Exemple pratique

Pour déterminer la période ou la demi-vie d'une substance radioactive, on mesure l'activité de cette substance, activité qui est proportionnelle au taux de comptage des particules émises.

On a obtenu le tableau suivant:

Temps (h)	Taux
0	1000
0.2	819
0.4	670
0.6	548
0.8	449
1	368
1.5	223
2	135
2.5	82
3	49
4	18
5	7

Le taux de comptage C est tel que $C = C_o . e^{-\lambda t}$. Déterminer de façon graphique, la constante de désintégration .

(Voir figure page 10)

Calcul précis de λ :

$$C = C_o . e^{-\lambda t}$$

$$\log C = \log C_o + (-\lambda). \log e . t$$

$$C = C_o + A . t$$

Prenons deux points quelconques du graphique (t=0, C=1000) et (t=1, C=368)

$$A = \frac{\log 368 - \log 1000}{1 - 0} = \log 0.368$$

$$\lambda = \frac{\log 0.368}{\log e} = \ln 0.368 = \bar{1}$$

Notons que jusqu'à présent, les valeurs portées sur l'axe y* sont les logarithmes en base 10 des valeurs de y. En fait, comme

$$\log_a y = \frac{\log_{10} y}{\log_{10} a} = \text{Constante} \; . \; \log_{10} y \; ,$$

l'axe y^* peut être considéré comme un axe logarithmique de base quelconque. (On passe d'un axe y^* à un autre par une simple homothétie.)

Considérons pour notre exemple que y^* porte les logarithmes népériens des valeurs de y :

$$y^* = \ln y$$

Dans ce cas,

$$C = C_o . \; e^{-\lambda t}$$

$$\ln C = \ln C_o - \lambda . t$$

$$C^* = C_o^* - \lambda . t$$

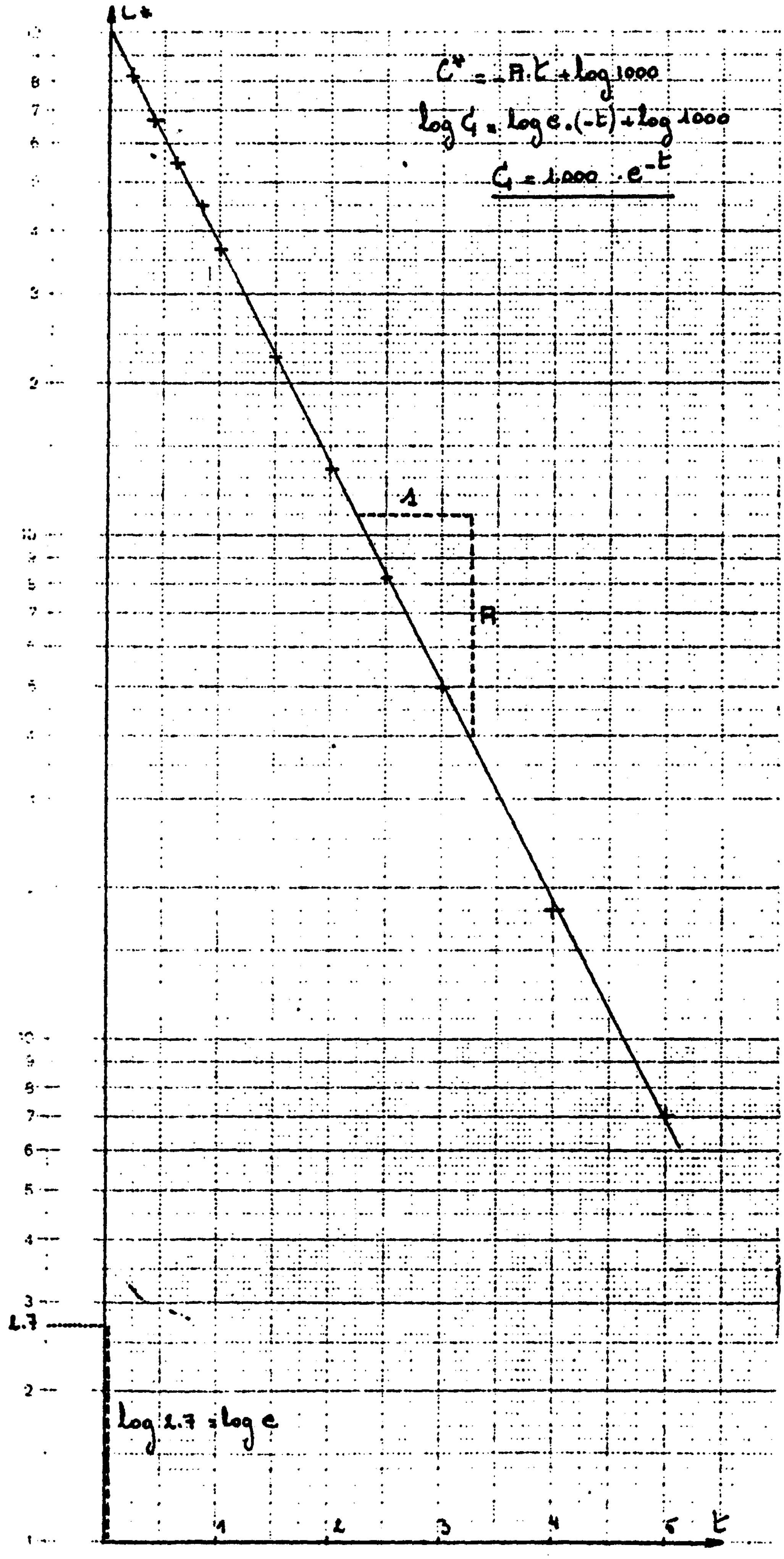
$$\lambda = \frac{\ln 368 - \ln 1000}{1 - 0} = \ln 0.368 = 1$$

