11 LA STRUCTURE AFFINE D'UN ESPACE VECTORIEL

5h/s, 7h/s

Nous reprenons l'étude de la géométrie en liaison avec les espaces vectoriels. Il sera utile de revoir dans VM4, les chapitres 12 (Espaces vectoriels) et 14 (Géométrie vectorielle), ainsi que le chapitre 6 (Transformations linéaires) du présent cours.

BILAN D'ESPACES VECTORIELS

Nous avons examiné la notion d'espace vectoriel en 4e. Sans trop nous en apercevoir, des exemples nouveaux sont apparus par la suite. Reprenons d'abord une définition. Le corps des scalaires utilisés pour multiplier les vecteurs sera toujours $\mathbb{R}$ mais on pourrait remplacer celui-ci par tout autre corps, comme $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, etc...

Un <u>espace vectoriel</u> (reel) V est constitué par

1) un groupe commutatif V,+
2) une fonction de $\mathbb{R} \times V$ vers V qui associe à tout réel $r \in \mathbb{R}$ et à tout vecteur $\vec{v} \in V$, un vecteur noté $r\vec{v}$; cette fonction est soumise aux conditions

2.1) $r(s\vec{v}) = (rs)\vec{v}$
2.2) $(r+s)\vec{v} = r\vec{v} + r\vec{s}$ pour tout $r,s \in \mathbb{R}$
2.3) $r(\vec{v}+\vec{w}) = r\vec{v} + r\vec{w}$ pour tout $\vec{v},\vec{w} \in V$
2.4) $1\vec{v} = \vec{v}$

Ces axiomes se sont dégagés à la fin du 19e siècle et ils se sont imposés au 20e, par leur efficacité.

En voici quelques conséquences faciles mais utiles. Si $\vec{0}$ est le neutre de V,+ on a

2.5) $\boxed{0\vec{v} = \vec{0}}$ pour tout $\vec{v} \in V$, car pour un $r \in \mathbb{R}$,

$$\underbrace{(r+0)\vec{v}}_{r\vec{v}} = r\vec{v} + 0\vec{v} \qquad r\vec{v} = r\vec{v} + \vec{0}, \quad \text{donc } \vec{0} = 0\vec{v}$$

2.6) $\boxed{r\vec{0} = \vec{0}}$ pour tout $r \in \mathbb{R}$, car pour un $\vec{v} \in V$,

$$r\underbrace{(\vec{v} + \vec{0})}_{r\vec{v}} = r\vec{v} + r\vec{0}$$

2.7) $\boxed{(-r)\vec{v} = -(r\vec{v}) = r(-\vec{v})}$ pour tout $r \in \mathbb{R}$ et tout $\vec{v} \in V$ car

$$\underbrace{(r-r)\vec{v}}_{r\vec{v} + (-r)\vec{v}} = 0\vec{v} = \vec{0} \qquad \text{donc } (-r)\vec{v} = -(r\vec{v})$$

et

$$\underbrace{r(\vec{v}-\vec{v})}_{r\vec{0}} = r(\vec{v}) + r(-\vec{v}) \qquad r\vec{0} = \vec{0} \qquad \text{donc } r(-\vec{v}) = -(r\vec{v})$$

Dans les exercices, on prouvera quelques propriétés analogues, qui méritent également d'être connues. On y traite aussi les exemples fondamentaux qui justifient l'introduction d'une théorie générale.

EXERCICES

1. Dans un espace vectoriel V, démontrer :

a) $r\vec{v} = \vec{0}$ implique $r = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$

b) $r(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = r\vec{a} + r\vec{b} + r\vec{c}$ pour tout $r \in \mathbb{R}$ et $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$

c) Généraliser b) en introduisant le signe sommatoire

d) $(r + s + t)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a} + t\vec{a}$ pour tout $r, s, t \in \mathbb{R}$ et $\vec{a} \in V$

e) Généraliser d) en utilisant le signe sommatoire .

f) $(r + s)(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b} + s\vec{a} + s\vec{b}$ pour tout $\vec{a}, \vec{b} \in V$ et $r, s \in \mathbb{R}$

g) Généraliser f) , e) et d) de manière unifiée.

2. Expliquer et justifier que les ensembles suivants constituent un espace vectoriel réel :

a) $\mathbb{R}^2$ b) $\mathbb{R}^3$ c) $\mathbb{R}$ d) généraliser a),b),c)

e) l'ensemble $\mathbb{R}^{2\times 2}$ des matrices 2x2 à coefficients réels

f) l'ensemble $\mathbb{R}^{2\times 3}$ des matrices 2x3 à coefficients réels

g) généraliser e),f) en y englobant a),b),c) et d).

3. <u>Espace des fonctions sur un ensemble</u>

C'est cet exemple qui justifie à lui seul, par les conséquences énormes qu'il a sur les mathématiques toutes entières, l'introduction des espaces vectoriels.

Soit I un ensemble. On note $\mathbb{R}^{I}$ l'ensemble des fonctions f définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si $f, g \in \mathbb{R}^{I}$, on définit leur somme f+g par

$$f+g : I \longrightarrow \mathbb{R} : x \longrightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

Si $f \in \mathbb{R}^{I}$ et $r \in \mathbb{R}$, on définit la fonction rf par

$$rf : I \longrightarrow \mathbb{R} : x \longrightarrow (rf)(x) = rf(x)$$

Montrer que $\mathbb{R}^{I}$ est un espace vectoriel.

