découvrons une formule inattendue. pour l'établir, nous avons utilisé des propriétés rencontrées pour les limites mais aussi que

$$\lim_{a\to 0} g(x+a) = g(x)$$

Ceci est correct car g est dérivable donc continue (Chapitre 9). Ceci permet de conclure qu'on a l'égalité souhaitée.

Remarque: cette remarquable formule due à Leibniz se généralise à un produit de plusieurs facteurs. Ainsi, $\boxed{\big[f(x)g(x)h(x)\big]' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)}$ dès que f,g,h sont dérivables.

8. **Dérivée d'une puissance entière** $f(x) = x^n$, n entier, $n \geqslant 1$

Revenons au travail accompli péniblement en 2). Grâce à 7), on peut faire une démonstration par récurrence, tout à fait au point. En effet, pour n=1, nous savons que

$$f'(x) = \lim_{a\to 0} \frac{(x+a) - x}{a} = \lim_{a\to 0} \frac{a}{a} = \lim_{a\to 0} 1 = 1$$

A présent, supposons que la propriété soit vraie pour n=N et prouvons que dans ce cas elle est vraie pour n=N+1.

Sachant que $(x^N)' = N.x^{N-1}$, on doit montrer que $(x^{N+1})' = (N+1).x^N$ Or

$$(x^{N+1})' = (x^N.x)' = (x^N)'.x + x^N.x'$$

$$= Nx^{N-1}.x + x^N$$

$$= (N+1).x^N$$

Ceci achève la démonstration.

Désormais notre édifice paraît plus solide. Il n'empêche qu'il faudra revenir un jour à $(x+a)^n$, quel que soit n .

9. **Dérivée d'un quotient**

Une technique tout à fait semblable à celles qu'on vient d'utiliser permet de prouver que

$$\boxed{\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}}$$

10. Les formules obtenues nous permettent de calculer - gare aux erreurs - les dérivées des fonctions rationnelles ou quotients de polynômes développés. Nous examinerons d'autres fonctions par la suite.

Nous demeurons encore désarmés pour des fonctions telles que

$$(x-5)^3(2x+1)^7 \quad \text{et} \quad (x+p)^n$$

==

EXERCICES

6. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

a) $y = 4x$

b) $y = x^2$

c) $y = x^3 + 2$

d) $y = x^4 + 2x^3$

e) $y = 5x^7 - 4x^6 + 8x^3 - 7x^2 + 9$

f) $y = (x+2)(x-1)$

g) $y = \frac{2x - 1}{x+2}$

h) $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

7. Trouver des fonctions dont la dérivée est égale à

a) $3x^2$

b) $5x - 1$

c) $-\frac{1}{x^2}$

d) 0

8. Soit $y = \dfrac{x^2(x+3)}{9}$. En quels points de la courbe représentative de y, en axes orthonormés, la tangente fait-elle un angle de 45° avec Ox ?

==

DERIVEE DE FONCTIONS RECIPROQUES

THEOREME 3 **Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I et possédant une réciproque f^{-1}. Soient $p \in I$ et $q = f(p)$. Si $f'(p) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en q et**

$$(f^{-1})'(q) = \frac{1}{f'(p)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(q))}$$

Remarque: il ne faut pas confondre la fonction réciproque $(f^{-1})(p)$ et la fonction inverse $f(p)^{-1} = 1/f(p)$, mais on constate grâce au théorème que la dérivée de la réciproque est "en gros" l'inverse de la dérivée.

Démonstration posons $f^{-1} = g$ et $y = f(x)$. Alors

$$\frac{g(y) - g(q)}{y - q} = \frac{x - p}{f(x) - f(p)}$$

est une expression définie pour tout $x \neq p$ car, par le théorème 8 du chapitre 9, f est continue sur I et par le théorème 6 du chapitre 9, f est strictement croissante (ou décroissante); donc $y \neq q$. Lorsque x tend vers p, y tend vers q car f est continue et dès lors

$$\lim_{y \to q} \frac{g(y) - g(q)}{y - q} = \lim_{x \to p} \frac{x - p}{f(x) - f(p)}$$

et

$$g'(q) = \frac{1}{f'(p)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(q))}$$

Exemple Soit f la fonction $x \to x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Cette fonction n'a pas de réciproque. Pour qu'elle en admette une, on est amené à restreindre le domaine de définition à $I = \mathbb{R}_0^+$. Alors

$$f^{-1} : x \to \sqrt{x}$$

Comme f est dérivable sur I, le théorème 3 s'applique et

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Observons que $\sqrt{x} = x^{1/2}$ et que la dérivée s'obtient comme $\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$.

Ceci invite à une généralisation qui est abordée dans les exercices et poursuivie jusqu'en rhétorique.

==

EXERCICES

9. Prouver que la dérivée de $x^{1/m}$, $m \in \mathbb{N}_0$, est égale à $\frac{1}{m}.x^{(1/m)-1}$ pour $x \neq 0$ et que cette fonction n'est pas dérivable en $x=0$, pour $m \geq 2$.

10. Prouver que

a) $(\sin x)' = \cos x$

b) $(\cos x)' = -\sin x$

c) $(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x$

d) $(\operatorname{cotg} x)' = -1/\sin^2 x$

e) $(\operatorname{arc} \sin x)' = 1/\sqrt{1-x^2} = -(\operatorname{arc} \cos x)'$

f) $(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)' = 1/\ 1+x^2 = -(\operatorname{arc} \operatorname{cotg} x)'$

==

APPROXIMATION DES FONCTIONS DERIVABLES

La notion de dérivée permet l'approximations de fonctions (dérivables) par des polynômes. Ce thème capital sera progressivement développé dans le cours de 5e et de 6e, sans être épuisé pour autant. Nous en offrons une première approche, encore bien modeste, qui nous permettra ensuite d'obtenir la dérivée d'une fonction composée (fonction de fonction).

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I et $p \in I$. Introduisons la fonction F définie par

$$F(x) = \frac{f(x) - f(p)}{x - p} - f'(p) \quad \text{si} \quad x \neq p$$

et par $\qquad F(p) = 0$

On voit que $\lim_{x \to p} F(x) = 0$ donc F est continue en p. De plus $f(x) = f(p) + (x-p)f'(p) + (x-p)F(x)$

Ainsi, nous obtenons le résultat suivant :

THEOREME 4 **Si f est une fonction dérivable sur l'intervalle I et si $p \in I$, on a**

$$f(x) = f(p) + (x-p)f'(p) + (x-p)F(x)$$

où F est une fonction continue en p avec $F(p) = 0$.

