CHAPITRE 18 Géométrie métrique dans E_3

DANS CE CHAPITRE, TOUS LES REPERES SONT ORTHONORMES !!!

Les lettres minuscules représentent des points,
les lettres majuscules représentent des droites,
les lettres grecques représentent des plans.

Rappelons que - Deux droites sont orthogonales $\Leftrightarrow$ leurs directions sont perpendiculaires.
- Deux droites sont perpendiculaires $\Leftrightarrow$ elles sont orthogonales et sécantes.

Quelques questions

1. Dans tout plan, il existe .... direction(s) perpendiculaire(s) à une autre.
2. Par tout point, on peut mener ....plan(s) perpendiculaire(s) à une droite.
3. l' ensemble des droites perpendiculaires à une autre en un de ses points, forme ....
4. Une droite est perpendiculaire à un plan $\Leftrightarrow$ ....
5. $\left\{\begin{array}{l} D_1 \parallel D_2 \\ D_1 \perp \alpha \end{array}\right. \Longrightarrow D_2 \; .... \; \alpha$
6. $\left\{\begin{array}{l} \alpha \parallel \beta \\ D \perp \alpha \end{array}\right. \Longrightarrow D \; .... \; \beta$
7. Un angle droit se projette orthogonalement suivant un angle droit $\Leftrightarrow$ ....
8. Si A et B sont deux droites gauches et o un point extérieur à ces droites, comment déterminer une droite comprenant o et orthogonale à A et B?
9. Comment déterminer une droite comprenant un point donné O, orthogonale à une droite donnée A et s' appuyant sur une deuxième droite B?
10. Comment déterminer la perpendiculaire à deux droites gauches?

11. Si une droite est perpendiculaire à un plan, tout plan contenant cette droite est ....

12. Un plan est perpendiculaire à un autre plan $\Leftrightarrow$ ....

13. $\left\{\begin{array}{l} \alpha \perp \beta \\ D \perp \alpha \end{array}\right. \Longrightarrow D \; .... \; \beta$

14. $\left\{\begin{array}{l} \alpha \perp \beta \\ A \perp \alpha \\ B \perp \beta \end{array}\right. \Longrightarrow A \; .... \; B$

15. $\left\{\begin{array}{l} \alpha \perp \pi \\ \beta \perp \pi \\ \alpha \cap \beta = D \end{array}\right. \Longrightarrow D \; .... \; \pi$

16. $\left\{\begin{array}{l} \alpha \perp \beta \\ D \perp \beta \end{array}\right. \Longrightarrow D \; .... \; \alpha$

17. $\left\{\begin{array}{l} \alpha \parallel \beta \\ \alpha \perp \pi \end{array}\right. \Longrightarrow \beta \; .... \; \pi$

18. $\left\{\begin{array}{l} \alpha \perp \pi \\ \beta \perp \pi \end{array}\right. \Longrightarrow \alpha \; .... \; \beta$

19. Comment définir les notions suivantes :
    - Angle de deux directions de droites.
    - Angle de deux vecteurs.
    - Angle d' une droite et d' un plan.
    - Angle de deux plans.
    - Distance entre deux plans parallèles.
    - Distance d' un point à un plan.
    - Distance entre deux droites gauches.

20. Trouver l' ensemble des points équidistants de
    - deux points
    - trois points
    - quatre points
    - cinq points.

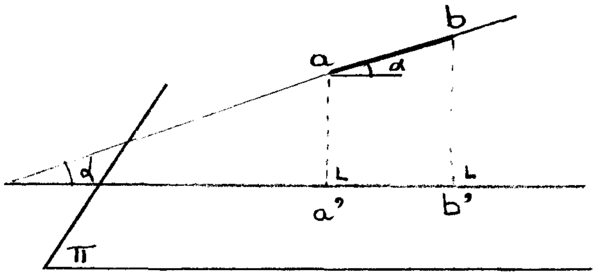
21. Trouver l' ensemble des plans équidistants de deux points donnés.

22. Si abcd sont quatre points non colinéaires tels que ab est orthogonale à cd et ad orthogonale à bc et que
aa' est la perpendiculaire au plan (bcd) avec a' $\in$ (bcd),
bb' est la perpendiculaire au plan (acd) avec b' $\in$ (acd),
cc' est la perpendiculaire au plan (abd) avec c' $\in$ (abd),
dd' est la perpendiculaire au plan (abc) avec d' $\in$ (abc),
montrer que aa',bb',cc' et dd' sont concourantes.

23. On donne un carré abcd. Par a, on mène la perpendiculaire au plan (abcd) sur laquelle on prend un point s, s n' appartenant pas à (abcd).
a) Démontrer que (sab) $\perp$ (sbc)
b) Démontrer que (sao) $\perp$ (sbd) où o est le centre du carré abcd.

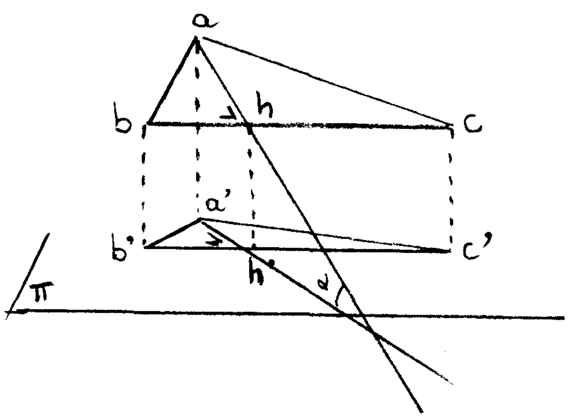
Projections orthogonales

a) Projection d' un segment sur un plan



$|a'b'| = |ab|.\cos \alpha$
où α est l' angle entre ab et π

b) Projection d' un triangle sur un plan quand un des côtés du triangle est parallèle au plan de projection.



La surface du triangle abc de hauteur ah vaut

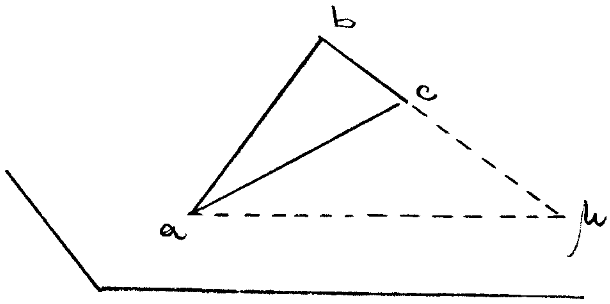
$$S_{abc} = \frac{|bc|.|ah|}{2}$$

Si h' est la projection de h, a'h' est la hauteur du triangle a'b'c'. (Pourquoi?) et
La surface du triangle a'b'c' vaut

$$S_{a'b'c'} = \frac{|b'c'|.|a'h'|}{2} = \frac{|bc|.|ah|.\cos\alpha}{2} = S_{abc}.\cos\alpha$$

où α est l' angle entre le triangle et le plan de projection.