4. Rechercher un exemple d'ensemble structuré qui vérifie certains des axiomes d'espaces vectoriels et pas les autres.

SOUS-ESPACES VECTORIELS

Soit V un espace vectoriel. Nous appelons <u>sous-espace</u> W de V une partie de V telle que

(1) $\overline{v},\overline{w} \in W$ implique $\overline{v}+\overline{w} \in W$
(2) $r \in \mathbb{R}$, $\overline{v} \in W$ implique $r\overline{v} \in W$
(3) $\overline{0} \in W$

Dès que ces conditions sont remplies, W est lui-même un espace vectoriel car :

* l'associativité et la commutativité sont automatiques dans W,+
* $\overline{0}$ est neutre de W,+
* si $\overline{v} \in W$, alors $(-1)\overline{v} \in W$ par (2) et $(-1)\overline{v} = -(1\overline{v}) = -\overline{v}$ par (2.7) et (2.4). Donc $\overline{v} \in W$ entraine $-\overline{v} \in W$
* (2.1),(2.2),(2.3) et (2.4) sont automatiques dans W,+

Les sous-espaces vectoriels ont un double avantage. <u>D'une part</u>, ils introduisent une structure géométrique dans un espace vectoriel donné; nous verrons que l'analogie de celle-ci avec la structure affine de l'espace peut être poussée très loin.

<u>D'autre part</u>, pour vérifier qu'un ensemble donné est un espace vectoriel il est avantageux de le voir si possible comme un sous-espace d'un espace vectoriel déjà connu, car alors il suffit de vérifier les trois conditions (1),(2),(3) au lieu de vérifier les neuf axiomes habituels des espaces vectoriels. On pourra mesurer cet avantage dans les exercices suivants.

En classe, la définition d'un sous-espace suscite presque toujours une même question: la condition (3) est-elle bien nécessaire ? Ne résulte-t-elle pas des deux autres ? Un élève propose volontiers que par (2), si $\overline{v}$ est dans W, $-\overline{v}$ est alors dans W, donc par (1) $\overline{v} + (-\overline{v}) = \overline{0}$ est dans W. Une autre proposition est : comme $0 \in \mathbb{R}$, si $\overline{v}$ est dans W, on a alors $0.\overline{v} = \overline{0}$ est dans W. Nous signalons alors que ces idées sont bonnes mais qu'elles comportent une faille. C'est une excellente <u>leçon de logique</u>. Le raisonnement effectué est correct à condition qu'il existe un élément $\overline{v}$ dans W donc que W soit non-vide. L'ensemble vide vérifie (1) et (2) mais pas (3). On peut remplacer (3) par la condition équivalente : W est non-vide.

EXERCICES

5. Vérifier que les ensembles de fonctions suivants sont des espaces vectoriels:

a) l'ensemble des polynômes (en une indéterminée) à coefficients réels
b) l'ensemble des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et qui sont dérivables en tout point de I
c) l'ensembles des polynômes $ax^2 + bx + c$ où $a,b,c \in \mathbb{R}$

6. Soit V un espace vectoriel et X un ensemble de vecteurs. <u>Une combinaison linéaire</u> des vecteurs de X est un vecteur

$$r_1.\overline{x}_1 + r_2.\overline{x}_2 + \dots + r_n.\overline{x}_n = \sum_{i=1}^{n} r_i.\overline{x}_i$$

... $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ sont dans X et $r_1, r_2, \dots, r_n$ sont dans $\mathbb{R}$.
Montrer que l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de X est un sous-espace de V.

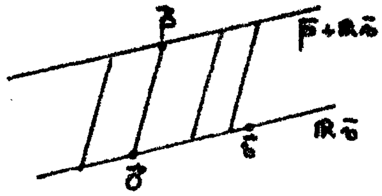
DROITES

Si V est un espace vectoriel, nous allons introduire une structure géométrique dans V qu'on appelle <u>structure affine</u> et qui constitue un <u>espace affin</u> A(V). Par définition, les <u>points</u> de l'espace affin sont les vecteurs de V. Passons à la définition des droites.

Soit $\bar{v} \neq \bar{0}$ un vecteur de V. (Lorsque nous considérons $\bar{v}$ comme un point, nous écrivons plutôt v.) L'ensemble $\mathbb{R}.\bar{v}$ des combinaisons linéaires de $\bar{v}$ est un sous-espace vectoriel de V. Si on remplace $\bar{v}$ par $\bar{w} \in \mathbb{R}.\bar{v}$, $\bar{w} \neq \bar{0}$, on a visiblement $\mathbb{R}.\bar{v} = \mathbb{R}.\bar{w}$ car $\bar{w} = r\bar{v}$ pour un $r \in \mathbb{R}$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}.\bar{w}$ implique $\bar{x} = s\bar{w} = s(r\bar{v}) = (sr)\bar{v} \in \mathbb{R}.\bar{v}$, donc $\mathbb{R}.\bar{w} \subseteq \mathbb{R}.\bar{v}$. De même, $\bar{v} = r^{-1}\bar{w}$ et $\mathbb{R}.\bar{v} \subseteq \mathbb{R}.\bar{w}$.

Un ensemble tel que $\mathbb{R}.\bar{v}$ est appelé <u>droite vectorielle</u> de V. Toutes les droites vectorielles passent par $\bar{0}$.

Soit $\bar{p} \in V$ et $\mathbb{R}.\bar{v}$ une droite vectorielle. L'ensemble



$$\bar{p} + \mathbb{R}\,\bar{v} = \{\, \bar{p} + t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$$

est une <u>droite affine</u> ou <u>droite</u> et nous décidons que les droites affines en provenance de la même droite vectorielle $\mathbb{R}\,\bar{v}$ sont <u>parallèles</u>.