Ceci signifie qu'au voisinage de p, f peut être approchée par le polynôme linéaire $f(p)+(x-p)f'(p)$ avec une marge d'erreur qui tend vers 0 lorsque x tend vers p. Ceci rejoint l'idée géométrique selon laquelle la tangente à la courbe $y=f(x)$ en $(p,f(p))$ livre une bonne approximation de celle-ci, au voisinage de p.

==

EXERCICE

11. Comparer $f(x)$ et $f(p)+(x-p)f'(p)$ si $f(x)=x^2$, $p=3$ et $x\in\left[3-10^{-2},3+10^{-2}\right]$

==

DERIVEE DE FONCTIONS COMPOSEES

Nous arrivons à l'un des résultats les plus importants sur le calcul des dérivées, le dernier obstacle à vaincre, en vue du calcul des dérivées de fonctions élémentaires (dérivables) quelconques (à l'exception des résultats sur l'exponentiation).

THEOREME 5 **Soient f et g des fonctions dérivables sur des intervalles I_1 et I_2 tels que $f(I_1) \subseteq I_2$. Soit $p\in I_1$. Alors $g_\circ f$ est dérivable en p et**

$$((g_\circ f)'(p) = g'(f(p)).f'(p)$$

Démonstration Celle-ci est souvent présentée selon la voie historique extrêmement simplifiée:

$$\frac{(g_\circ f)(x) - (g_\circ f)(p)}{x-p} = \frac{g(f(x)) - g(f(p))}{f(x) - f(p)} \cdot \frac{f(x) - f(p)}{x-p}$$

Lorsque x tend vers p, f(x) tend vers f(p) de sorte que le second membre tend vers $g'(f(p)).f'(p)$. Malheureusement, cette démonstration est incorrecte car $f(x) - f(p)$ peut parfois s'annuler pour des valeurs de x distinctes de p, aussi voisines que l'on veut de p. C'est le cas de la fonction $f(x) = x^2.\sin(1/x)$ pour $x \neq 0$ et $f(0)=0$ en $p=0$. On se tire d'affaire grâce au théorème 4. Celui-ci livre:

$$g(f(x)) = g(f(p)) + (f(x) - f(p)).g'(f(p)) + (f(x) - f(p)).F(f(x))$$

avec

$$\lim_{f(x)\to f(p)} F(f(x)) = 0$$

Donc

$$\frac{g(f(x)) - g(f(p))}{x-p} = g'(f(p)).\frac{f(x) - f(p)}{x-p} + \frac{f(x) - f(p)}{x-p}.F(f(x))$$

Lorsque x tend vers p, f(x) tend vers f(p) parce que f est dérivable, donc continue et alors F(f(x)) tend vers 0. Donc le second membre tend vers $g'(f(p))f'(p)$ et on a ce qu'on veut.

EXemples

1) $(3x^2 - 2)^5$ a une dérivée égale à $5(3x^2 - 2)^4(3x^2 - 2)' = 5(3x^2 - 2)^4(6x) = 30x(3x^2 - 2)^4$

2) $\sin(x^2 - 2)$ a une dérivée égale à $(\cos(x^2 - 2))(x^2 - 2)' = 2x.\cos(x^2 - 2)$

Remarques

1) On dit souvent que le théorème 3 sur les dérivées de fonctions réciproques se déduit facilement du théorème 5 sur les fonctions composées. L'idée classique est d'appliquer le théorème 5 à $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, ce qui livre

$$1 = (f^{-1} \circ f)'(p) = (f^{-1})'(f(p)).f'(p)$$

donc

$$(f^{-1})'(f(p)) = \frac{1}{f'(p)}$$

Seulement, cet argument est légitime à condition que les hypothèses du théorème 5 soient vérifiées. Pour cela, il faut que f^{-1} soit définie et dérivable sur un intervalle J tel que $f(I) \subseteq J$. Pour prouver que f^{-1} est dérivable, force est de refaire la démonstration du théorème 3 donnée plus haut (ou une autre, peut-être). En fin de compte, on ne gagne rien à faire (correctement) la démonstration du théorème 3 après celle du théorème 5.

2) En termes de différentielles, le théorème 5 se traduit par

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{df} \cdot \frac{df}{dx}$$

une expression très simple qui ne doit pas nous dispenser d'un effort de rigueur.

Exemple : considérons la fonction $y = x^q$ où q est rationnel. Donc $q = m/n$ où m,n sont entiers et $n \neq 0$.

Quelle est la dérivée de y, soit dy/dx ou $(x^q)'$?

On peut décomposer y en fonction de fonction :

$$x^q = x^{m/n} = (x^{1/n})^m$$

où les deux fonctions à composer sont

$$f: x \to x^{1/n}$$
$$g: x \to x^m$$

et $y(x) = (g \circ f)(x)$. Le théorème 5 s'applique et

$$y'(x) = \left[m(f(x))^{m-1}\right]\left[\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1}\right]$$

où le second crochet applique l'exercice **9**. Donc

$$y'(x) = \frac{m}{n}.x^{\frac{m-1}{n}}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}.x^{\frac{m}{n}-1}$$

et finalement, **on généralise une formule connue pour $q \in \mathbb{N}$ mais valable pour $q \in \mathbb{Q}$:**

$$\boxed{(x^q)' = q.x^{q-1} \qquad q \in \mathbb{Q}} \qquad (1)$$

Remarques:

1. Lorsqu'une fonction est donnée de manière explicite, il importe ici comme en rhétorique de la voir parfois comme une composée de fonctions. L'étudiant doit s'exercer à une telle décomposition, de manière systématique.