En pratique, lorsqu'on a une fonction du type

$$y = e^{k.t} \; ,$$

on prend toujours

$$y^* = \ln y.$$


C*
$C^* = -A \cdot t + \log 1000$
$\log C = \log e \cdot (-t) + \log 1000$
$C = 1000 \cdot e^{-t}$
1
A
2.7
$\log 2.7 = \log e$
1
2
3
4
5
t

3_ Graphique "log-log"

Pour les fonctions du type

$$y = x^a \quad (a \neq 0), \qquad (1)$$

on utilise fréquemment le graphique "log-log". Dans une telle représentation, les axes sont perpendiculaires et pour chaque couple (x,y) vérifiant l'équation (1), on porte en abscisse $x^* = \log x$ et en ordonnée $y^* = \log y$.

Pour la facilité de l'utilisateur, le papier millimètré est présenté de telle manière que l'on ne doive pas calculer les différentes valeurs de $(x^*, y^*) = (\log x , \log y)$. Les nombres indiqués sur les axes sont les valeurs des couples (x,y) correspondant aux valeurs de (x^*, y^*) qui devraient y figurer.

Exemple: $y = x^6$

x	x^*	y	y^*
I	0	1	0
2	0.30	64	1.81
3	0.48	729	2.86
4	0.60	4096	3.61
5	0.70	15625	4.19

(Voir figure1 page 13)

Une fonction du type $y = a.x^b$ se représente par une droite sur un graphique "log-log". En effet

$$\log y = b \cdot \log x + \log a$$

$$D \equiv y^* = b \cdot x^* + \log a$$

Les nombres situés sur l'axe y^* représentant les valeurs de y, la valeur de a se lit immédiatement sur l'axe y^*. b est le coefficient angulaire (directeur) de D dans les axes (x^*, y^*); b peut donc également se touver graphiquement

(Voir figure 2 page 13)

Calcul précis de b:

$$\log b = \frac{y_2^* - y_1^*}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{\log (y_2 / y_1)}{\log (x_2 / x_1)} = K$$

d'où $b = 10^K$.

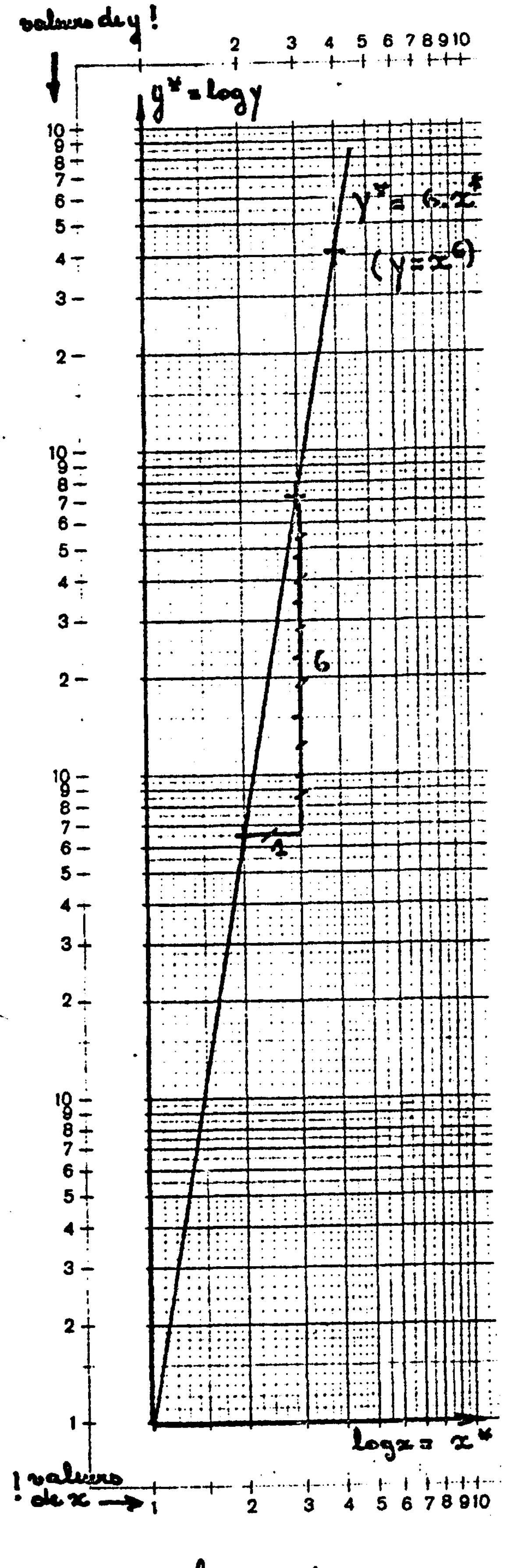


figure 1.