c) Projection d' un triangle quelconque



On construit aμ parallèle à π

Soit μ' la projection du point μ

$S_{a'b'c'} = S_{a'b'\mu'} - S_{a'c'\mu'}$

$= S_{ab\mu}.\cos\alpha - S_{ac\mu}.\cos\alpha$

$= (S_{ab\mu} - S_{ac\mu}).\cos\alpha$

$= S_{abc}.\cos\alpha$

(α est l'angle entre le plan du triangle abc et du plan π)

d) Projection d' une surface polygonale quelconque

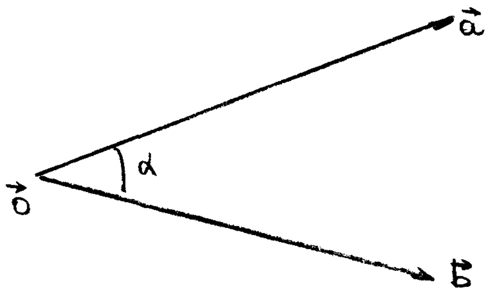
On découpe la surface en triangles et on obtient à nouveau

$$S' = S.\cos\alpha$$

(α est l'angle entre le plan du polygone et du plan π)

Produit scalaire de deux vecteurs de E_3

Rappels et extension : Pout tout $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in E_3$; $k \in \mathbb{R}$



$\vec{a} . \vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|. \cos\alpha \in \mathbb{R}$

$\vec{a} . \vec{b} = \vec{b} . \vec{a}$

$\vec{a} . (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} . \vec{b} + \vec{a} . \vec{c}$

$k . (\vec{a} . \vec{b}) = (k . \vec{a}). \vec{b}$

$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} . \vec{a}}$

$\vec{a} \perp \vec{b} \Longrightarrow \vec{a} . \vec{b} = 0$

$\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ ou $\vec{a} = \vec{0}$ ou $\vec{b} = \vec{0}$

Expression analytique du produit scalaire dans une base orthonormée

Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthonormée c' est à dire une base telle que

$$\begin{cases} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0 \\ |\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1 \end{cases}$$

Soit $\vec{a}\ (x_1, y_1, z_1)$
et $\vec{b}\ (x_2, y_2, z_2)$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1.\vec{e}_1 + y_1.\vec{e}_2 + z_1.\vec{e}_3) \cdot (x_2.\vec{e}_1 + y_2.\vec{e}_2 + z_2.\vec{e}_3)$$
$$= x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.\ z_2$$

On a donc

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha \\ &= x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.\ z_2 \end{aligned}}$$

Conséquences :

a) $|a| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

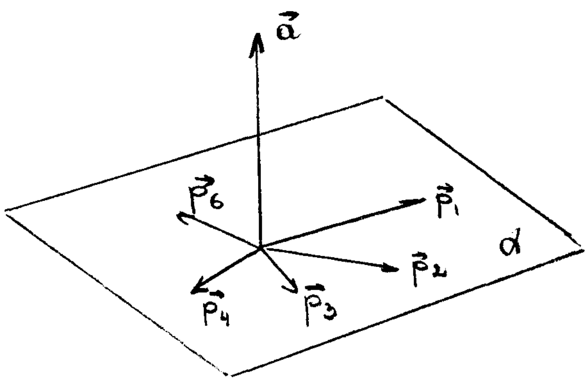
b) $|ab| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

c) $\cos\alpha = \dfrac{x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.\ z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

vecteur normal à un plan α ($\vec{n}_\alpha$)

a) Cas où α est un plan passant par l' origine

Traitons un exemple facilement généralisable :



Soit $\vec{a}\ (2,3,5)$, $\vec{a} \perp \alpha$

Tout vecteur $\vec{p}\ (x,y,z)$ de α est tel que $\vec{a} \perp \vec{p}$

ou $\vec{a} \cdot \vec{p} = 0$

ou $2x + 3y + 5z = 0$

On en conlut que α a pour équation :

α : $2x + 3y + 5z = 0$

$$\boxed{\alpha : ax + by + cz = 0 \iff \vec{n}_\alpha\ (a\ ,\ b\ ,\ c)}$$

a) Cas d' un plan ne passant pas par l' origine

Soit β : $ax + by + cz + d = 0$

Le plan α parallèle à β et passant par l' origine a pour équation :

$$ax + by + cz = 0$$

et a pour vecteur normal

$$\vec{n}_\alpha\ (a\ ,\ b\ ,\ c)$$

Comme tout vecteur perpendiculaire à α est perpendiculaire à B, on a

$$\vec{n}_\alpha = \vec{n}_\beta$$

et

$$\boxed{\begin{array}{ll} \beta : ax + by + cz + d = 0 \iff & \vec{n}_\beta\ (a\ ,\ b\ ,\ c) \\ & \text{ou } (ka,\ kb,\ kc) \quad k \in \mathbb{R}_0 \end{array}}$$

Exercices :

1. On donne les points a(-2, 3, 1) ; b(4, 0, 2) ; c(1, 2, -1)
   Que vaut l' angle entre les vecteurs $\vec{ab}$ et $\vec{ac}$?
2. Quelle est l' équation du plan α qui est
   perpendiculaire à D : $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{4}$
   et qui passe par le point (1,0,3) ?
3. Quelle est l' équation de la droite D qui est
   perpendiculaire au plan α : $3x - y + 2z - 6 = 0$
   et qui passe par l' origine ?
4. Quelle est l' équation du plan B qui est
   perpendiculaire au plan α : $3x - y + 2z = 2$,
   qui passe par le point a(3,1,-2) et par l' origine ?
5. Que vaut l' angle entre le plan α : $2x - y + 2z = 4$ et la droite
   D : $\begin{cases} 3x + y + z = 2 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$?
6. Quelle est l' équation du plan B qui est

perpendiculaire au plan α : $2x - y + 2z = 4$

et qui comprend la droite D : $\begin{cases} 3x + y + z = 2 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$

7. Que vaut la distance de p(2,1,3) au plan α : $x - y + 3z = 5$?
8. Etablir une formule donnant la **distance d' un point $p(x_1,y_1,z_1)$ au plan α : $ax + by + cz + d = 0$.**
9. Trouver l' ensemble des points équidistants aux plans:

   α : $x - y + 2z = 0$ et

   β : $6x + 3y - 2z = 8$
10. Que vaut la distance du point p(5,-3,2) à la droite

    D : $\frac{x - 1}{3} = \frac{y + 3}{2} = 2 - z$?
11. Quelle est l' équation de la droite passant par le point p (-1,3,-2) et qui est parallèle à la droite

    D' : $\begin{cases} -4x + y - 3z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$?
12. Quelle est l' équation de la projection orthogonale de la droite

    D : $\begin{cases} x + 2y - 3z + 4 = 0 \\ 3x + 5y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$

    sur le plan π : $x - y + 5 = 0$?