2. On verra en 6e que la formule (1) demeure encore valable lorsque q est un réel quelconque.

EXERCICES

12. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

a) $(2x + 3)^3$

b) $(x+1)(2x-2)^3$

c) $\dfrac{(x-1)^2}{x^2-3x}$

d) $\sqrt{x}$

e) $\sqrt{x^2 - 9x + 5}$

f) $\sqrt[3]{x}$

g) $\sqrt[3]{x^2 - 9x + 5}$

h) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x - 1}}$

i) $(2-x).\sqrt{3+2x}$

j) $\sqrt{x + 2} + \dfrac{3}{\sqrt{x+2}}$

k) $\sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}}$

l) $\sqrt{\dfrac{(3x-1)^4}{\sqrt[3]{2 - 5x}} + 1}$

m) $\sqrt[5]{\dfrac{2x}{3x^7 + 6}}$

n) $\sqrt{x + 2 + \dfrac{3}{\sqrt{x + 2}}}$

o) $\dfrac{4x^3}{9.\sqrt[4]{x^3}}$

p) $\dfrac{1}{x^3 + 6x - 7}$

q) $\sqrt{x^4 - 6x^3 + 9x^2} - x^2 + 3x$

r) $\dfrac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1} - x} + \dfrac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1} + x}$

s) $(x-5)^6(x-1)x^7.\sqrt{x}$

13. On définit la <u>dérivée seconde f''</u> de f comme la dérivée de f', la <u>dérivée troisième f'''</u> ou $f^{(3)}$ comme $(f'')'$ et ainsi de suite, par récurrence $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

a) Calculer les dérivées successives de

$f(x) = 1/x$ et $g(x) = \sqrt{x}$

b) Soit f la fonction définie par

$f(x) = \dfrac{x^2}{2}$ pour $x \geq 0$

$f(x) = -\dfrac{x^2}{2}$ pour $x < 0$

Montrer que f est dérivable en 0 mais que f n'y est pas deux fois dérivable.

Ainsi, une fonction peut être dérivable un certain nombre de fois et cesser de l'être ensuite.

14. De tous les triangles rectangles de même hypoténuse, quel est celui dont l'aire est maximale ?

15. Trouver les minima et les maxima locaux des fonctions suivantes et esquisser un graphique de ces fonctions (déterminer les intervalles de croissance et de décroissance):

a) $\dfrac{x^2 + 2}{x - 2}$ b) $\dfrac{4(2x - 4)}{x^2 - 4}$ c) $\dfrac{x^2 - 10x + 21}{2x - 15}$

16. Quelles dimensions donner à une boîte cylindrique de volume V constant et imposé, si on veut utiliser le minimum de métal (on admet que la surface totale doit être minimale) ?

17. Inscrire, dans un carré donné, un carré de surface minimale.

18. Soit $y = \dfrac{x^2 + px + q}{x^2 - 4x + 5}$. trouver p et q pour que y soit maximum ou minimum local en (4,-1).
Est-ce possible ?

19. Etudier le graphique des fonctions suivantes en utilisant les ressources de la dérivée :

a) $x^2 + \frac{a}{x}$, $a \in \mathbb{R}$

b) $\frac{x^3}{(x-a)^2}$, $a \in \mathbb{R}$

c) $\frac{x}{x-a}$, $a \in \mathbb{R}$

20. Calculer les dérivées des fonctions suivantes

a) $\arcsin(1-x) + \sqrt{2x - x^2}$

b) $(x - \frac{1}{2}).\arcsin \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x - x^2}$

c) $\frac{\sin x}{x} + \sin 2x$

d) $2x^2 \sin x$

e) $\sin x.\mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}\, x.\mathrm{cotg}\, x$

f) $\sin^2 x$

g) $\sqrt[3]{\cos^4 x}$

h) $(1 + \mathrm{tg}\, 3x)^3$

i) $\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$

j) $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

k) $\sin \sqrt{x}$

l) $\sqrt{\sin x}$

m) $x.\arccos x + \sqrt{1 - x^2}$

n) $(\mathrm{arc\,tg}\, 2x)^2$

o) $\arccos \sqrt{1 - x^2}$

p) $\mathrm{arc\,tg} \frac{1 + x}{1 - x}$

q) $\arcsin (2x\sqrt{1 - x^2})$

r) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\text{arc sin}\,\frac{\sin^2 x - 2\cos^2 x}{1 + \cos^2 x}$

s) $\sin^6 x + 3\sin^2 x.\cos^2 x + \cos^6 x$

Que pouvez-vous conclure du résultat que vous obtenez?

t) $-\sqrt{\frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}}$

Comparez votre réponse avec celle de l'exercice 20 j. Que pouvez-vous en conclure ?

u) $\text{arc sin}(\cos x)$

v) $x^2 - 2x + 3$

De plus, trouver l'équation de la tangente aux points d'intersection de la courbe représentative de la fonction et des axes.
Trouver le point de la courbe dont la tangente fait un angle de 30° avec l'axe Ox.

w) $a.\text{arc sin}\,\frac{a}{x} + \sqrt{x^2 - a^2}$ où $|x| > a > 0$

x) $\sqrt{a^2 - x^2}\,.\left(\frac{1}{6}x(a^2 - x^2)^2 + \frac{5}{24}a^2 x(a^2 - x^2) + \frac{5}{16}a^4 x\right) + \frac{5}{16}a^6\,\text{arc sin}\,\frac{x}{a}$

y) $x^5\text{arc cos}\,\frac{x}{a} - \frac{1}{15}(3x^4 + 4x^2a^2 + 8a^4)\sqrt{a^2 - x^2}$ où $|x| < a$

z) $y = (x + \sqrt{1 + x^2})^2$

Calculer $(1+x^2)y'' + x.y' - 4y$ où y'' est la dérivée seconde de y, c'est-à-dire la dérivée de y'.

21. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

a) $4.\text{arc sin}\,\frac{1}{3\sin^2\frac{\pi}{4}}$

b) $\frac{(1 + x^2).\text{arc tg}\,x - x}{2}$

c) $\frac{\sin 2x + x.\cos 2x}{\cos 2x - x.\sin 2x}$

d) $\cancel{(x - \frac{1}{2}).\text{arc sin}\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x - x^2}}$

e) $\frac{2x^{3/2} + 3a^2x^{1/2}}{a^2 + x} - 3a.\text{arc tg}\,\frac{\sqrt{x}}{a}$

f) $\frac{a^2}{x^3}\left(2x^2\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{1}{3}(a^2 - x^2)^{3/2}\right) + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + 5.\frac{a^2}{2}.\text{arc sin}\frac{x}{a}$

g) $\frac{1}{15}\cos^3 x.(3\cos^2 x - 5)$

h) $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1 + x^3)^8} - \frac{1}{5}\sqrt[3]{(1 + x^3)^5}$

i) $\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}.\text{arc cos}\,\frac{a}{x}$ où $x > a > 0$

j) $\sqrt{2 + 2\cos 2x}.(1 + tg^2 x).\sin 2x$ où $0 < x < \frac{\pi}{2}$

22. a) Quel est le nombre positif qui ajouté à son inverse donne la plus petite somme possible?

b) Montrer que le minimum de la somme de deux nombres positifs dont le produit est constant et vaut A^2, est atteint si les nombres sont égaux.

c) Quelles sont les dimensions d'un rectangle inscrit dans un demi-cercle de rayon 10 cm tel que son aire soit maximale ?

d) Une fenêtre a la forme d'un rectangle surmonté d'un demi-cercle. Son périmètre vaut une constante p. Quelles doivent être les dimensions de la fenêtre pour avoir le maximum de lumière ?

==

DEMONSTRATION DU THEOREME 1

Cette démonstration sort des sentiers battus classiques où on la fait dépendre du théorème de Rolle (qu'on verra plus loin). Elle ne fait pas appel au théorème des valeurs intermédiaires et est complète. En fait, nous prouvons un seul des énoncés du théorème 1 dans le théorème 6 et les autres sont laissés comme exercices.

THEOREME 6 **Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle ouvert I et telle que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$. Alors f est strictement croissante sur I.**

Démonstration

1) Pour tout $a \in I$, on veut montrer que pour tout $a < b$, $b \in I$, on a $f(a) < f(b)$

Soit A l'ensemble des $c \in I$ tels que $a < c$ et $f(a) < f(p)$ pour tout p dans $]a,c[$.

Soit I^+_a l'ensemble des $d \in I$ tels que $a < d$.

On a donc $A \subseteq I^+_a$. On va prouver l'égalité de ces ensembles, ce qui achèvera la démonstration.

2) $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$

Donc, il existe un voisinage ouvert V_a de a dans lequel $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$ pour tout $x \in V_a$, $x \neq a$.

Posons $V^+_a = V_a \cap I^+_a$. Alors $V^+_a \subseteq A$ car pour tout $c \in V^+_a$ et pour tout p dans $]a,c[$, on a

$$p \in V^+_a,\ p > a,\ \frac{f(p) - f(a)}{p - a} > 0$$

donc

$$f(p) - f(a) > 0$$

donc

$$f(a) < f(p)$$

et de ce fait, $c \in A$.

3) Si $c \in A$ et $e \in V^+_c$, on a $e \in A$ car $f(a) < f(c) < f(p)$ pour tout p tel que $c \leq p \leq e$ entraîne $f(a) < f(p)$.

4) Si $A \neq I^+_a$, A possède une borne supérieure dans I^+_a car si $x \in I^+_a - A$, alors $x \geq A$ par la définition de A. Par le théorème 2 du chapitre 2, A possède alors un supremum q dans I^+_a. On va prouver que ceci conduit à une contradiction.

5)Soit $q = \sup A$. on a $q \in I^+_a$.

Si $q \in A$, $V^+_q \subseteq A$ par 3) et on a une contradiction. Donc $q \notin A$.

De ce fait, $f(q) \leq f(a)$ car $f(a) < f(q)$ et $q = \sup A$ impliquerait $q \in A$.

Alors V_q contient $r < q$ avec $a < r < q$ et $\frac{f(r) - f(q)}{r - q} > 0$; donc $f(r) < f(q)$.

Mais $r \in A$ car $q = \sup A$, donc $f(a) < f(r)$ et de ce fait $f(a) < f(q)$, qui est une contradiction.

==

EXERCICES

23. Si f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, prouver que :

a) si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$, f est strictement décroissante;
b) si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, f est croissante;
c) si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, f est décroissante.

24. Si f est une fonction dérivable croissante sur l'intervalle I, démontrer que $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

==

LE THEOREME DES ACCROISSEMENTS FINIS

Nous établissons deux résultats classiques. D'abord le théorème de Rolle dont la démonstration fait appel au théorème 4 (chapitre 9) sur les fonctions continues que nous n'avons pas pu démontrer. Le théorème de Rolle permet d'établir le théorème des accroissements finis dont il est, en fin de compte, un cas particulier. Avec le théorème des accroissements finis nous effectuons un pas de plus vers l'approximation polynômiale de fonctions dérivables.

THEOREME 7 (Rolle) **Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a < b$ dans I tels que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un élément $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.**

Démonstration

Comme f est dérivable sur I, f est continue sur I (théorème 8, chapitre 9). Sur $[a,b]$, f possède un maximum M atteint en c_1, donc $f(c_1) = M$, ainsi qu'un minimum m atteint pour c_2, donc $f(c_2) = m$, grâce au théorème 4 (chapitre 9).

Si $c_1 \neq a,b$ on va prouver que $f'(c_1)=0$. Supposons le contraire. Alors on peut supposer, pour des raisons de symétrie, que $f'(c_1) > 0$. Dès lors, il existe un voisinage V de c_1 où

$$\frac{f(x) - f(c_1)}{x - c_1} > 0 \quad \text{et comme } c_1 \neq a,b \text{, il existe un } x > c_1 \text{ dans } V.$$

d'où on obtient $f(x) > f(c_1) = M$, une contradiction. Donc $f'(c_1) = 0$.

On montre de même que si $c_2 \neq a,b$, alors $f'(c_2) = 0$. Dès lors, il reste le cas où $m = f(a) = f(b) = M$. Alors f est constante et admet une dérivée nulle partout sur $]a,b[$.

THEOREME 8 (Formule des accroissements finis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a<b$ dans I. Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Démonstration

On introduit une fonction auxiliaire F définie par

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.(x-a)$$

Alors, $F(a) = F(b) = 0$ et F est dérivable avec $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Le théorème de Rolle livre un $c \in]a,b[$ tel que $F'(c) = 0$, donc $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

La formule des accroissements finis offre un outil en vue de calculer des valeurs approchées de fonctions avec une précision connue. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a dans I.