Observons que les droites vectorielles sont les cas particuliers des droites affines.

Si $\bar{q} \in \bar{p} + \mathbb{R}.\bar{v}$, on voit que $\bar{q} + \mathbb{R}.\bar{v} = \bar{p} + \mathbb{R}.\bar{v}$ car

$$\bar{q} = \bar{p} + r\bar{v} \Rightarrow \bar{q} + s\bar{v} = (\bar{p} + r\bar{v}) + s\bar{v} = \bar{p} + (r+s)\bar{v}$$
$$\Rightarrow \bar{q} + \mathbb{R}.\bar{v} \subseteq \bar{p} + \mathbb{R}.\bar{v}$$

et $\bar{p} = \bar{q} + (-r)\bar{v} \Rightarrow \bar{p} + \mathbb{R}\,\bar{v} \subseteq \bar{q} + \mathbb{R}\,\bar{v}$.

Dès lors, on a les propriétés suivantes:

- si D est une droite affine et p un point, il passe une et une seule parallèle à D par p.

- si p, q sont des points distincts, il passe une et une seule droite par ces points.

EXERCICES

7. Les droites $D_1 = ab$ et $D_2 = cd$ de $A(\mathbb{R}^3)$ sont-elles sécantes, parallèles ou gauches ?

a) $a = (1,0,0)$ $\quad$ $c = (5,-2,1)$
$\quad$ $b = (-1,2,3)$ $\quad$ $d = (0,0,0)$

b) $a = (1,0,0)$ $\quad$ $c = (5,-2,-1)$
$b = (2,3,-3)$ $\quad$ $d = (6,1,-4)$

c) $a = (1,0,0)$ $\quad$ $c = (5,-2,0)$
$b = (2,3,-3)$ $\quad$ $d = (4,-3,+9/7)$

8. Soit V un espace vectoriel et $\vec{p} \in V$. La translation t déterminée par $\vec{p}$ est la fonction

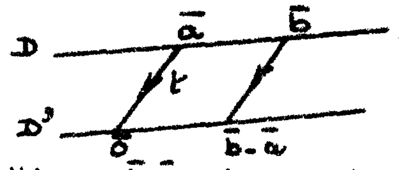
$$t : V \longrightarrow V \; : \; \vec{x} \longmapsto \vec{x} + \vec{p}$$

Montrer a) que t transforme toute droite affine D en une droite parallèle à D;
b) que les translations constituent un groupe commutatif.

DROITES DE $A(\mathbb{R}^3)$

1) Voici deux points distincts $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ et $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ dans $\mathbb{R}^3$. Comment peut-on décrire tous les points $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ de la droite $D = \overline{ab}$?

2) Il existe une translation t transformant $\vec{a}$ en $\vec{0}$ et celle-ci transforme D en une droite D' parallèle à D.



L'image de $\vec{b}$ par t est $\vec{b}-\vec{a}$. Comme $\vec{a} \neq \vec{b}$, $\vec{b}-\vec{a} \neq \vec{0}$ et D' est l'ensemble des vecteurs ou points multiples de $\vec{b}-\vec{a}$, donc
$D' = \{ \vec{p} = r(\vec{b}-\vec{a}) \mid r \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}(\vec{b}-\vec{a})$

On dit que $\vec{b}-\vec{a}$ est un vecteur directeur de D' mais aussi de D. Tout multiple non nul de $\vec{b}-\vec{a}$ est également un vecteur directeur de D' et de D.

Grâce à la définition des droites affines vue dans la section précédente

$$\boxed{\overline{ab} = D = \{ \vec{p} = \vec{a} + r(\vec{b}-\vec{a}) \mid r \in \mathbb{R} \} = \vec{a} + \mathbb{R}(\vec{b}-\vec{a})}$$

Ceci est l'équation vectorielle de $\overline{ab}$.

On utilise en quelque sorte $\vec{a}$ comme origine et on lui ajoute tous les multiples du vecteur directeur $\vec{b}-\vec{a}$. Ce qui précède est indépendant de $\mathbb{R}^3$ et est valable dans tout espace vectoriel V.

3) Dans $A(\mathbb{R}^3)$, du fait que $\vec{x} \in D$, l'équation vectorielle de D devient
$$(x_1, x_2, x_3) = (a_1, a_2, a_3) + r(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$
et celle-ci livre trois équations paramétriques de D, à savoir:

$$\boxed{D \begin{cases} x_1 = a_1 + r(b_1 - a_1) \\ x_2 = a_2 + r(b_2 - a_2) \\ x_3 = a_3 + r(b_3 - a_3) \end{cases} \qquad r \in \mathbb{R}}$$

Ici, $b_1 - a_1$, $b_2 - a_2$, $b_3 - a_3$ sont appelés coefficients directeurs. Ce sont les coordonnées (ou composantes) du vecteur directeur $\vec{b}-\vec{a}$.

4) Enfin, la présence d'un même paramètre r dans les trois équations paramétriques permet d'écrire celles-ci sous la forme

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{x_3 - a_3}{b_3 - a_3}$$

ce qui livre deux relations entre les coordonnées (x_1 , x_2 , x_3) d'un point de D, soit

$$\boxed{D \ : \quad \frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{x_3 - a_3}{b_3 - a_3}}$$

<u>équations statiques de D</u>

Cette expression par les équations statiques s'utilise facilement à partir des données $\overline{a}$ et $\overline{b}$ et D apparaît comme l'ensemble des solutions d'un système de deux équations linéaires à trois inconnues.

Les équations statiques comportent un danger. Comment les interpréter si un dénominateur est nul ?