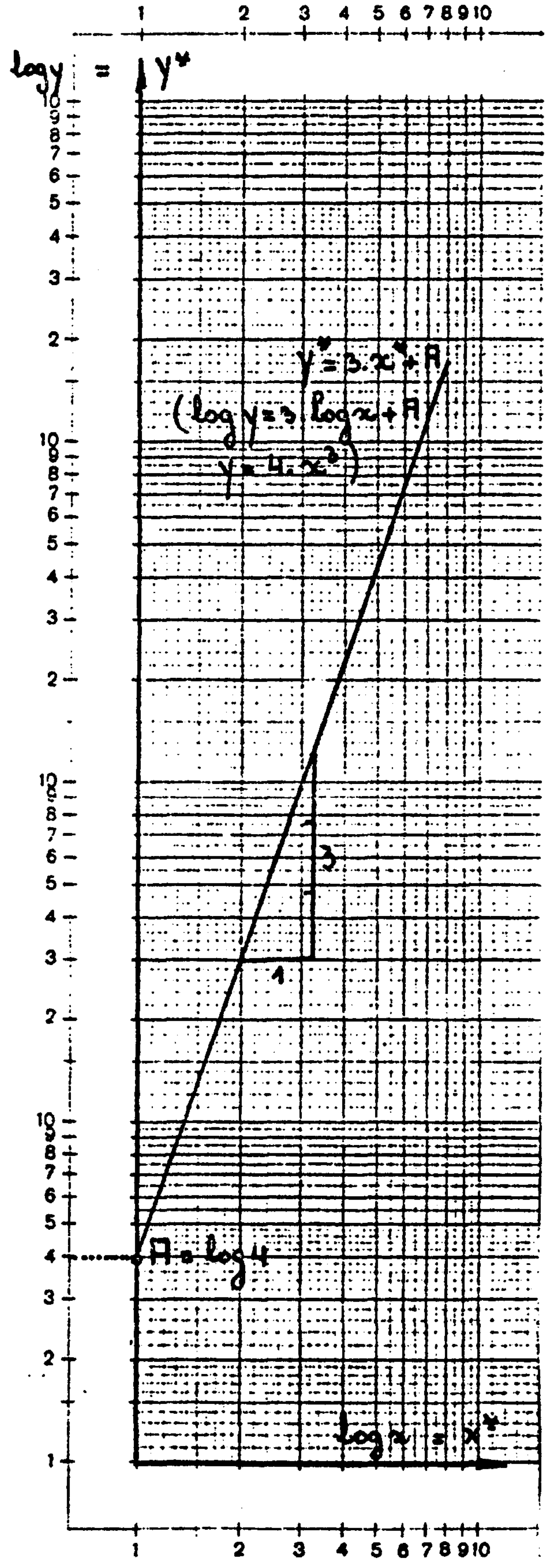


figure 2

Exemple pratique

Un corps glisse sans frottement vers le bas d'un plan incliné d'un angle de 17.5°. On mesure le temps mis par le corps pour parcourir différents espaces. On obtient les résultats suivants

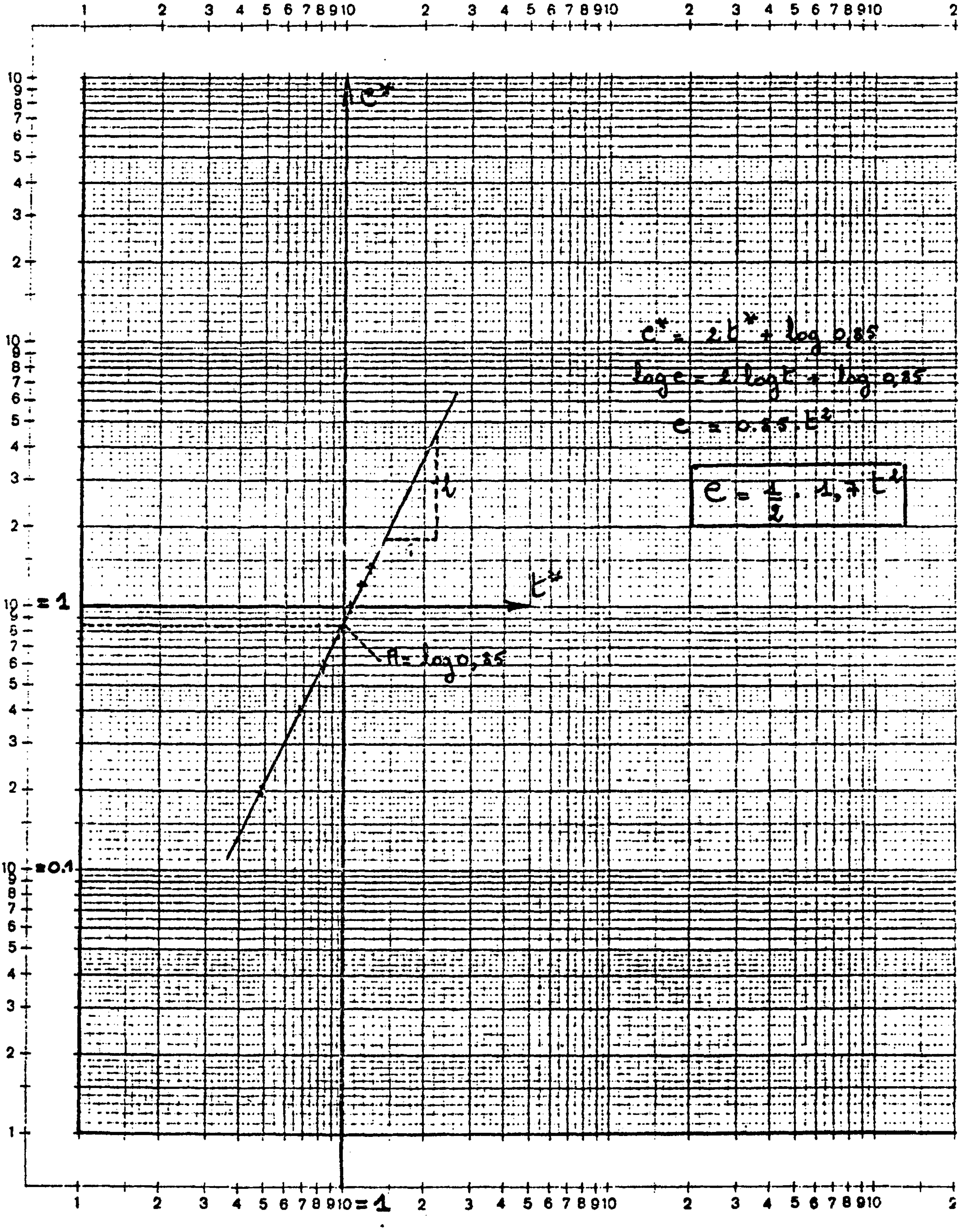
t (s)	e (m)
0.4880	0.20
0.6880	0.40
0.8340	0.60
0.9410	0.80
I.0470	1.00
I.I760	1.20
1.2470	1.40

Incertitude sur le temps: 0.001 s
sur l'espace: 0.005 m

Par calculs, on trouve $e = \frac{1}{2}.a.t^2$ avec $a = 1.7517\ m/s^2 \pm 0.0360\ m/s^2$.