Pour $x > a$ dans I, il existe u avec $a<u<x$, tel que $f'(u) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

donc $\quad f(x) = f(a) + (x-a)f'(u) \qquad (1)$

Si a et f(a) sont connus, on peut alors calculer f(x) de manière approchée pour autant qu'on connaisse une borne supérieure M de $|f'|$ sur $[a,x]$. En effet, dans ce cas

$$f(x) \in \left[f(a) - (x-a)M,\ f(a) + (x-a)M\right] \qquad (2)$$

Résumons ceci:

<u>THEOREME 9</u> **Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I avec $a<x$ dans I et si $|f'| \leq M$ sur $[a,x]$ alors**

$$f(a) - (x-a)M \leq f(x) \leq f(a) + (x-a)M$$

<u>Application</u> Supposons qu'on veut calculer $\sqrt{110}$.

Soit $f(x) = \sqrt{x}$ et $I = \mathbb{R}_0^+$. Alors $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ pour $x \in I$.

On sait que $\sqrt{100} = 10$. Posons donc a=100, dans le théorème 9 et x = 110. Le problème est de trouver M. Etudions la fonction $f'(x) = 1/2\sqrt{x}$ sur $[100,110]$.

Elle est décroissante. Donc sa plus grande valeur est $f'(100) = 1/20$. On peut donc prendre M = 0,05 et de ce fait

$$10 - \frac{10}{20} \leq \sqrt{110} \leq 10 + \frac{10}{20}$$

Comme $10 < \sqrt{110}$, on a $10 < \sqrt{110} \leq 10,5$. Le théorème 8 permet d'améliorer cet encadrement.

Ecrivons

$$\sqrt{110} = 10 + 10.\frac{1}{2\sqrt{c}}, \text{ avec } 100<c<110.$$

Comme f est croissante, $\sqrt{110} > \sqrt{c}$, donc

$$\sqrt{110} > 10 + \frac{10}{2\sqrt{110}}$$

d'où

$$\sqrt{110} > 10 + \frac{5\sqrt{110}}{110} = 10 + \frac{\sqrt{110}}{22}$$

$$21\sqrt{110} > 220$$

$$\sqrt{110} > \frac{220}{21} > 10,47$$

Finalement $\qquad 10,47 < \sqrt{110} \leq 10,5$

Mais ce n'est pas tout. On peut travailler à présent avec $a = (10,47)^2$ et x = 110. Sur $[a,x]$, $|f'(x)|$ est bornée supérieurement par $\frac{1}{2(10,47)} = 0,0477... \leq 0,0478$.

De ce fait, $\sqrt{110} \leq 10,47 + (110 - (10,47)^2)(0,0478) = 10,488...$

donc $\quad 110 \leq 10,489$ et on peut à présent chercher à renforcer le 2e argument de notre démarche, après avoir amélioré le premier. Un algorithme s'ébauche mais il faut reconnaître que la convergence est lente et se méfier des erreurs d'arrondis.

==

EXERCICES

25. Interpréter les théorèmes 7 et 8 en termes de graphiques et de tangentes.

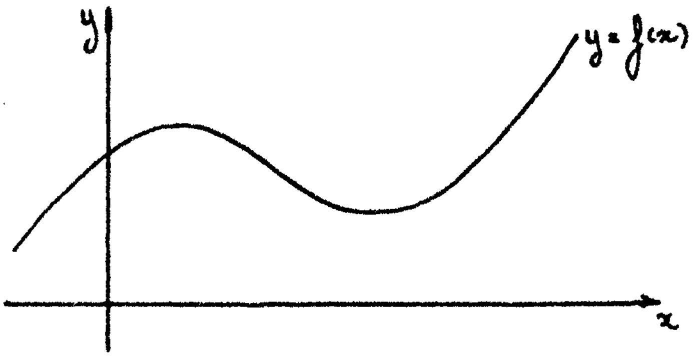
26. Poursuivre l'étude de $\sqrt{110}$ jusqu'à une marge d'erreur inférieure à 10^{-2}.

27. Calculer $\sqrt[5]{35}$ sur base des théorèmes 8 et 9 ,avec une marge d'erreur inférieure à 10^{-3}.

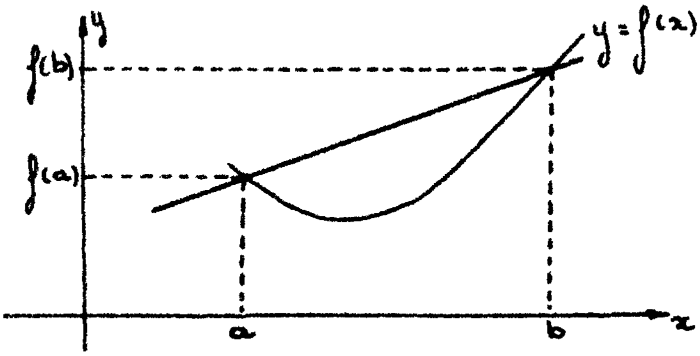
==

CONVEXITE ET DERIVEE SECONDE

Examinons à nouveau une courbe représentative de fonction comme ci-dessous.



Nous distinguons vaguement deux bosses, l'une tournée vers le bas et l'autre vers le haut. Examinons la bosse ouverte vers le haut.



Si $a < b$ sont dans le domaine de définition, la partie de la courbe située au-dessus de $[a,b]$ est située sous la sécante joignant $(a,f(a))$ et $(b,f(b))$. Ceci se traduit par

(1) $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x-a) + f(a) \geqslant f(x) \text{ pour tout } x \in [a,b]$$

d'où $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geqslant \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

C'est cette propriété que nous adoptons comme définition précise.

Une fonction f définie sur un intervalle I est <u>convexe vers le haut</u> si pour tout $a < b$ dans I,

(2) $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geqslant \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{pour tout } x \in [a,b]$$

et elle est <u>convexe vers le bas</u> si pour tout $a < b$ dans I,

(3) $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{pour tout } x \in [a,b].$$

Observons que la signification géométrique de (1) implique que (1) est équivalent à

(1)' $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x-b) + f(b) \geqslant f(x) \quad \text{donc}$$

(2)' $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$ est équivalent à (2) du fait que $x-b$ est négatif.

L'examen du dessin révèle une autre propriété. Si f est convexe vers le haut, la pente de la tangente est croissante et si f est convexe vers le bas, la pente de la tangente est décroissante. Comme la pente est donnée par f' et que la croissance ou décroissance de celle-ci est liée au signe de f", on en vient à cerner un nouveau théorème.