Si $b_3 - a_3 = 0$, on voit par les équations paramétriques que les équations statiques deviennent

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_3 - a_3} \quad \text{et} \quad x_3 = a_3$$

Si $b_3 - a_3 = 0 = b_2 - a_2$, elles deviennent $x_2 = a_2$, $x_3 = a_3$.

Et si $b_1 - a_1 = 0 = b_2 - a_2 = b_3 - a_3$? Cela ne peut se produire car $\overline{a} \neq \overline{b}$ et le vecteur directeur est non-nul.

5) Soit (a,b,c) le vecteur directeur d'une droite D passant par le point (x_1 , y_1 , z_1). Alors D est définie par

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

Si E est une autre droite définie par

$$\frac{x - x_2}{a'} = \frac{y - y_2}{b'} = \frac{z - z_2}{c'}$$

quelle est la condition pour que D et E soient parallèles ?

Il faut que ces droites aient une même parallèle à l'origine! donc il faut et il suffit que les vecteurs directeurs (a,b,c) et (a',b',c') soient multiples l'un de l'autre.

Donc $\boxed{D \ // \ E \quad \text{si et seulement si} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}}$

Dès lors, les droites ab et cd sont parallèles si et seulement si leurs coefficients directeurs (c'est-à-dire les coordonnées des vecteurs directeurs) sont proportionnels , ou

$$ab \parallel cd \quad \text{si et seulement si} \quad \frac{b_1 - a_1}{d_1 - c_1} = \frac{b_2 - a_2}{d_2 - c_2} = \frac{b_3 - a_3}{d_3 - c_3}$$

EXERCICES

9. Refaire l'exercice 7 et mesurer ainsi les progrès accomplis dans le contrôle des droites de $\mathbb{R}^3$.

10. Refaire la théorie qu'on vient de décrire dans $\mathbb{R}^3$ pour le plan $\mathbb{R}^2$ et pour l'espace $\mathbb{R}^4$.

11. Dans $A(\mathbb{R}^3)$, donner l'équation des droites passant par a et b:

a) a $(4,2,5)$
   b $(1,7,6)$

b) a $(3,-4,2)$
   b $(5,-4,1)$

c) a $(2,0,1)$
   b $(-3,0,1)$

12. Dans $A(\mathbb{R}^3)$, on donne les points $a(3,0,0)$, $b(0,-2,0)$ et $c(0,0,5)$. Quelles sont les coordonnées des sommets du parallélépipède ayant oa, ob, oc comme arêtes ?

Même question avec les points $a(1,2,3)$, $b(4,5,0)$, $c(-1,-3,2)$.

13. Dans $A(\mathbb{R}^3)$, on donne la droite d'équations $D : \begin{cases} x + y = 3 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$

Quelle est l'équation de la droite parallèle à D et passant par le point $a(1,2,3)$?

14. Dans $A(\mathbb{R}^3)$, on donne $D_1 : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

et $D_2 : \begin{cases} x = 3 + \mu \\ y = 2 - 2\mu \\ z = c + 2\mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$

Trouver c pour que D_1 et D_2 soient deux droites sécantes.

15. Dans $A(\mathbb{R}^3)$, quelle est l'équation de la droite de vecteur directeur $(1, 3, 0)$ et passant par le point $(2, 0, 1)$?

16. Dans $A(\mathbb{R}^3)$, quelle est l'équation de la droite parallèle à la droite D et passant par le point a, dans les cas suivants :

a) $D : \begin{cases} x + 2y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$ et a $(-1, 1, 1)$

b) $D : \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$ et $a\ (2, -1, 2)$

c) $D : \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y-1}{3} = z - 1$ et $a\ (-3, -2, 1)$

17. Dans $A(\mathbb{R}^3)$, on donne deux droites A et B par leurs équations :

$$A : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \qquad \text{et } B : \begin{cases} x = -1 - 2\mu \\ y = \quad 3\mu \qquad \mu \in \mathbb{R} \\ z = 2 - 4\mu \end{cases}$$

1) A et B sont-elles gauches, parallèles ou sécantes ?
2) Déterminer le point a de A et le point b de B de telle manière que la droite ab soit parallèle à la droite $C : \dfrac{x}{2} = \dfrac{-y}{2} = z$.

18. Définir vectoriellement le <u>milieu</u> de deux points dans un espace affin A(V).

a) Montrer que cette notion est conservée par translation, que deux points et leur milieu sont sur une même droite.

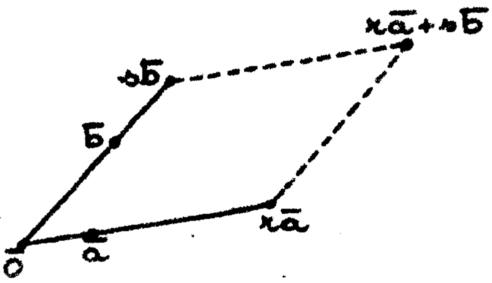
b) Si a,b,c sont des points non-alignés de A(V), montrer que les médianes du triangle a,b,c ont un point commun g (centre de gravité de a,b,c) situé aux 2/3 de chaque médiane, à partir d'un sommet. Quelles sont les coordonnées de g?

c) Chercher une généralisation de b), impliquant quatre points non coplanaires de A(V).

19. Montrer qu'une affinité du plan $A(\mathbb{R}^2)$ transforme toute droite en une droite. Généraliser en définissant au préalable une affinité de $A(\mathbb{R}^3)$.