Petit tableau " résumé" ... A connaître ...Presque toutes ces formules se retrouvent en une seconde ... alors ... pas de bourrage de crâne !!!

Soient a (x_1, y_1, z_1)

D_1 une droite de vecteur directeur (a_1, b_1, c_1)

D_2 une droite de vecteur directeur (a_2, b_2, c_2)

α : $ax + by + cz + d = 0$

β : $a'x + b'y + c'z + d' = 0$

* $D_1 \parallel D_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

* $D_1 \perp D_2 \Leftrightarrow \vec{v}_{D_1} \perp \vec{v}_{D_2} \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

* Angle entre D_1 et D_2 : $\cos\theta = \dfrac{a_1.a_2 + b_1.b_2 + c_1.\ c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\ .\ \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$

* $\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \vec{n}_\alpha \parallel \vec{n}_\beta \Leftrightarrow \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$

* $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\beta \Leftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0$

* Angle entre D et α :

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{a.a_1 + b.b_1 + c.c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\ .\ \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

* $D_1 \parallel \alpha \Leftrightarrow \vec{v}_{D_1} \perp \vec{n}_\alpha \Leftrightarrow a_1a + b_1b + c_1c = 0$

* $D_1 \perp \alpha \Leftrightarrow \vec{v}_{D_1} \parallel \vec{n}_\alpha \Leftrightarrow \dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1} = \dfrac{c}{c_1}$

* Distance entre a et α = $\dfrac{|\ ax_1 + by_1 + cz_1 + d\ |}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

<u>Exercices :</u>

13. On donne les points a (1,1,1) ; b(-1,1,2) ; c(2,-3,-1)
    Déterminer l' équation cartésienne du plan passant par le point (0,1,0) et parallèle au plan (abc).
14. On donne les points a (1,1,1) ; b(-1,1,2)
    Déterminer les équations cartésienne et paramétrique de la droite passant par le point (0,1,0) et parallèle à la droite ab.
15. Déterminer l' équation du plan perpendiculaire à l' axe X et passant par le point (3,0,0).
16. Déterminer l' équation du plan comprenant l' axe Z et passant par le point (1,1,0).
17. Déterminer l' équation du plan perpendiculaire à la droite oa et passant par le point a(1,1,1).

18. On considère l' ensemble des plans

$$(\alpha) : a^2x + 2ay + 2z = 0 \qquad \text{où } a \in \mathbb{R},$$

calculer la distance de $p(1,0,1)$ à chacun de ces plans et en tirer une conclusion.

19. Trouver l' ensemble des points équidistants aux plans :

$$\alpha : x + 2y - 7z + 5 = 0$$

$$\beta : x - y + 2z - 1 = 0$$

20. On donne la droite A: $\begin{cases} x = 2 + k \\ y = 2 - k \\ z = 3 \end{cases}$

et les points $a(2,4,2)$ et $b(1,-4,0)$.

Trouver les coodonnées du point p qui appartient à A et qui est tel que $ap \perp bp$.

21. Dans chaque cas, trouver la position de ces plans entre eux :

a) $\begin{cases} \alpha : 3x + y - 2z + 2 = 0 \\ \beta : x - 3y + 4z - 1 = 0 \\ \gamma : 2x - y + z - 3 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \alpha : x - 3y - 1z - 2 = 0 \\ \beta : 2x + y + 5z - 11 = 0 \\ \gamma : x + 4y + 6z - 9 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \alpha : 2x - y + z - 5 = 0 \\ \beta : 3x + 2y - z + 2 = 0 \\ \gamma : 4x - 2y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \alpha : x - 2y + z + 2 = 0 \\ \beta : 2x + y - z + 3 = 0 \\ \gamma : x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$

22. On donne la droite D : $\dfrac{x - 2}{4} = -y = \dfrac{z + 1}{3}$

et le plan $\pi : x + y - z + 1 = 0$

Trouver l' équation de D' qui est la projection orthogonale de D sur π et la distance de $(1,0,2)$ à D'.

23. **Quelle est l' équation d' une sphère de centre (x_0, y_0, z_0) et de rayon R ?**

24. Quelle est l' équation de la sphère passant par le point $(5,13,2)$, tangente aux plan (oXY), (oXZ) et (oYZ) ?

25. On donne les droites

$$D_1 : x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z - 2}{3}$$

$$D_2 : \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ 9x + 18y + 5z - 9 = 0 \end{cases}$$

Trouver les coordonnées de $D_1 \cap D_2$ ainsi que l' équation cartésienne du plan (D_1, D_2)

26. On donne les 3 plans

$$\alpha : ax - y + (a - 1)z + a + 2 = 0$$

$$\beta : x + (a + 2)y + 2z + 3 = 0$$

$$\gamma : x + y + z - 1 = 0$$

Déterminer $\alpha \cap \beta \cap \gamma$.

27. Quelle est l' équation de la droite qui s' appuie sur les deux droites gauches A et B et qui est parallèle à C ?

$$A : \begin{cases} x - 5y + 3 = 0 \\ -2x + y - z + 4 = 0 \end{cases}$$

$$B : \begin{cases} 3x - 3y - z - 2 = 0 \\ z = 4 \end{cases}$$

$$C : \begin{cases} 2x - 5y + 3z = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

28. Quelle est l' équation de la droite passant par le point $a(1,-2,0)$ et qui s' appuie sur les droites D_1 et D_2 ?

$$D_1 : \begin{cases} y = x - 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$D_2 : \begin{cases} y = x + 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

29. On donne les plans

$$\alpha : ax + 6y - az + 3a = 0$$
$$\beta : (b + 4)x + (a + 1)y + bz + a + 3 = 0$$

Trouver a et b pour que $\alpha \parallel \beta$.

30. On donne le plan $\alpha : 2x + y + 9z - 5 = 0$

et la droite $A : \begin{cases} x - y + 4z + 6 = 0 \\ x + 2y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$

Quelles sont les coordonnées de la projection du point $p(2,-6,-1)$ sur α parallèlement à A ?

31. Quelle est l' équation des droites parallèles au plan $y = x - 2$ qui passent par le point $(1,-2,0)$?

32. Les droites

$$A : x - 6 = y - 2 = \frac{z+5}{-3}$$

$$\text{et } B : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{3}$$

sont gauches.

Deux sommets a et b d' un quadrilatère abcd appartiennent à A tandis que ses sommets c et d appartiennent à B.

Trouver les coordonnées des sommets a, b, c, d sachant que bc est parallèle à l' axe X et que ad est parallèle à l' axe Y.

33. On donne la droite D : $\begin{cases} 2x - y - 2z - 4 = 0 \\ x - y - z - 2 = 0 \end{cases}$

et le plan $\pi = \frac{x}{4} + \frac{y}{2} - \frac{z}{3} = 1$

Quelle est l' équation de la projection orthogonale de D sur π ?