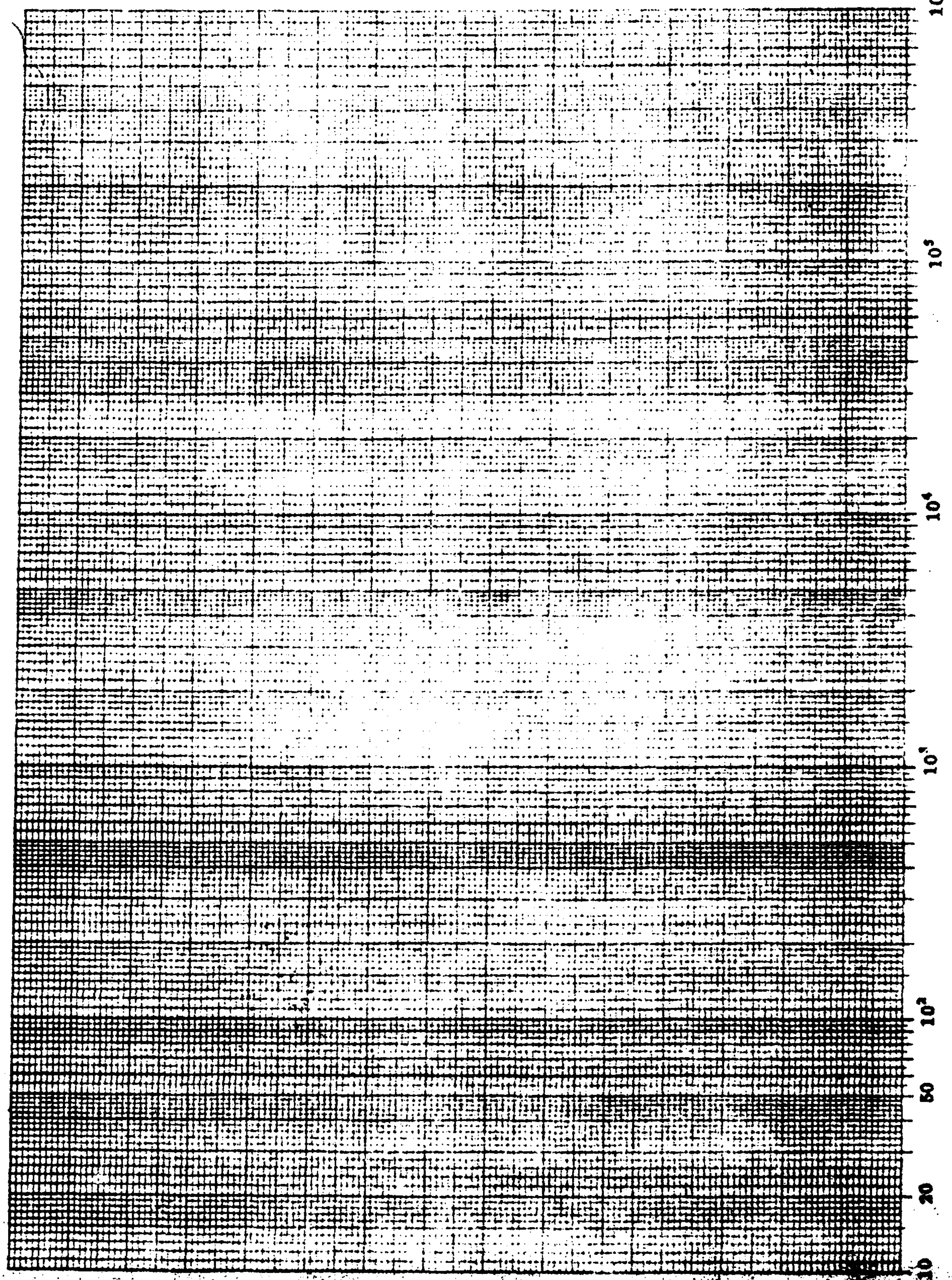
Graphiquement, sur papier "log,log", la loi qui unit e et t se trouve immédiatement avec une approximation de a qui est valable.