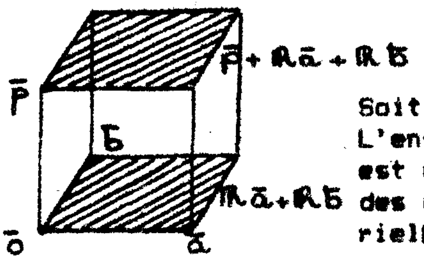
PLANS

Reprenons un espace vectoriel V et l'espace affin A(V). Nous avons défini les points et droites de A(V), ainsi que le parallélisme des droites. Nous passons à l'introduction des plans en commencant par les plans vectoriels.



Soient $\bar{a}$, $\bar{b}$ des vecteurs linéairement indépendants dans V, c'est-à-dire que $\bar{b} \notin \mathbb{R}\bar{a}$.

Le __plan vectoriel__ $\overline{oab}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $\bar{a}$ et $\bar{b}$, c'est-à-dire $\overline{oab} = \mathbb{R}\bar{a} + \mathbb{R}\bar{b} = \{r\bar{a} + s\bar{b} \mid r,s \in \mathbb{R}\}$.
C'est le plus petit sous-espace de V contenant $\bar{a}$ et $\bar{b}$ (affirmation non démontrée).



Soit $\bar{p} \in V$ et $\mathbb{R}\bar{a} + \mathbb{R}\bar{b}$ un plan vectoriel. L'ensemble $\bar{p} + \mathbb{R}\bar{a} + \mathbb{R}\bar{b} = \{\bar{p} + r\bar{a} + s\bar{b} \mid r,s \in \mathbb{R}\}$ est un __plan affin__ ou __plan__ , et nous décidons que des plans affins en provenance du même plan vectoriel $\mathbb{R}\bar{a} + \mathbb{R}\bar{b}$ sont __parallèles__.

On démontre les propriétés suivantes:

(1) par trois points non alignés passe un et un seul plan;

(2) si Π est un plan et si a, b sont des points dans Π , alors la droite ab est dans Π ;

(3) si Π est un plan contenant la droite ab et si $p \in \Pi$, alors la parallèle à ab par p est contenue dans Π ;

(4) si Π est un plan et p un point, il passe __un__ plan parallèle à Π par p.

EXERCICES

20. Démontrer toutes les affirmations non établies dans la section précédente.

21. Si Π est un plan de A(V), D une droite dans Π et p un point de Π avec $p \notin D$, prouver que p est sur __une__ droite de Π qui est disjointe de D et que cette droite est la parallèle à D par p.

22. Dans $A(\mathbb{R}^3)$, on donne deux points a, b d'une part, et trois points c, d, e d'autre part. Que peut-on dire de l'intersection de la droite ab avec le plan cde ?

a) a = (1,0,0) , b = (0,0,0) , c = (1,1,1) , d = (-1,1,1) , e = (0,0,1)

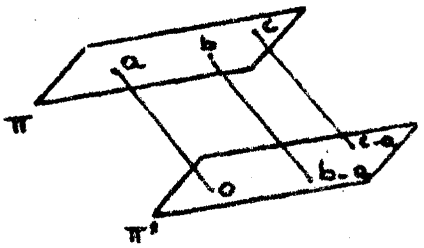
b) a = (1,0,1) , b = (0,0,0) , c = (1,1,1) , d = (-1,1,1) , e = (0,0,1)

c) a = (1,0,1) , b = (0,0,1) , c = (1,1,1) , d = (-1,1,1) , e = (0,0,1)

PLANS DE $A(\mathbb{R}^3)$

1) Voici trois points non-alignés $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ et $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ dans $A(\mathbb{R}^3)$. Comment peut-on décrire tous les points $x = (x_1, x_2, x_3)$ du plan π = abc ?

2) Il existe une translation t transformant $\vec{a}$ en $\vec{o}$ et celle-ci transforme π en un plan π' parallèle à π.



L'image de $\vec{b}$ par t est $\vec{b} - \vec{a}$ et celle de $\vec{c}$ est $\vec{c} - \vec{a}$.
Les points $\vec{o}$, $\vec{c} - \vec{a}$, $\vec{b} - \vec{a}$ sont non alignés (pourquoi ?). Donc ils déterminent le plan vectoriel $\pi' = \{\vec{p} = r(\vec{b}-\vec{a}) + s(\vec{c}-\vec{a}) \mid s, r \in \mathbb{R}\}$.

On dit que $\vec{b} - \vec{a}$ et $\vec{c} - \vec{a}$ sont des <u>vecteurs directeurs</u> de π' et de π. Toute combinaison linéaire non nulle de $\vec{b} - \vec{a}$ et de $\vec{c} - \vec{a}$ est également un vecteur directeur de π' et de π. Grâce à la définition des plans affins obtenue dans la section précédente,

$$\boxed{abc = \pi = \{\vec{a} + r(\vec{b}-\vec{a}) + s(\vec{c}-\vec{a}) \mid r,s \in \mathbb{R}\} = \vec{a} + \mathbb{R}(\vec{b}-\vec{a}) + \mathbb{R}(\vec{c}-\vec{a})}$$

Ceci est l' <u>équation vectorielle</u> de abc.

3) Dans $A(\mathbb{R}^3)$, le fait que $\vec{x} \in \pi$ ou l'équation vectorielle de π, se traduit d'abord par

$$(x_1, x_2, x_3) = (a_1, a_2, a_3) + r(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) + s(c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3) \qquad r, s \in \mathbb{R}$$

qui livre trois <u>équations paramétriques</u> de π , à savoir

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = a_1 + r(b_1 - a_1) + s(c_1 - a_1) \\ x_2 = a_2 + r(b_2 - a_2) + s(c_2 - a_2) \\ x_3 = a_3 + r(b_3 - a_3) + s(c_3 - a_3) \end{cases} \qquad r,s \in \mathbb{R}}$$

4) En tirant r et s des deux premières équations paramétriques et en les remplaçant dans la troisième, on obtient une équation unique du premier degré liant x_1, x_2, x_3 qui est l'<u>équation statique</u> de π . Nous ne formulerons pas ce calcul de manière générale car il est très lourd. L'élève s'exercera à l'exécuter sur des exemples numériques. Voici un modèle.