34. On donne les trois droites

$$A : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 4x + y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$B : \frac{x-1}{2} = -y - 4 = \frac{z-2}{3}$$

$$C : \begin{cases} x = y \\ 3y + z = 0 \end{cases}$$

Quelle est l' équation de la droite P qui s' appuie sur A et B tout en étant parallèle à C ?

Trouver les points d' appui de P sur A et B.

35. Quelle est l' équation de la droite parallèle au plan

$$\alpha : 3x + y - z + 1 = 0$$

passant par le point a(1,2,0) et qui s' appuie sur la droite

$$D : \begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \quad ?$$

36. Donner l' équation de la (des) sphère(s) de rayon 5 qui est (sont) tangente(s) au plan

$$\alpha : x - 2y + 3z = 0$$

au point (1,2,1).

37. Déterminer l' équation de la sphère qui admet pour grand cercle , le cercle

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 7y - 2z + 2 = 0 \\ 2x + 3y + 4z - 8 = 0 \end{cases} \qquad (\ldots\text{sphère !})$$

38. On donne deux sphères, l' une de centre $o(0,0,0)$ et de rayon 6, l' autre de centre $(1,-2,2$ et de rayon 5.
On demande l' équation de leur cercle d' intersection, son centre et son rayon.

39. Quels sont les plans tangents à la sphère S

$$S : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 4z + 13 = 0$$

que l' on peut mener par la droite

$$D : \begin{cases} 3x - 11y + 8z - 30 = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases} \quad ?$$

40. Quelle est l' équation de la sphère de centre $(2,3,-1)$ qui découpe la droite D

$$D : \begin{cases} 5x - 4y + 3z + 20 = 0 \\ 3x - 4y + z - 8 = 0 \end{cases}$$

en une corde de longueur 16 ?

41. Montrer que le plan

$$\pi : 5x + 3y - 4z = 35$$

est tangent à la sphère d' équation

$$S : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 = 50$$

en un point p que l' on déterminera.

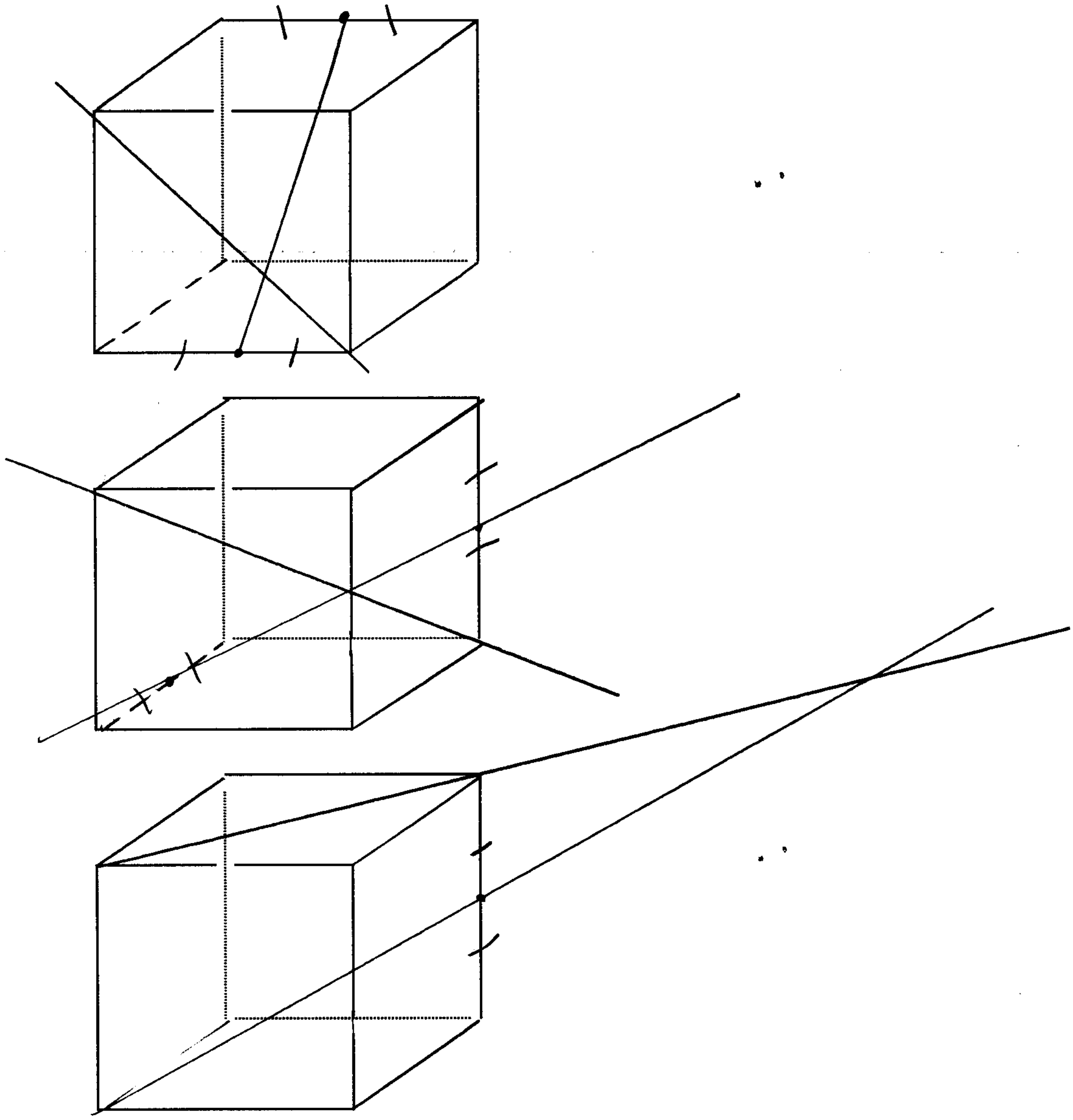
42. Si P représente une partie de E^3 et que A est une droite de E^3, les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
   a) Si toute section plane de P par un plan orthogonal à A est un cercle, alors P est un solide de révolution.
   (Un solide de révolution d' axe A est un ensemble S de points de E^3 tel que toute rotation d' axe A transforme S en lui-même)
   b) Si P est une réunion de cercles centrés sur A et situés sur des plans parallèles entre eux, alors P est un solide de révolution.
   c) Si P est un solide de révolution d' axe A, alors P est une réunion de cercles centrés sur A et situés dans des plans orthogonaux à A.
   d) Si P est un solide de révolution d' axe A, alors toute symétrie orthogonale dont le plan de points fixes contient A, conserve