(Voir graphique page 13)

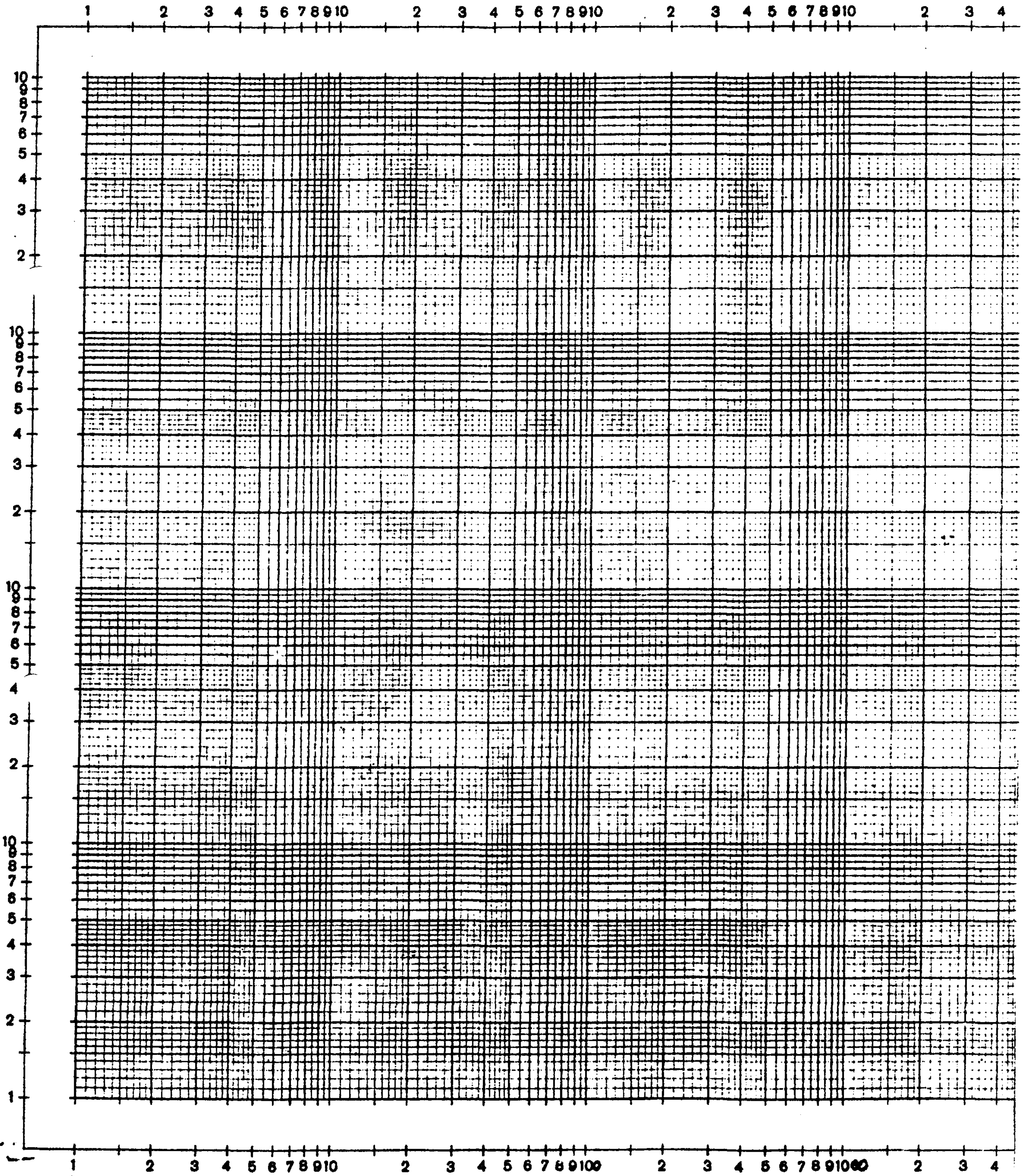


e^*
t^*
= 1
= 0.1
10 = 1
2
$e^* = 2t^* + \log 0{,}85$
$\log e = 2\log t + \log 0{,}85$
$e = 0.85 \cdot t^2$
$\boxed{e = \frac{1}{2} \cdot 1{,}7\, t^2}$
$A = \log 0{,}85$

Papier semi-log.



papier log-log.



Avant-propos

L'avènement des calculatrices de poche permet d'utiliser les logarithmes de façon simple et efficace. Cependant, bien souvent les élèves appuient sur les touches sans vraiment savoir ce que sont ces logarithmes ni à quoi ils servent. Parfois même, la fonction logarithme étudiée au cours de mathématiques n'a pour eux que peu de rapport avec les logarithmes du cours de physique ou du cours de chimie.

Les graphiques logarithmiques et semi-logarithmiques présentent un double intérêt : ils sont utilisés dans des domaines fort variés et ils aident à visualiser une échelle logarithmique.

Le papier à simple ou double graduation logarithmique n'est plus guère utilisé dans les cours de sciences. Nous incluons néanmoins quelques exemples de graphiques dessinés sur ces papiers. Ils peuvent bien sûr être reproduits sur du papier ordinaire mais la manipulation de la graduation imprimée est un exercice de compréhension de plusieurs notions : les logarithmes, la pente d'une droite, l'équation d'une droite, ...

Le point de vue que nous avons adopté est très pragmatique : le texte s'adresse surtout aux utilisateurs des logarithmes, non-mathématiciens de formation. Les professeurs de mathématiques y trouveront peut-être quelques exemples leur permettant de faire de l'interdisciplinarité avec les cours de sciences.

À titre d'exemple, considérons les mesures suivantes :

Le diamètre d'un électron mesure 0,000 000 000 006 mm = 6.10^{-15} m.
Le diamètre d'un atome d'hydrogène mesure 0,000 000 1 mm = 10^{-10} m.
Le diamètre du virus de la fièvre aphteuse mesure 12 nanomètres = $1,2.10^{-8}$ m.
Un homme mesure en moyenne 1,7 m.
Le Mont Éverest a une hauteur de 8 880 m.
Le diamètre de la lune mesure 3 472 km.
Le diamètre équatorial de la terre mesure 12 757 km $\cong 1,2.10^{7}$ m.
La distance moyenne terre-lune mesure 353 680 km $\cong 3.10^{8}$ m.
Le diamètre du soleil considéré comme sphérique mesure 1 390 000 km $\cong 10^{9}$ m.
La distance moyenne terre-soleil mesure 149,5 millions de km $\cong 1,5.10^{11}$ m.
Une année lumière vaut $9,461.10^{12}$ km $\cong 10^{16}$ m.
Le diamètre de notre galaxie mesure 90 000 années lumières $\cong 10^{21}$ m.