Exemple: a = (1,0,0), b = (0,2,0), c = (1,1,3)

$$\begin{cases} x_1 = 1 - r \\ x_2 = 2r + s \end{cases}$$

$x_3 = 3s$

donc $r = 1 - x_1$, $s = x_3/3$ et $x_2 = 2(1 - x_1) + x_3/3$

d'où $2x_1 + x_2 - x_3/3 - 2 = 0$

5) Dans le cas général, on observe que l'équation finale est de la forme

(1) $Ax + By + Cz + D = 0$; $A, B, C, D \in \mathbb{R}$

qu'on a déjà rencontrée dans VM4, chapitre 5.

On peut se servir directement de (1) pour déterminer les coefficients A,B,C,D en fonction des points a,b,c donnés au départ. C'est une deuxième méthode pour obtenir l'équation statique de π.

6) Toute équation $Ax + By + Cz + D = 0$, où A,B,C ne sont pas simultanément nuls, est l'équation d'un plan. C'est ce qu'on avait déjà vu dans VM4 mais en adoptant une définition géométrique du plan. Notre nouvelle définition vectorielle s'ajuste-t-elle ?

Soit π l'ensemble des solutions de l'équation

$$Ax + by + Cz + D = 0$$

π est non-vide car si $A \neq 0$, le point $(-A^{-1}D, 0, 0) \in \pi$. Soit t la translation appliquant un point p de π sur O. L'image de π par t est π' d'équation $Ax + By + Cz = 0$ (exercice). L'ensemble π' est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (exercice) et ce sous-espace est un plan vectoriel (exercice).

7) A quelles conditions deux plans vectoriels π_1, π_2 d'équations

$$\pi_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 z = 0$$
$$\pi_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 z = 0$$

sont-ils confondus ?

Il faut, d'une part, que π_1 et π_2 aient la même intersection avec le plan d'équation $z = 0$ et ce plan a la structure de $A(\mathbb{R}^2)$. Les intersections sont données par

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y = 0 \\ A_2 x + B_2 y = 0 \end{cases}$$

Il faut donc que $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$

D'autre part, dans le plan d'équation $x = 0$, il faut que

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Finalement, $\pi_1 = \pi_2$ si et seulement si $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

Dans cette démonstration, on a imprudemment divisé par A , B , C sans supposer qu'ils sont non nuls. Comme pour les équations statiques de droites, la formule obtenue s'interprète sans peine si par exemple $A_2 = 0$. Elle exige alors

$A_4 = 0$. La démonstration se laisse compléter en conséquence.

8) Deux plans π_1, π_2 d'équations

$$\pi_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$
$$\pi_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

sont parallèles si et seulement si $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

Ceci résulte de 7) et de la définition du parallélisme.

9) Deux plans π_1, π_2 d'équations

$$\pi_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$
$$\pi_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

qui sont non parallèles, ont une droite commune.

Preuve: on peut supposer que $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$

L'intersection de π_1 et de π_2 avec le plan $z = 0$ livre deux droites non parallèles qui ont donc un point commun $a \in \pi_1 \cap \pi_2$.
L'intersection de π_1 et de π_2 avec le plan $z = 1$ livre de même deux droites non parallèles qui ont donc un point commun $b \in \pi_1 \cap \pi_2$.
De ce fait, $a \neq b$ et la droite $ab \subseteq \pi_1 \cap \pi_2$.

EXERCICES

23. Reprendre l'exercice 26. A-t-on progressé en rapidité ?

24. Démontrer les affirmations non prouvées dans la partie théorique.

25. Dans $A(\mathbb{R}^3)$, quelles sont les équations d'une droite
    a) parallèle au plan vectoriel oe_1e_2
    b) parallèle au plan vectoriel oe_3e_2
    c) parallèle au plan vectoriel oe_3e_1
    d) parallèle à l'axe oe_1
    e) parallèle à l'axe oe_2
    f) parallèle à l'axe oe_3
et quelles sont les équations des axes ?

26. Dans $A(\mathbb{R}^3)$, on donne la droite d'équations $D : \begin{cases} x + 2y - 5z = 2 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$
Quelles sont les intersections de cette droite avec les plans qui passent par les axes ?

27. Dans $A(\mathbb{R}^3)$, on donne les points $a(-3,1,0)$ et $b(1,2,-3)$.
    a) Quelle est l'équation de ab ?
    b) Quelle est l'intersection de ab avec le plan (x,z) ?
    c) Quel est le point de D dont la troisième coordonnée vaut 6 ?

28. Dans $A(\mathbb{R}^3)$, on donne les points $a(1,-2,3)$, $b(3,4,1)$ et $c(1,5,-3)$.

a) Quelles sont les équations de la droite oa ?
b) Quelles sont les équations de la droite parallèle à oa et passant par b ?
c) Quelles sont les équations de la droite parallèle à ob et passant par a ?
d) Quelles sont les équations de la droite parallèle à l'axe x (c'est-à-dire oe_1) et passant par a ?
e) Quelles sont les équations de la droite passant par b et parallèle à l'axe z (c'est-à-dire oe_3) ?
f) Quelles sont les équations de la droite parallèle à ab et passant par c ?
g) Quelles sont les équations de la droite passant par a, parallèle au plan oe_1e_2 et s'appuyant sur la droite ob ?