<u>THEOREME 10</u> **Soit f une fonction deux fois dérivable (ceci signifie que la dérivée f' admet une dérivée f") sur un intervalle I. Alors**

1) f est convexe vers le haut si et seulement si $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$;
2) f est convexe vers le bas si et seulement si $f''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$.

<u>Démonstration</u>

On se borne à la démonstration de 1). Utilisons simultanément (2) et (2)'. Donc

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

qui montre que

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leqslant \lim_{x \to b^-} \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

et comme f est dérivable en a et b, les limites à gauche et à droite coïncident avec les limites et on a

$$f'(a) \leqslant f'(b)$$

De ce fait, f' est croissante sur I et par le théorème 1, $f'' \geqslant 0$.

Passons à l'implication réciproque en supposant $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$. Alors $f'(x)$ est croissante sur I, par le théorème 1.

Posons $F(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ pour $x \in]a,b[$ dans I.

La fonction F est dérivable sur $]a,b[$, donc continue. Si (2) n'est pas réalisé, il existe $x \in [a,b]$ tel que

$$F(x) > \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = F(b).$$

Alors il existe un voisinage V de x sur lequel cette inégalité demeure partout vérifiée, en vertu de la continuité de V. Dans V, la première partie de la démonstration entraîne alors $f'' \leqslant 0$. Comme on a $f'' \geqslant 0$ par hypothèse, ceci force $f''=0$. Alors f' est croissante et décroissante, donc constante. Par le théorème des accroissements finis,

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ pour tout } x, \text{ et } \quad f(x) = f(a) + (x-a).\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ce qui montre que f est une fonction polynômiale du premier degré et celle-ci est bien convexe vers le haut pour la définition adoptée.

<u>Exemple</u> Soit $y = \frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}$

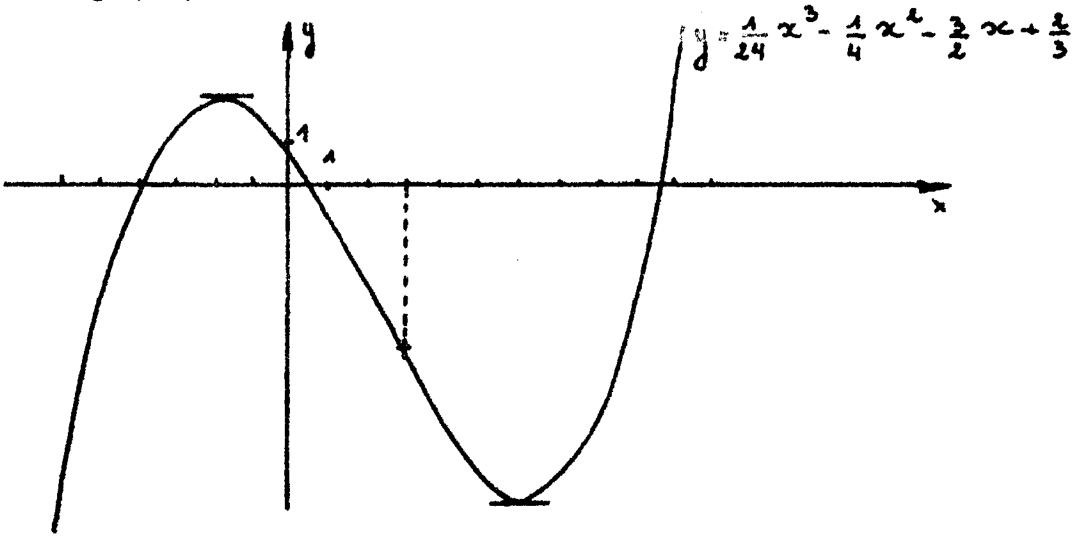
On a

$$y' = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = \frac{1}{8}.(x+2)(x-6)$$

et

$$y'' = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.(x-2)$$

On a donc $y'' > 0$ pour $x>2$ et sur cet intervalle la fonction est convexe vers le haut. on a $y'' < 0$ pour $x<2$, donc sur cet intervalle la fonction est convexe vers le bas.
Une esquisse de graphique livre



La valeur $x=2$ correspond à un changement de signe de y'', donc à un changement de convexité pour y. En $(2,-3)$, la courbe traverse sa tangente. Un tel point est appelé <u>point d'inflexion</u>.

De manière générale, si f est deux fois dérivable sur I avec $p \in I$, $f''(p)=0$ et si f'' a un signe constant sur $[a,p]$ avec $a < p$ dans I et un signe constant sur $[p,b]$ avec $p < b$ et

$f''(a)f''(b) < 0$, alors on dit que $(p,f(p))$ est un <u>point d'inflexion</u> de la courbe $y = f(x)$.

==

EXERCICES

28. Trouver les intervalles de concavité vers le haut et vers le bas, les points d'inflexion et les intervalles de croissance et de décroissance des fonctions suivantes. Reporter ces renseignements sur une esquisse de graphique:

a) $3x^5 - 10x^3$

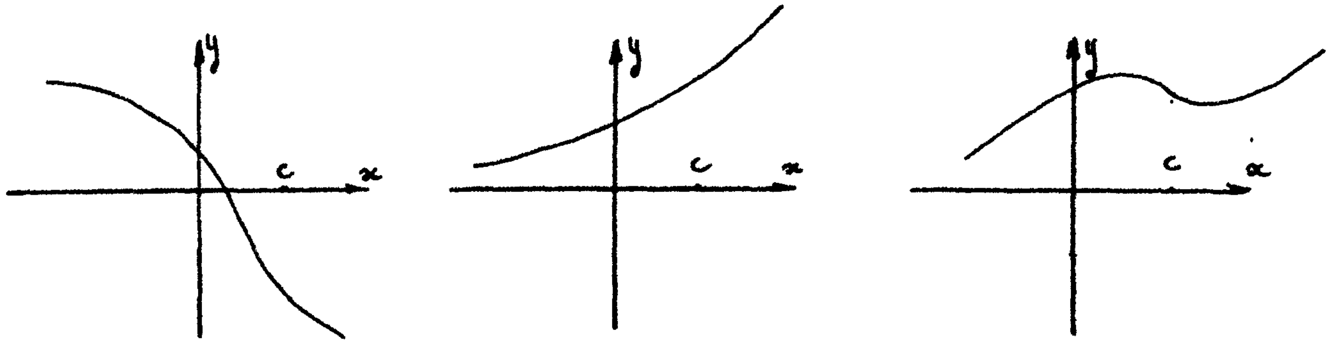
b) $4x^3 - 3x^5$

c) $x - x^{-1}$

d) $\dfrac{a^2x}{x^2 + a^2}$, $a \in \mathbb{R}^+$

29. Lesquels des graphiques suivants peuvent décrire une fonction f si

a) $f(c) > 0$
b) $f'(c) < 0$
c) $f''(c) > 0$



==

L'idée de maximum et de minimum est maintenant liée à celle de dérivée... D'autres méthodes sont parfois plus efficaces. En voici un exemple.