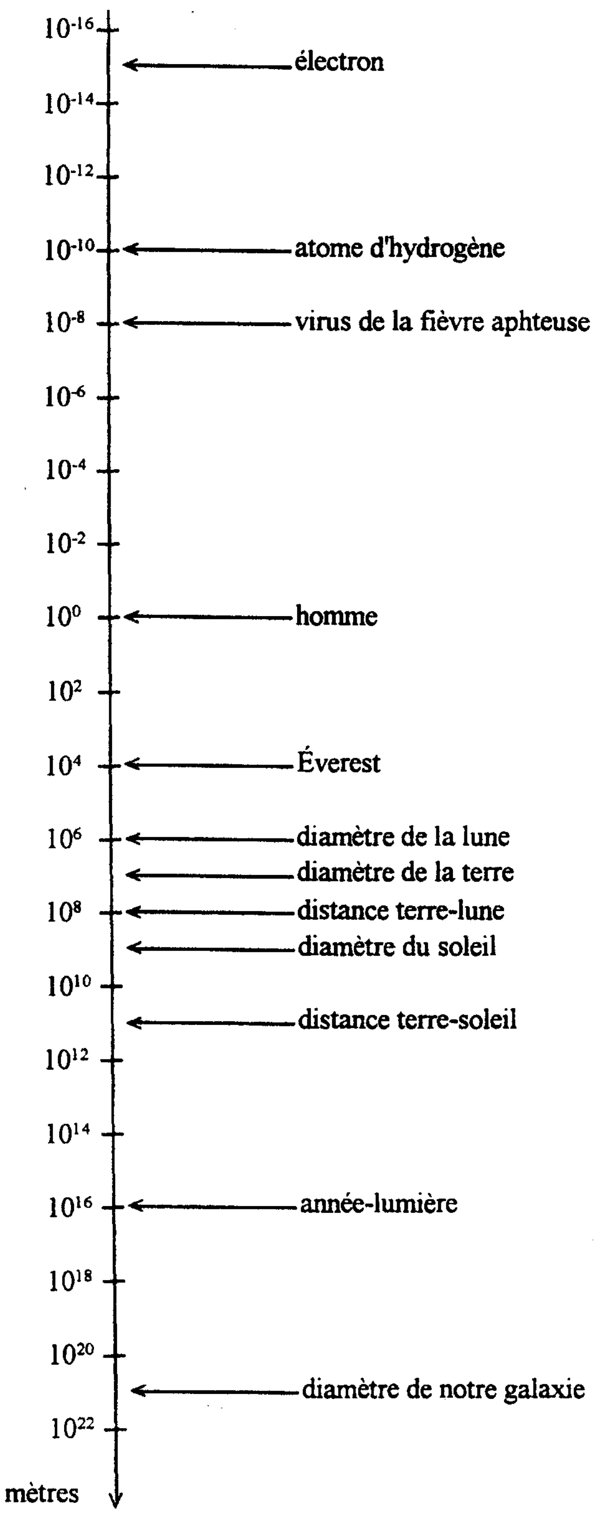
Comment représenter toutes ces mesures sur une **même** échelle ?
Si on tente de représenter les mesures des différentes grandeurs précitées sur la droite graduée linéairement, on se rend vite compte que le résultat est confus et illisible.

MATHÉMATIQUE

GRAPHIQUES LOGARITHMIQUES ET SEMI-LOGARITHMIQUES

Frédérickx M.
Parker M.

La représentation suivante est nettement plus claire :



Une telle graduation de la droite est appellée **échelle logarithmique**.
Les échelles logaritmiques sont également utilisées dans des graphiques à 2 dimensions. L'objet de ce dossier est d'expliquer leur emploi et la manière de les utiliser à bon escient.

1. Graphique « classique »

La plupart des fonctions sont habituellement représentées graphiquement dans le plan vectoriel rapporté à une base orthonormée. L'étude complète du graphique d'une fonction dans ces conditions est parachevée en cinquième secondaire.
Néanmoins dans certains cas, le graphique obtenu est peu utilisable par l'expérimentateur.
Exemples :