29. Dans $A(\mathbb{R}^3)$, trouver les équations paramètriques et statique du plan abc dans les cas suivants:

a) a(1,2,3)	b(-1,0,1)	c(2,-3,0)
b) a(1,1,1)	b(2,2,2)	c(-4,-4,-4)
c) a(5,4,6)	b(3,4,9)	c(2,4,7)

30. Dans $A(\mathbb{R}^3)$, déterminer le réel x pour que les points a,b,c,d soient coplanaires:

a(1,2,1) b(1,3,0) c(-1,0,5) d(3,-6,x)

31. Dans $A(\mathbb{R}^3)$, on donne les plans α : $z = 0$ et β : $2x + 2y + z = 0$. Déterminer les équations paramètriques de $D = \alpha \cap \beta$

32. Dans $A(\mathbb{R}^3)$, à quelle condition la droite d'équations

$$\frac{x-a}{\alpha} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-c}{\gamma}$$

et le plan d'équation $Ax + By + Cz + D = 0$ sont-ils parallèles ?

33. Dans $A(\mathbb{R}^3)$, écrire l'équation de deux plans passant par la droite d'équations

$$\frac{x-a}{\alpha} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-c}{\gamma}$$

34. Dans $A(\mathbb{R}^3)$, si D est la droite commune aux plans

π_1 : $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$
π_2 : $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$

tout plan passant par D est représenté par une équation

$$\lambda(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + \mu(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0 \qquad (1)$$

où λ, $\mu \in \mathbb{R}$ et $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$. Réciproquement, pour tout $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$, (1) représente un plan passant par D.

Démontrer (attention à la rigueur !)

35. Dans $A(\mathbb{R}^3)$, déterminer l'ensemble des plans passant par D : $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

Parmi ceux-ci, déterminer
a) celui qui comprend (0,0,0)

b) celui qui est parallèle à l'axe y
c) celui qui est parallèle au plan $x = 2$.

36. Dans $A(\mathbb{R}^3)$, quelle est l'équation des plans (X,Y), (X,Z) et (Y,Z), où X,Y,Z représentent les axes ?

37. Dans $A(\mathbb{R}^3)$, quelle est l'équation d'un plan
a) parallèle au plan (X,Y)
b) parallèle au plan (X,Z)
c) parallèle au plan (Y,Z)
d) parallèle à l'axe X
e) parallèle à l'axe Y
f) parallèle à l'axe Z ?

38. Dans $A(\mathbb{R}^3)$, quelle est l'équation du plan comprenant la droite
$$A : \begin{cases} x = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$
et parallèle à la droite $B : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{4} = z - 1$?

39. Dans $A(\mathbb{R}^3)$, on donne les droites $A : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{3} = 1 - z$

et $B : \begin{cases} x = 1 \\ y + 3z = 1 \end{cases}$

On demande l'équation du plan α qui passe par l'origine et qui est parallèle au plan (A,B).

40. Dans $A(\mathbb{R}^3)$, quel est le point de percée de $D : \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ dans α
où α est le plan dont l'équation est recherchée à l'exercice 39 ?
41. Dans $A(\mathbb{R}^3)$, on donne la droite $A : \begin{cases} x = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$,

la droite $B : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{4} = z - 1$ et la droite $C : \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

Quel est le point de percée de C dans le plan (A,B) ? Attention, cet exercice cache une attrape !

42. Dans $A(\mathbb{R}^3)$, quelle est l'équation du plan (A,B) si

$A : \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ 9x + 18y + 5z - 9 = 0 \end{cases}$ et $B : x - 1 = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-2}{3}$

43. Dans $A(\mathbb{R}^3)$, écrire l'équation de la droite qui comprend le point a(1,1,1) et qui s'appuie sur A et B :

$A : \begin{cases} x = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ $B : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{4} = z - 1$

44. Dans $A(\mathbb{R}^3)$, trouver le point de percée de A dans α, dans les cas suivants (si du moins ce point existe) :

a) $A : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad k \in \mathbb{R}$

$\alpha : x - 2y + 3 = 0$

b) $A : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad k \in \mathbb{R}$

$\alpha : x - 3y + 2z - 6 = 0$

c) $A : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-1}{3}$

$\alpha : 5x - y - 2z = 0$

45. Dans $A(\mathbb{R}^3)$, on donne les points $a(1,3,5)$, $b(3,1,-1)$ et $c(4,-6,2)$. On demande l'équation
  a) du plan oab
  b) du plan passant par c et parallèle au plan oab
  c) du plan passant par a et parallèle au plan (Y,Z)
  d) du plan abc
  e) du plan passant par o et parallèle au plan abc
  f) du plan (a,X) déterminé par le point a et l'axe X
  g) du plan parallèle à la droite ab et comprenant l'axe X
  h) du plan parallèle à l'axe Y et comprenant la droite ac
  i) du plan parallèle à oa et comprenant la droite bc

46. Dans $A(\mathbb{R}^3)$, un cube de fromage $C = \{ (x,y,z) \mid 0 \leq x,y,z \leq 1 \}$ est coupé selon les plans $X = Y$, $Y = Z$ et $Z = X$. Combien de morceaux obtient-on ? (On ne déplace aucun morceau de fromage avant d'avoir terminé de les découper).