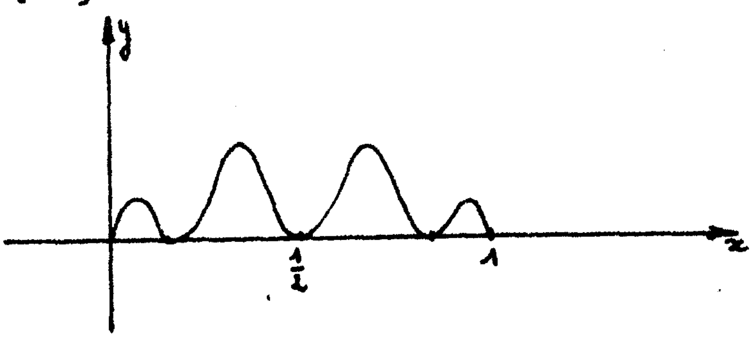
Pour quelle(s) valeur(s) de x l'expression $P = (x - x^2)(1 - 2x)^2(1 - 8x + 8x^2)^2$ est-elle maximale sur $[0,1]$?

1) L'approche par les dérivées n'est pas très encourageante.

2) $P(x) \geq 0$ sur $[0,1]$ car $x - x^2 \geq 0$ sur $0,1$.

3) Les zéros de P sont 0, $1/2 - \sqrt{2}/4$, $1/2$, $1/2 + \sqrt{2}/4$, 1 avec une multiplicité 2 pour les 3 zéros intermédiaires.

4) Vu la continuité de P, l'ensemble des valeurs prises par P entre deux zéros consécutifs est un intervalle $[0,M]$. Donc l'allure du graphique de P est



5) Chaque facteur du second degré de P est symétrique par rapport à $x=1/2$; donc c'est le cas de $y=P(x)$ également. On se ramène donc à une recherche sur $[0, 1/2]$.

6) Il peut être adroit de translater 1/2 sur 0 par $x = x' + 1/2$. Ceci livre

$$y = x'^2(1 - 4x'^2)(-1 + 8x'^2)^2$$

7) Etudions $Q(x) = x^2(1 - 4x^2)(-1 + 8x^2)^2$ sur $[0, 1/2]$
ou mieux

$$R(x) = x(1 - 4x)(-1 + 8x)^2 \quad \text{sur} [0, 1/\sqrt{2}].$$

donc $Q = R(x^2)$

8) Si R est maximale en x_o (localement), Q est maximale en x_o.

9) R est symétrique par rapport à $x = 1/8$ donc il suffit de l'étudier sur $[0, 1/8]$.

10) $R(x) = (x - 4x^2)(-1 + 8x^2)$

$\frac{dR}{dx} = (-1 + 8x)(-128x^2 + 32x - 1)$ s'annule outre en 1/8, en $\frac{2 \pm \sqrt{2}}{16}$; donc sur $[0, 1/8]$ le maximum cherché est obtenu pour $x = \frac{2 - \sqrt{2}}{16}$.

11) donc Q est maximal pour $x = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{4}$ et $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{4}$

12) P est maximal (avec la même valeur !) en 4 points qui sont

$$\frac{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}}{4} \quad \frac{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}{4} \quad \frac{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}}{4} \quad \frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}{4}$$

13) Au passage, en 8), <u>on devine un théorème</u>

si g est une fonction croissante sur l'ensemble I ($g: I \to \mathbb{R}$)
f est définie sur g(I) et maximale en x_o

alors $f(g(x))$ est maximale en $g^{-1}(x_o)$.

===

LA REGLE DE L'HOSPITAL

Nous donnons brièvement, sans démonstration, un résultat permettant de calculer certaines limites résistant aux méthodes que nous connaissons déjà.

Soient f et g des fonctions dérivables à dérivée continue sur un intervalle I avec $g'(x) \neq 0$ sur I et p proche de I dans $\overline{\mathbb{R}}$.

1) Supposons que $\lim_{x \to p} f(p) = \lim_{x \to p} g(p) = 0$ et que $\lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Alors

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

<u>Exemple 1</u> $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x}$

On a $f(x) = x\cos x - \sin x$, $g(x) = x$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ et $g'(x) = 1 \neq 0$ sur $\mathbb{R}$.

Donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x\sin x}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

<u>Exemple 2</u> si $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ n'avait pas été démontré, on pourrait espérer utiliser la règle ci-dessus. Il s'agirait d'un cercle vicieux car pour déterminer $(\sin x)' = \cos x$, on a dû utiliser déjà la limite cherchée.

<u>Exemple 3</u> $$\lim_{x\to\infty} \frac{1/x^2}{\sin^2 2/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2/x^3}{-(4/x^2)\sin 2/x.\cos 2/x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{\sin 4/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1/x^2}{-(4/x^2)\cos 4/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{4\cos 4/x} = 1/4$$

2) Si $\lim\limits_{x\to p} f(x) = +\infty = \lim\limits_{x\to p} g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

<u>Exemple 4</u> $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{3/\cos^2 3x}{5/\cos^2 5x} = \frac{3}{5}.\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 5x}{\cos^2 3x}$$

$$= \frac{3}{5}.\left[\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{\cos 3x}\right]^2$$

$$= \frac{3}{5}.\left[\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{5\sin 5x}{3\sin 3x}\right]^2 = \frac{5}{3}$$