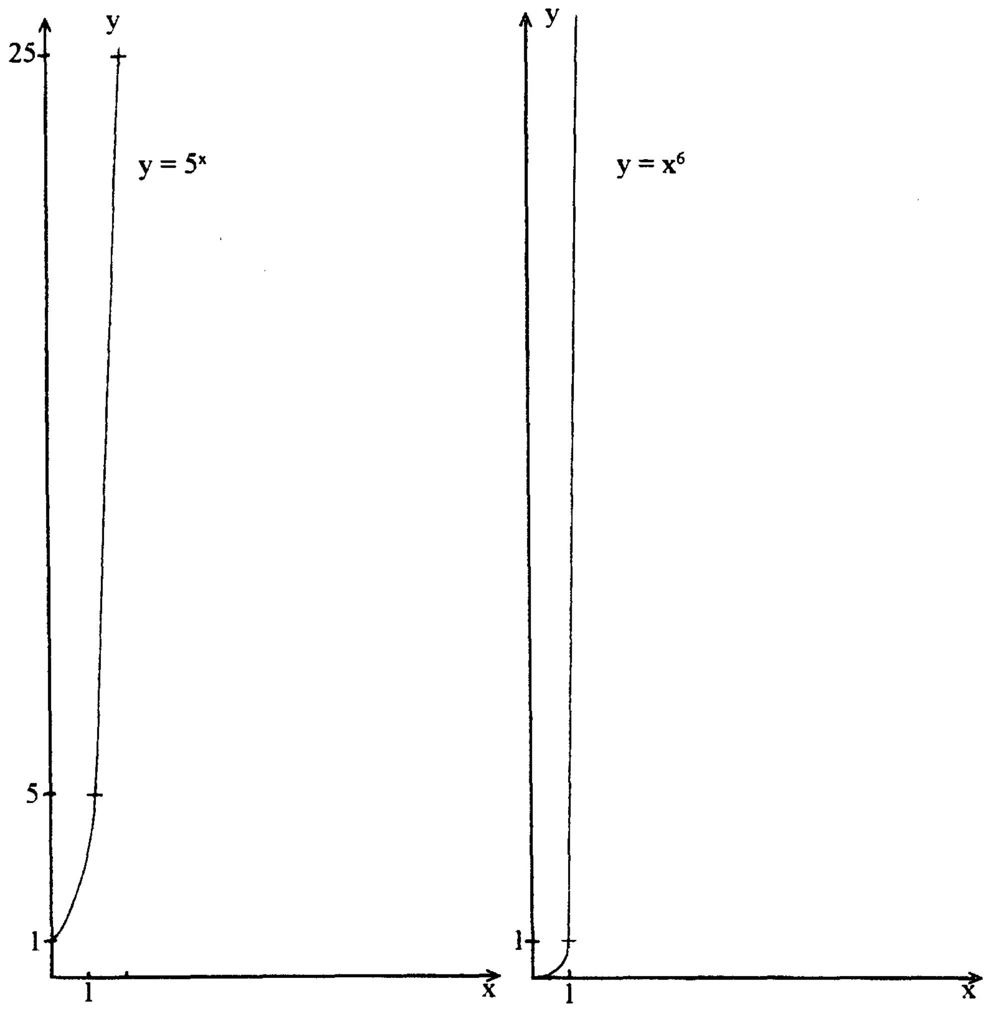


figure 1

On peut bien sûr utiliser des échelles différentes sur les deux axes. La lecture du graphique reste néanmoins difficile.
La représentation graphique des phénomènes à croissance ou décroissance rapide étant peu commode dans des échelles linéaires, on utilise dans ce cas des graphiques dans lesquels l'un ou les deux axes sont logarithmiques, c'est-à-dire qu'au lieu de porter sur cet axe les valeurs d'une grandeur N, on y porte les valeurs de log N.

MATHÉMATIQUE

GRAPHIQUES LOGARITHMIQUES ET SEMI-LOGARITHMIQUES

Frédérickx M.
Parker M.

L'échelle logarithmique ramène à distance « raisonnable » les grands nombres et « déroule » les petits nombres (compris entre 0 et 1).

$Log_{10}N$	-3	-2	-1	0	1	2	3
N	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10	10^2	10^3

La représentation d'une fonction dans un repère dont l'un ou les deux axes sont gradués par une échelle logarithmique est particulièrement intéressante quand ces graphiques deviennent alors des droites. Nous verrons que c'est le cas pour les fonctions du type $y = b \cdot a^x$ ou $y = b \cdot x^a$

Nous ne considérons ici que des fonctions positives d'une variable positive ($y = f(x)$ avec $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$). Les graphiques classiques de ces fonctions se situent donc entièrement dans le premier quadrant.

En sciences, les grandeurs étudiées vérifient souvent cette condition. De plus, si une grandeur est négative, un changement d'unités peut souvent la rendre positive. Cette restriction n'est donc pas importante pour l'expérimentateur.

2. Graphique dans des axes semi-logarithmiques (lin-log)

2.1. Pour les fonctions exponentielles du type $y = a^x$ $(a > 0 \text{ et } a \neq 1)$ (1), on utilise fréquemment des axes « lin-log ». Dans une telle représentation, les axes sont perpendiculaires et pour chaque couple (x, y) vérifiant l'équation **(1)**, on porte en abscisse la valeur de x et en ordonnée la valeur de $y^* = \log y$. La valeur de la base du logarithme est au choix de l'utilisateur. Nous supposerons ici que les logarithmes sont en base 10.

Exemple : si la fonction $y = 5^x$ est représentée sur du papier usuel (les deux axes ayant une échelle linéaire), les points suivants sont à reporter sur le graphique :

x	$y = 5^x$
0	1
1	5
2	25
3	125
4	625
5	3125
6	15625

Dans des axes semi-logarithmiques, on reporte sur le graphique les valeurs suivantes :

x	$y^* = \log y$
0	$\log 1 = 0$
1	$\log 5 \cong 0{,}7$
2	$\log 25 \cong 1{,}4$
3	$\log 125 \cong 2{,}1$
4	$\log 625 \cong 2{,}8$
5	$\log 3125 \cong 3{,}5$
6	$\log 15625 \cong 4{,}2$