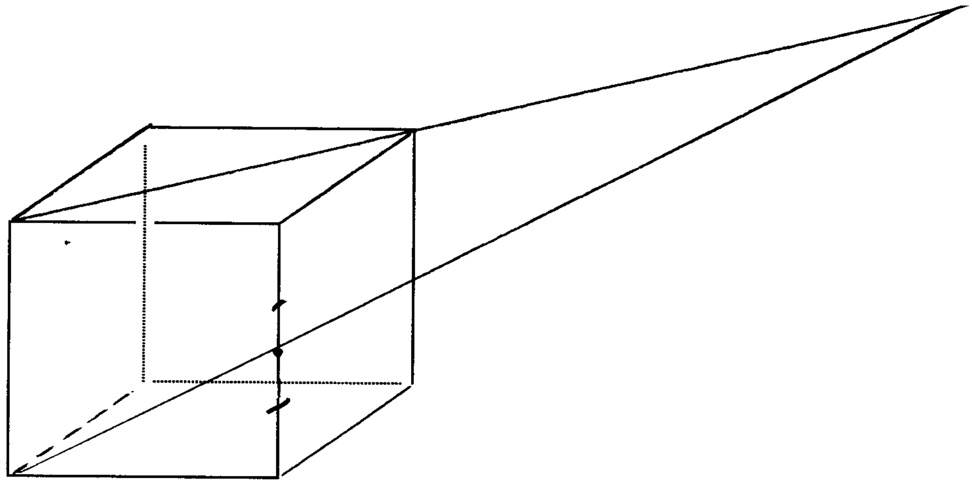
P.

e) Si P est un solide de révolution d' axe A, alors toute symétrie centrée en un point o de A, conserve P.

f) Si P est un solide de révolution d' axe A <u>et</u> d' axe B où A et B sont des droites distinctes, alors P est nécessairement vide ou l' espace tout entier.

43. Les droites représentées ci-dessous sont-elles sécantes ?





44. Décrire les ensembles suivants:

a) $\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 1 \right\}$

b) $\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = = z = 1 \right\}$

c) $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1 \text{ et } y = 3 \right\}$

d) $\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1 \text{ et } y = 3 \right\}$

e) $\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 = 4 \right\}$

f) $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 0 \right\}$

g) $\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 0 \right\}$

h) $\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 16 \text{ et } z = 2 \right\}$

i) $\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0 \right\}$

j) $\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$

45. Quelle est l'équation du cercle de centre (0,-1,3), de rayon 7 et parallèle au plan xy.

Les exercices qui suivent ont été posés à l' examen d' entrée de l' école polytechnique - U.L.B.

1. Juillet 78

Dans l' espace rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d' axes X, Y et Z, on donne les points a(0,1,1), b(1,0,1), c(1,1,0), d(1,1,1).

On demande :

a) les équations paramétriques et cartésiennes de la droite D comprenant les points a et b et du plan π comprenant les points a, b et c;

b) les équations cartésiennes de la droite D' comprenant le point d et parallèle à D et les coordonnées du point d' intersection de D' et du plan x = 0;

c) l' équation cartésienne du plan Π' comprenant le point d et parallèle à π et les coordonnées du point d' intersection de π' et de la droite X;

d) l' angle des vecteurs $\vec{ab}$ et $\vec{ac}$;

e) les équations cartésiennes de la perpendiculaire abaissée de d sur le plan π et les coordonnées du point où elle rencontre ce plan.

2. Septembre 78

Dans l' espace rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d' axes X, Y et Z, on donne le point p(1,2,-3), la droite A de nombres directeurs (2,-1,-2) et comprenant le point a(4,-1,-3) et le plan π d' équation cartésienne 2x - y - 2z = 0.

On demande :

a) l' équation cartésienne du plan α passant par le point p et la droite A;

b) l' équation cartésienne du plan β passant par le point p et parallèle au plan π;

c) les équations paramétriques et cartésiennes de la droite D = $\alpha \cap \beta$;

d) de déterminer l' angle des droites A et D;

e) de déterminer le point $q = A \cap D$ et la distance de p à q.

3. Juillet 79

Dans l' espace rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d' axes X, Y et Z, on donne les points

$$m(1,2,0), \quad n(1,-2,0), \quad p(-3,0,0) \text{ . } q(0,0,5)$$

On demande :

a) les équations cartésiennes des plans mnq et mpq;

b) les équations cartésiennes des droites np et mq et l' angle de ces droites;

c) les équations de la perpendiculaire P menée par le point n au plan mpq;

d) les coordonnées du point d' intersection r de P et du plan mpq;

e) de montrer que les droites P et Z sont sécantes et de déterminer les coordonnées de leur point d' intersection s;

f) le volume du tétraèdre mnpq.

4. Septembre 79

a) Former les équations cartésiennes et paramétriques de la droite A comprenant le point p(1,-2,5) et de nombres directeurs (3,2,1).

b) Former les équations cartésiennes et paramétriques de la droite B orthogonale à une droite de nombres directeurs (-2,2,1), s' appuyant sur la droite A et passant par le point q(-1,-2,2).

5. Juillet 80

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d' axes X, Y et Z, on donne les points p(a,0,0), q(0,b,0), r(0,0,c) et s(0,0,d). On demande :

a) les équations des plans γ passant par p, q, r et δ passant par les points p, q, s;

b) les équations de la droite C passant par s et perpendiculaire à γ et de la droite D passant par r et perpendiculaire à δ;

c) de montrer que les droites C et D sont sécantes en un point m et appartiennent à un même plan π et de donner les coordonnées de m et l' équation de π.

6. Septembre 80

Dans l' espace euclidien rapporté à un repère orthonormé , on donne le point $p(2,4,6)$ et le plan π comprenant les points $o(0,0,0)$, $a(2,0,1)$ et $b(0,2,1)$.

a) Formez l' équation cartésienne du plan π.

b) Formez les équations paramétriques de la droite P comprenant p et perpendiculaire au plan π.

c) Déterminez les coordonnées du point $q = P \cap \pi$.

d) Déterminer les coordonnées du point r symétrique de p par rapport à π

7. Juillet 81

Dans l' espace rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d' axes X, Y et Z, on donne le point $p(1,2,1)$ et le plan π d' équation

$$x + y + z - 2 = 0$$

On demande :

a) les équations cartésiennes de la droite D comprenant le point p et de nombres directeurs $(2,1,1)$;

b) les coordonnées du point q, intersection de D et de π;

c) les équations de la projection orthogonale D' .de D sur π;

d) l' équation cartésienne du plan α comprenant p et perpendiculaire à D;

e) les équations cartésiennes de la droite D", intersection de α et de π;

f) l' angle de D' et D".

8. Septembre 81

Dans l' espace euclidien rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d' axes X, Y et Z, on donne les points

$$m(2,0,0) \qquad n(0,1,0) \qquad p(0,0,1)$$

On demande :

a) l' équation du plan π comprenant m, n et p;

b) des équations de la droite perpendiculaire à π issue de o;

c) des équations de la droite perpendiculaire à mn issue de p et contenue dans le plan π ainsi que les nombres directeurs de cette droite;

d) de montrer que ces perpendiculaires ont un point commun et de déterminer ses coordonnées.

9. Juillet 82

L' espace est rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d' axes X, Y et Z.