47. Dans $A(\mathbb{R}^3)$, on donne le tétraèdre abcd: $a(4,-1,2)$, $b(-6,9,4)$ et le milieu de cd : $m(5,2,-7)$. Trouver le centre de gravité de la face bcd.

48. Dans $A(\mathbb{R}^3)$, on donne les droites A, B, C :

$A : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 4x + y + 2z - 3 = 0 \end{cases} \qquad B : \dfrac{x-1}{2} = -y - 4 = \dfrac{z-2}{3}$

$C : \begin{cases} x - y = 0 \\ 3y + z = 0 \end{cases}$

Trouver la droite P s'appuyant sur A, s'appuyant sur B et parallèle à C. Trouver les points d'appuis de P sur A et B.

49. Dans $A(\mathbb{R}^3)$, on donne $A : x - 4 = \dfrac{y+b}{3} = \dfrac{z-1}{5}$

et $\alpha : ax + 3y + bz - 8 = 0$
Trouver a et b pour que $A \subset \alpha$.

50. Dans $A(\mathbb{R}^3)$, on donne $A : \begin{cases} 5x - 7y - 5z + 6 = 0 \\ x - 3y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$

$D : \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-7}{4}$

Trouver le plan α parallèle à D et comprenant A.

Dans $A(\mathbb{R}^3)$, chercher les éventuelles relations de parallélisme et d'inclusion entre D_1 ; D_2 ; d_1 ; d_2 et d_3 .

$D_1 : (x,y,z) = (1,0,3) + \lambda\,(2,0,6)$ $\qquad\qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$D_2 : (x,y,z) = (1,2,3) + \lambda\,(1,1,5)$

$d_1 : (x,y,z) = (1,2,3) + \lambda\,(1,0,3) + \mu(0,1,2)$

$d_2 : (x,y,z) = (1,2,3) + \lambda\,(3,0,9) + \mu(1,0,5)$

$d_3 : (x,y,z) = (1,1,5) + \lambda\,(0,2,4) + \mu(-1,0,-3)$

RESUME

Un espace vectoriel réel V est constitué par

1) un groupe commutatif V,+

2) une fonction de R x V dans V qui associe à tout réel r de $\mathbb{R}$ et à tout vecteur $\overline{v}$ de V, un vecteur noté $r\overline{v}$ qui appartient à V; cette fonction est soumise aux conditions

2.1) $r(s\overline{v}) = (rs)\overline{v}$

2.2) $(r+s)\overline{v} = r\overline{v} + s\overline{v}$ pour tout $r,s \in \mathbb{R}$

2.3) $r(\overline{v}+\overline{w}) = r\overline{v} + r\overline{w}$ pour tout $\overline{v},\overline{w} \in V$

2.4) $1\overline{v} = \overline{v}$

Sous-espace vectoriel

Un sous-espace W d'un vectoriel V est lui-même un espace vectoriel si

1) $\overline{v},\overline{w} \in W$ implique $\overline{v}+\overline{w} \in W$

2) $r \in \mathbb{R}$ et $\overline{v} \in W$ implique $r\overline{v} \in W$

3) $\overline{0} \in W$

La condition 3) peut être remplacée par : W est non-vide.

Droite de A($\mathbb{R}^3$) passant par les points distincts $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ et $\overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$

a) Equation vectorielle de ab :

$$ab = \left\{ \overline{p} = \overline{a} + r(\overline{b} - \overline{a}) \mid r \in \mathbb{R} \right\} = \overline{a} + \mathbb{R}(\overline{b} - \overline{a})$$

b) Equations paramétriques de ab :

$$\begin{cases} x = a_1 + r(b_1 - a_1) \\ y = a_2 + r(b_2 - a_2) \\ z = a_3 + r(b_3 - a_3) \end{cases} \quad r \in \mathbb{R}$$

c) Equation statique ou cartésienne de ab :

$$\frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{z - a_3}{b_3 - a_3} \quad \text{si } a_1 \neq b_1 \text{ et } a_2 \neq b_2 \text{ et } a_3 \neq b_3$$

$$\frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2} \text{ et } z = a_3 \quad \text{si } a_1 \neq b_1 \text{ et } a_2 \neq b_2 \text{ et } a_3 = b_3$$

$$y = a_2 \text{ et } z = a_3 \quad \text{si } a_1 \neq b_1 \text{ et } a_2 = b_2 \text{ et } a_3 = b_3$$

Deux droites de A($\mathbb{R}^3$) sont parallèles si leurs vecteurs directeurs sont proportionnels.

Plan de A($\mathbb{R}^3$) passant par les points non-colinéaires $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ et $\overline{c} = (c_1, c_2, c_3)$

a) Equation vectorielle de abc :

$$abc = \left\{ \overline{a} + r(\overline{b} - \overline{a}) + s(\overline{c} - \overline{a}) \mid r,s \in \mathbb{R} \right\} = \overline{a} + \mathbb{R}(\overline{b} - \overline{a}) + \mathbb{R}(\overline{c} - \overline{a})$$

b) Equations paramétriques de abc :

$$abc : \begin{cases} x = a_1 + r(b_1 - a_1) + s(c_1 - a_1) \\ y = a_2 + r(b_2 - a_2) + s(c_2 - a_2) \\ z = a_3 + r(b_3 - a_3) + s(c_3 - a_3) \end{cases} \qquad r,s \in \mathbb{R}$$

c) Equation statique ou cartésienne de abc :

abc : $Ax + By + Cz + D = 0$ (1)
avec $(A,B,C) \neq (0,0,0)$, où A,B et C sont tels que les coordonnées de a,b,c vérifient (1).

Les plans $\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$
et $\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$
sont parallèles si et seulement si

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

===