==

EXERCICES

30. Calculer si possible les limites suivantes:

a) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \sin x}{\cos x}$

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x - 1}{\cos^2 x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x + \sin x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right]$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^3 - 4x^2 - x + 2}{3x^2 - 6x + 3}$

h) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x - a}$

d) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos 3x}$

e) $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\sin\alpha - \alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \alpha}$

j) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^{n} + 1}{x^{p+1} - x^{p} - x + 1}$

==

RESUME

THEOREME 1 Soit f une fonction d'une variable réelle définie sur un intervalle I (ouvert ou fermé, segment, demi-droite ou droite) et supposons que f possède une dérivée f'.
Alors

(1) $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ implique que f est croissante sur I (c'est-à-dire $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) \leq f(x_2)$);

(2) $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$ implique que f est décroissante sur I (c'est-à-dire $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) \geq f(x_2)$);

(3) $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ implique que f est strictement croissante sur I (c'est-à-dire $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) < f(x_2)$);

(4) $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$ implique que f est strictement décroissante sur I (c'est-à-dire $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) > f(x_2)$).

Réciproquement, si f est (strictement) croissante sur I, $f'(x) \geq (>) 0$ pour tout x et si f est (strictement) décroissante sur I, $f'(x) \leq (<) 0$ pour tout x.

Maximum :

On dit que f possède un <u>maximum local</u> en p s'il existe un intervalle $[a,p]$ avec $a \in I$, $a < p$ sur lequel f est croissante et un intervalle $[p,b]$ avec $b \in I$ et $p < b$ sur lequel f est décroissante.

Minimum :

De même, f possède un <u>minimum local</u> en p s'il existe un intervalle $[a,p]$ avec $a \in I$, $a < p$ sur lequel f est décroissante et un intervalle $[p,b]$ avec $b \in I$ et $p < b$ sur lequel f est croissante.

THEOREME 2 Si f est dérivable sur un intervalle ouvert I et si f possède un minimum local ou un maximum local en $p \in I$, alors $f'(p) = 0$.

THEOREME 3 Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I et possédant une réciproque f^{-1}. Soient $p \in I$ et $q = f(p)$. Si $f'(p) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en q et

$$(f^{-1})'(q) = \frac{1}{f'(p)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(q))}$$

THEOREME 4 Si f est une fonction dérivable sur l'intervalle I et si $p \in I$, on a

$$f(x) = f(p) + (x-p)f'(p) + (x-p)F(x)$$

où F est une fonction continue en p avec $F(p) = 0$.

THEOREME 5 Soient f et g des fonctions dérivables sur des intervalles I_1 et I_2 tels que $f(I_1) \subseteq I_2$. Soit $p \in I_1$. Alors $g \circ f$ est dérivable en p et

$$(g \circ f)'(p) = g'(f(p)).f'(p)$$

THEOREME 6 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle ouvert I et telle que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$. Alors f est strictement croissante sur I.

THEOREME 7 (Rolle) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a < b$ dans I tels que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un élément $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

THEOREME 8 (Formule des accroissements finis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a < b$ dans I. Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

THEOREME 9 Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I avec $a < x$ dans I et si $|f'| < M$ sur $[a,x]$ alors

$$f(a) - (x-a)M \leqslant f(x) \leqslant f(a) + (x-a)M$$

Convexité

Une fonction f définie sur un intervalle I est convexe vers le haut si pour tout $a < b$ dans I,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geqslant \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{pour tout } x \in [a,b]$$

et elle est convexe vers le bas si pour tout $a < b$ dans I,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{pour tout } x \in [a,b]$$

THEOREME 10 Soit f une fonction deux fois dérivable (ceci signifie que la dérivée f' admet une dérivée f'') sur un intervalle I. Alors

1) f est convexe vers le haut si et seulement si $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$;
2) f est convexe vers le bas si et seulement si $f''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$.

Point d'inflexion

De manière générale, si f est deux fois dérivable sur I avec $p \in I$, $f''(p)=0$ et si f'' a un signe constant sur $[a,p]$ avec $a < p$ dans I et un signe constant sur $[p,b]$ avec $p < b$ et $f''(a).f''(b) < 0$, alors on dit que $(p,f(p))$ est un point d'inflexion de la courbe $y = f(x)$.

Règle de L'Hospital

Soient f et g des fonctions dérivables à dérivée continue sur un intervalle I avec $g'(x) \neq 0$ sur I et p proche de I dans $\overline{\mathbb{R}}$.

1) Supposons que $\lim\limits_{x \to p} f(p) = \lim\limits_{x \to p} g(p) = 0$ et que $\lim\limits_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Alors

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2) Si $\lim_{x \to p} f(x) = +\infty = \lim_{x \to p} g(x)$ et si $\lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Calcul de dérivées

f,g,h représentent respectivement les fonctions f(x), g(x),h(x) tandis que c représente un réel.

$x' = 1$

$c' = 0$

$(f+g+h)' = f' + g' + h'$

$(f.g.h)' = f'.g.h + f.g'.h + f.g.h'$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$(\sqrt{x})' = 1/2\sqrt{x}$ | $(\sqrt{f})' = \frac{1}{2\sqrt{f}} f'$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ | $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{1}{f^2}.f'$

$(x^c)' = c.x^{c-1}$ | $(f^c)' = c.f^{c-1}.f'$

$(\sin x)' = \cos x$ | $(\sin f)' = f'.\cos f$

$(\cos x)' = -\sin x$ | $(\cos f)' = -f'.\sin f$

$(tg\ x)' = 1/\cos^2 x$ | $(tg\ f)' = f'.\frac{1}{\cos^2 f}$

$(cotg\ x)' = -1/\sin^2 x$ | $(cotg\ f)' = -f'.\frac{1}{\sin^2 f}$

$(arc\ \sin x)' = 1/\sqrt{(1-x^2)}$ | $(arc\ \sin f)' = f'.\frac{1}{\sqrt{1-f^2}}$

$(arc\ \cos x)' = -1/\sqrt{(1-x^2)}$ | $(arc\ \cos f)' = -f'.\frac{1}{\sqrt{1-f^2}}$

$(arc\ tg\ x)' = 1/(1+x^2)$ | $(arc\ tg\ f)' = f'.\frac{1}{1+f^2}$

$(arc\ cotg\ x)' = -1/(1+x^2)$ | $(arc\ cotg\ f)' = -f'.\frac{1}{1+f^2}$

==