On donne les points a(2,0,0), b($\frac{3}{2}$,$\frac{\sqrt{3}}{2}$,0), c(0,0,2). (Faites une figure)

a) Montrez que les quatre faces du tétraèdre de sommets o, a, b, c sont des triangles rectangles en précisant quels en sont les angles droits.

b) Formez les équations cartésiennes des plans obc et abc et montrez qu' ils sont perpendiculaires.

c) Déterminez les coordonnées
   1°) du point d, pied de la perpendiculaire abaissée de o sur ac
   2°) du point e, pied de la perpendiculaire abaissée de o sur bc

d) Montrez que 1°) l' angle oed est droit
   2°) de est perpendiculaire à ac.

e) Formez l' équation cartésienne de la sphère de diamètre oa; déterminez lesquels parmi les points b, c, d, e lui appartiennent.

10. Septembre 82

Dans l' espace rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d' axes X, Y et Z, on donne les points

m(2a,0,0), n(-2a,0,0) p(0,a,0) où a > 0

a) Déterminez un point q sur la perpendiculaire en p au plan mnp, de cote positive et tel que mq et nq soient perpendiculaires.

b) Déterminez les longueurs des segments mq et nq et les équations cartésiennes des droites dont ils font partie.

c) Déterminez l' aire du triangle mqn, l' équation cartésienne du plan qui le contient et l' angle aigu de ce plan avec celui du triangle mpn.

d) Déterminez l' équation cartésienne de la perpendiculaire menée du point p au plan mqn et la distance de ce point à ce plan.

e) Parmi les plans contenant la droite mq, quelle est l' équation de celui qui est parallèle à la droite np ?

f) Quel est le volume du tétraèdre mnpq ?

11. Juillet 83

Dans l' espace rapporté à un repère orthonormé d' origine o , on donne les points a(k,2,2) et b(2,k,2).

a) Déterminer k pour que les vecteurs $\overrightarrow{oa}$ et $\overrightarrow{ob}$ soient orthogonaux.

b) Vérifiez que les vecteurs $\overrightarrow{oa}$ et $\overrightarrow{ob}$ sont de longueurs égales et déterminez le sommet c du carré oacb.

c) Déterminer le vecteur $\overrightarrow{od}$ orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{oa}$ et $\overrightarrow{ob}$, de même longueur que ceux-ci et ayant une seule composante négative.

d) Ecrivez des équations cartésiennes des droites oa et ac, du plan oab et du plan comprenant d et parallèle au plan oab.

e) Donnez les coordonnées des autres sommets du cube dont oacb est une face et od une arête.

f) Donnez l' équation cartésienne de la sphère comprenant tous les sommets du cube.

12. Septembre 83

Dans l' espace rapporté à un trièdre orthonormé, on donne le point p(0,2,0).

a) Déterminer les points q et r appartenant à la droite d' équations

$$\begin{cases} y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

et tels que le triangle pqr soit équilatéral. On attribuera à q une abscisse positive.

b) Déterminez le point s situé sur l' axe Z et de cote positive tel que les segments [sp] et [pq] aient même longueur.

c) Formez les équations des droites sp, sq et pr.

d) Calculez l' angle (< 90°) des droites

1°) sp et sq

2°) sq et pr.

e) Formez l' équation du plan spq.

f) Calculez la distance du point r au plan spq.

g) Formez l' équation de la sphère passant par les points p, q, r et s.

13. Juillet 84

Dans l' espace rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d' axes X, Y et Z, on donne les points fixes

m(0,b,c) n(a,0,c) p(a,b,0) où a, b, c sont non nuls

a) Montrez que la longueur de chaque arête du tétraèdre omnp est égale à celle de l' arête opposée. Qu' en déduisez-vous au sujet des faces du tétraèdre ?

b) Formez les équations cartésiennes des droites om et pn; à quelles condition ces droites sont-elles orthogonales ?

c) Formez les équations cartésiennes des plans onp et mnp; à quelles condition ces plans sont-ils perpendiculaires ?

d) Soient Π_1, Π_2, Π_3 les plans contenant respectivement les droites om, on, op et perpendiculaires respectivement aux plans onp, omp, omn; montrez que ces trois plans passent par une même droite.

e) Calculez le volume du tétraèdre omnp.

14. Septembre 84

Dans l' espace rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d' axes X, Y et Z, on donne les points

m(1,0,0) p(2,3,0) et q(1,2,2)

a) Formez les équations cartésiennes des plans omp, omq et mpq.

b) Déterminez les équations cartésiennes des droites suivantes, passant toutes par o :

1°) la perpendiculaire D_1 à la droite om contenue dans le plan opq;

2°) la perpendiculaire D_2 à la droite op contenue dans le plan omq;

1°) la perpendiculaire D_3 à la droite oq contenue dans le plan omp;

c) Montrez que ces trois droites sont contenues dans un même plan

15. Juillet 85

Dans l' espace rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d' axes X, Y et Z, on donne les points

m(a,0,0) n(0,b,0) et p(0,0,c) où abc $\neq$ 0

On demande :

a) Les coordonnées du point q tel que $\overrightarrow{qo} = \overrightarrow{qm} + \overrightarrow{qn} + \overrightarrow{qp}$;

b) les équations cartésiennes du plan mnp et des droites np, pm et mn;

c) les équations cartésiennes des médianes du triangle mnp issues de m et de n et les coordonnées de son centre de gravité g (barycentre);

d) les équations cartésiennes des hauteurs du triangle mnp issues de m et de n et les coordonnées de son orthocentre h;

e) l'équation cartésienne de la sphère circonscrite au tétraèdre omnp, les coordonées de son centre et son rayon.

f) le volume du tétraèdre omnp et l'aire du triangle mnp.

16. Septembre 85

Dans l' espace rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d' axes X, Y et Z, on donne les points fixes

p(a,0,0), q(a,c,0) et r(0,c,0) (a et c non nuls)

et les points m, mobile sur l' axe Z et n, mobile sur la parallèle à l' axe Z passant par r.

a) Formez les équations cartésiennes des droites qn et pm, des plans pqm et pqn;

b) Ecrivez la condition pour que les droites qn et pm soient orthogonales;

cette condition est supposée remplie par la suite.

c) Montrez que

1°) la droite qn est perpendiculaire au plan pqm

2°) la droite pm est perpendiculaire au plan pqn;

d) Etablissez l' équation des sphères dont m et n sont les extrémités d' un diamètre et montrez que les points p et q leur appartiennent.

17. Juillet 86

Dans l' espace rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d' axes X, Y et Z, on donne les points

m(a,0,0), n(0,b,0) p(0,0,c) et u(a,b,c) (a, b, c sont non nuls).

On désigne par A la droite passant par o et u et par B la droite passant par les points n et p.

On demande :

a) de former les équations cartésiennes du plan contenant la droite A et parallèle à la droite B et du plan contenant la droite B et parallèle à la droite A;

b) de montrer que la droite C joignant m au milieu de [np] a un point commun avec la droite A et de déterminer les coordonnées de ce point;

c) de déterminer les conditions sur a, b et c pour que la droite C soit perpendiculaire aux droites A et B;

d) de déterminer, dans les conditions trouvées au c), l' angle et la distance des droites A et B.

18. Septembre 86

Dans l' espace rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d' axes X, Y et Z, on donne les points fixes

m(0,b,c), n(a',0,c') et u(1,1,0) (b, c, a' et c' non nuls)

a) Formez les équations

1°) de la droite M passant par le point m et parallèle à l' axe X,

2°) de la droite N passant par le point n et parallèle à l' axe Y,

3°) de la droite P passant par o et u.

b) déterminer l' équation cartésienne des plans passant par un point p mobile sur la droite P et contenant la droite M.

c) Déterminez l' équation cartésienne des plans passant par le point p considéré au b) et contenant la droite N.

d) Montrez qu' il existe un plan passant par le point o et parallèle à l' intersection des plans déterminés en b) et en c) pour toutes les positions de ceux-ci.

19. Juillet 87

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d' axes X, Y et Z, on donne les points

a(4,0,0), b(-3,0,0), c(0,6,0) et d(0,2,0).

Soit s un point mobile sur la perpendiculaire en d au plan (X,Y). (figure)

a) Montrer que, pour toutes les positions du point s, les arêtes opposées du tétraèdre abcs sont orthogonales deux à deux;

b) Etablir les équations cartésiennes des plans bcs et acs.

c) Etablir les équations cartésiennes de la droite A menée par a perpendiculairement au plan bcs et de la droite B menée par b perpendiculairement au plan acs. Déterminez les pieds e et f de ces perpendiculaires.

d) Montrez que les droites A et B sont sécantes et déterminez leur point d' intersection g.

e) Déterminer la (les) position(s) de s telle(s) que le tétraèdre abcs ait le volume 84.

20. Septembre 87

Dans l' espace rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d' axes X, Y et Z, on donne le point p(0,3,4).

a) Etablir l' équation cartésienne de la droite D menée par p parallèlement à l' axe X.

b) Etablir l' équation cartésienne du plan contenant D et l' axe X.

c) Déterminez les coordonnées des sommets q et r du carré opqr sachant que q est situé sur D et a une abscisse positive.

d) Etablir des équations paramétriques de la perpendiculaire au plan du carré passant par le centre de celui-ci.

e) Déterminer les coordonnées des points s et s' sommets des pyramides droites dont le carré est la base et dont les hauteurs mesurent 5.

f)Déterminer le cosinus de l' angle aigu des arêtes so et sp, l' équation cartésienne du plan ops, la longueur de l' arête os et le volume du polyèdre de sommets opqrss'.

21. **Juillet 88**

Dans l' espace rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d' axes X, Y et Z, on donne les quatre points

a(0,1,0) b(1,0,0) c(-1,0,0) d(0,0,2)

a) Quelle est la particularité commune aux quatre faces du tétraèdre de sommets abcd ?

b) Déterminez les coordonnées du point e, intersection du plan abd et de la droite M passant par c et perpendiculaire au plan abd.

c) Calculer la mesure de l' angle eab.

d) Montrez que la droite M, considérée au b), et la droite N passant par b et perpendiculaire au plan acd sont sécantes; donnez les coordonnées de leur point d' intersection et l' équation du plan qui les contient.

e) Etablissez l' équation de la sphère qui passe par les points a, b, c, d.

22. **Septembre 88**

Dans l' espace rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d' axes X, Y et Z, on donne deux droites gauches A et B par leurs équations cartésiennes :

$$(A) : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{2}$$

$$(B) : x = 2 \text{ et } \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$$

On demande :

a) de déterminer l' équation cartésienne d' un plan contenant B et parallèle à A;

b) de déterminer les équations cartésiennes d' une droite parallèle à l' axe X et rencontrant A et B;

c) de déterminer le point p sur A et le point q sur B tels que la droite pq soit parallèle au plan $z = 0$ et que la longueur du segment [pq] soit minimum.

23. Juillet 89

Dans l' espace rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d' axes X, Y et Z, on donne les points

$$m(4,0,0) \quad n(0,2,0) \quad \text{et} \quad p(0,0,2)$$

On demande :

a) l' équation du plan mnp, de la perpendiculaire abaissée de l' origine sur ce plan et les coordonnées de son pied dans ce plan;

b) le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle mnp;

c) le centre et le rayon de la sphère passant par o, m, n et p; l' aire et le volume de cette sphère.

24. Juillet 89

Dans l' espace rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d' axes X, Y et Z, on donne le point p(1,2,0) et la droite D :

$$\frac{x + 1}{2} = -y = \frac{z - 1}{2}$$

On demande :

a) l' équation cartésienne du plan π contenant D et passant par p;

b) l' équation cartésienne de la droite M qui passe par l' origine et qui est perpendiculaire au plan Π;

c) de déterminer le point de percée r de M dans π;

d) de déterminer les points q et s qui se situent sur D de telle manière que le triangle pqs soit isocèle et rectangle en q (on choisira le point s de cote z positive);

e) le volume du tétraèdre opqs;

f) l' équation de la sphère contenant o, p, q et s.

25. Septembre 89

Dans l' espace rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d' axes X, Y et Z, on donne les points

$$m(1,a,0) \quad n(0,1,a) \quad \text{et} \quad p(a,0,1)$$

a) Quelle est la nature du triangle mnp? Justifiez.

b) Etablissez les équations cartésiennes des droites om et np et déterminez l' angle de ces droites.

c) Pour quelles valeurs de a les vecteurs $\overrightarrow{om}$ et $\overrightarrow{on}$ forment-ils un angle de

1°) 60°, 2°) 90°, 3°)120° ?

d) Etablissez les équations cartésiennes des plans omp et mnp. Pour quelles valeurs de a les points o, m, n, p sont-ils coplanaires? On supposera dans la suite que cette condition n' est **pas remplie**.

e) Pour quelles valeurs de a, le tétraèdre omnp est-il régulier?

f) Quelles sont les équations cartésiennes de la perpendiculaire au plan mnp issue de o et celles de la perpendiculaire au plan omn issue de p?

g) Montrez que ces perpendiculaires ont un point commun et déterminez ses coordonnées.

26. Juillet 90

Dans l' espace rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d' axes X, Y et Z, on donne la droite D d' équations cartésiennes

$$x = y = 2z.$$

a) Déterminez les coordonnées du point p, d' abscisse positive, appartenant à D et situé à une distance 6 de o.

b) Formez l' équation du plan π perpendiculaire à D en p.

c) Formez l' équation du plan α contenant D et l' axe X; quelle est la mesure de l' angle aigu de ce plan α et du plan γ d' équation $z = 0$,

d) Formez l' équation du plan β contenant la droite D et perpendiculaire au plan d' équation $2x + 3y + z = 0$.

e) Déterminer le volume du tétraèdre limité par les plans α, β, γ, π.

f) Etablissez l' équation de la sphère circonscrite à ce tétraèdre, son centre et son rayon.

27. Septembre 90

Dans l' espace rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d' axes X, Y et Z, on donne le plan π d' équation $2x + y - 2z = 0$.

a) Déterminez le pied de la perpendiculaire au plan π issue du point $p(5,4,-2)$ et le symétrique du point p par rapport au plan π.

b) Déterminez les équations cartésiennes des droites passant par o, contenues dans le plan π et formant avec l' axe Z un angle de 45°.

c) Déterminez les équations cartésiennes des droites passant par le point p, parallèle au plan π et perpendiculaire à la droite op.

28. Juillet 91

Dans l' espace rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d' axes X, Y et Z, on donne les points

$$p(0,4,5) \quad \text{et} \quad q(2,0,1)$$

et les plans α et β d' équations cartésiennes respectives

$$2y + z - 7 = 0 \qquad x - z + 2 = 0$$

a) Déterminez les équations paramétriques et cartésiennes de la droite A, joignant les points p et q, et de la droite B, intersection des plans α et β.

b) Montrez que les droites A et B sont sécantes; déterminez les coordonnées de leur point d' intersection r et la mesure de leur angle.

c) Formez l' équation cartésienne du plan γ contenant A et B; calculez la distance de ce plan à l' origine.

29. Septembre 91

Dans l' espace rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d' axes X, Y et Z, on donne la droite D d' équations cartésiennes

$$\frac{x}{2} = \frac{y - 3}{-1} = \frac{z + 3}{2}$$

a) Déterminez l' équation cartésienne du plan α passant par le point a(1,4,1) et perpendiculaire à la droite D.

b) Déterminez les coordonnées du point d' intersection p du plan α et de la droite D et la distance de ce point p à l' origine o.

c) Déterminez l' équation cartésienne du plan β passant par l' origine o et contenant la droite D.

d) Formez l' équation cartésienne du plan γ contenant la droite D et perpendiculaire au plan β.

30. Juillet 92

Par rotation d' un triangle équilatéral et de sa circonférence inscrite, autour d' une hauteur du triangle, on obtient un cône et sa sphère inscrite.

Démontrer que, si le volume de la sphère est de quatre litres, celui du cône en vaut neuf.

31. Juillet 92

Dans l' espace euclidien rapporté à un repère orthonormé , on donne le point p(2,4,5) et le plan α comprenant les points o(0,0,0), a(2,0,1) ,b(0,2,1).

1. Formez l' équation cartésienne du plan α
2. Formez les équations paramétriques de la droite P comprenant p et perpendiculaire au plan α.
3. Déterminez les coordonnées du point de percée q, de P dans le plan α.
4. Déterminez les coordonnées du point r, symétrique de p par rapport à α.

32. Juillet 93

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d' axes X, Y, on donne les sommets d'un rectangle: a(1,0), b(3,2), c(2,3), d(0,1).

Calculer le volume balayé par l'aire enfermée dans le rectangle abcd lorsqu'on lui fait subir une rotation de 360° autour de l'axe Y.

33. Juillet 93

Dans l' espace rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d' axes X, Y et Z, on donne le point p(1,2,1) et le plan β d'équation $x + y + z - 2 = 0$.

On demande:

1) des équations cartésiennees de la droite d comprenant le point p et de nombres directeurs (2,1,1);
2) les coordonnées du point q, intersection de d et de β;
3) des équations de la projection orthogonale d' de d sur β;
4) une équation cartésienne du plan α comprenant p et perpendicukaire à d;
5) des équations de la droite d'', intersection de α et β;
6) l'angle de d' et d''.

34. Septembre 93

Sachant que πab est la mesure de l'aire d'une ellipse dont les demi-axes ont comme longueur a et b, déterminer la relation qui doit lier a et b pour que l'aire du cercle circonscrit à un rectangle de côtés 2a et 2b soit le double de l'aire de l'ellipse inscrite dans ce rectangle.

35. Septembre 93

Dans l' espace rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d' axes X, Y, Z, on donne le point p(1,2,-3), le plan β d'équation cartésienne $2x - y - 2z = 0$ et la droite A de nombres directeurs (2,-1,-2) comprenant le point a(4,-1,-3).

On demande:

1) l' équation cartésienne du plan α passant par le point p et la droite A;
2) l' équation cartésienne du plan γ passant par le point p et parallèle au plan β;
3) les équations paramétriques et cartésiennes de la droite D,

intersection des plans α et β;

4) de déterminer l'angle des droites A et D;
5) de déterminer les coordonnées du point q, intersection de A et D, et la distance de p à q.

36. On donne les points a(1,0,1), b(4,4,0) et c(2,3,4)
Que vaut la surface du triangle abc?

37. Un hexagone régulier circonscrit à un cercle de rayon R est pris comme base d'un prisme droit.
Dans ce prisme se trouve une sphère tangente à toutes les faces du prisme.
Calculer le rapport entre le volume du prisme et le volume de la sphère.
Calculer le rapport entre l'aire du prisme et l'aire de la sphère.

38. Juillet 94.
Dans l' espace rapporté à un repère orthonormé d' origine a et d' axes X, Y et Z, on donne six points b(4,0,0), c(4,6,0), d(0,8,0), e(0,4,3), f(0,0,3) et g(2,0,3). Le quadrilatère abcd et le triangle gef sont les deux bases d'un solide appelé prismatoïde. Les cinq faces latérales du prismatoïde sont les trapèzes abgf et adef; et, les triangles bcg, ceg,et cde.
On demande:

1) d'écrire l'équation cartésienne de chacune des 7 faces du prismatoïde.
2) d'écrire des équations cartésiennes de la droite ce.
3) d'écrire des équations cartésiennes de la perpendiculaire ah élevée de a sur le plan ceg.
4) de déterminer la distance entre les droites ah et cd.
5) de calculer l'aire totale du prismatoïde.

39. Septembre 94.
Dans l' espace rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d' axes X, Y et Z, on donne les points a(a,0,0), b(0,b,0), c(0,0,c),

avec $abc \neq 0$.

On demande

1) les coordonnées du point q tel $\overrightarrow{qo} = \overrightarrow{qa} + \overrightarrow{qb} + \overrightarrow{qc}$.
2) les équations cartésiennes du plan abc et des droites bc, ca et ab.
3) les équations cartésiennes des médianes du triangle abc issues de a et de b, ainsi que les coordonnées de son centre de gravité g.
4) les équations cartésiennes des hauteurs du triangle abc issues de a et de b, ainsi que les coordonnées de son centre de orthocentre h.
5) l'équation cartésienne de la sphère circonscrite au tétraèdre oabc, les coordonnées de son centre et son rayon.
6) le volume du tétraèdre oabc et l'aire du triangle abc.