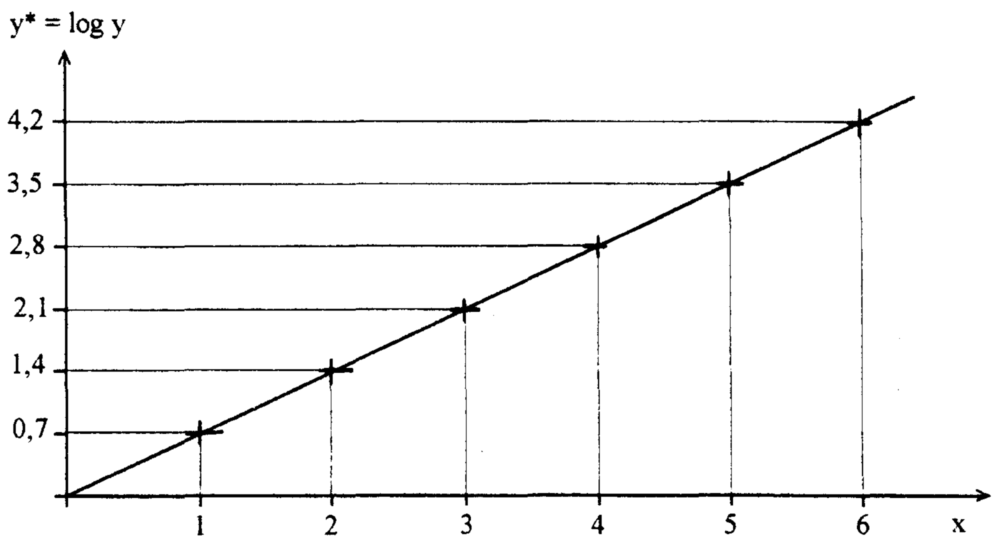


figure 2

MATHÉMATIQUE

GRAPHIQUES LOGARITHMIQUES ET SEMI-LOGARITHMIQUES

Frédérickx M.
Parker M.

2.2. La fonction $y = a^x$ dans des axes lin-log

La fonction $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ est représentée par une **droite** dans des axes lin-log.
Dans les axes x, y*, cette droite a pour équation $y^* = \log a \cdot x$
Elle passe par l'origine et sa pente vaut log a.
Si le graphique semi-logarithmique s'avère être une droite passant par l'origine, on sait que la fonction est du type $y = a^x$.
Si on ne connaît pas a priori la valeur de a, on peut la trouver à partir du graphique : pour $x = 1$, $y^* = \log a = \alpha$ d'où $a = 10^\alpha$.

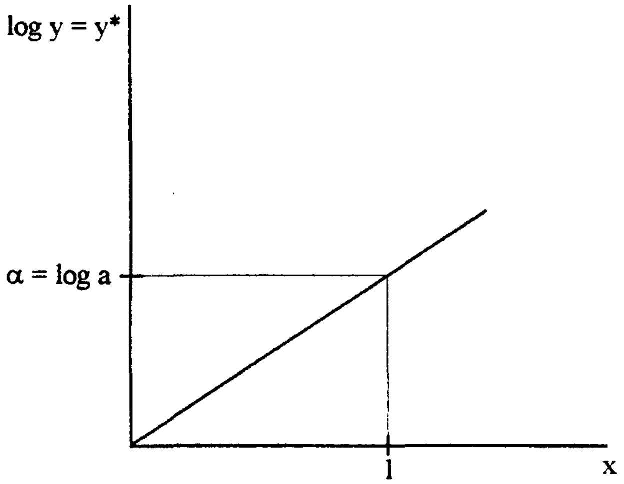


figure 3

La valeur de a peut aussi se trouver à partir de deux points du graphique : la pente log a de la droite vaut

$$\frac{y_2^* - y_1^*}{x_2 - x_1} = \alpha \qquad \text{d'où } a = 10^\alpha$$

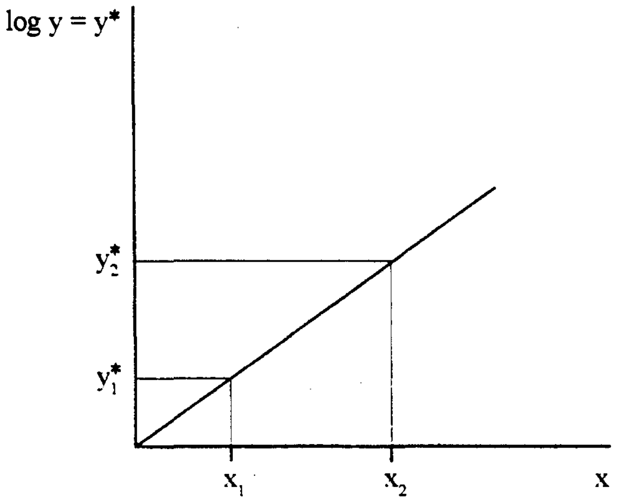


figure 4

2.3. La fonction $y = b \cdot a^x$ dans des axes lin-log

La fonction $y = b \cdot a^x$ $(a > 0, a \neq 1, b > 0)$ est représentée par une **droite** dans des axes lin-log.
Dans les axes x, y*, cette droite a pour équation $y^* = \log a \cdot x + \log b$ **(2)**
Exemple :

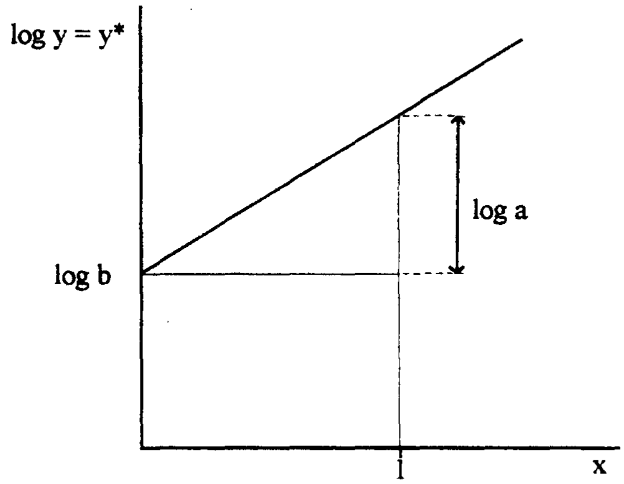


figure 5

La valeur de log b se lit immédiatement sur le graphique. La pente log a de la droite se détermine comme précédemment.

Exemple :

$y = 7 \cdot 2^x$
$y^* = \log y = \log 2 \cdot x + \log 7$

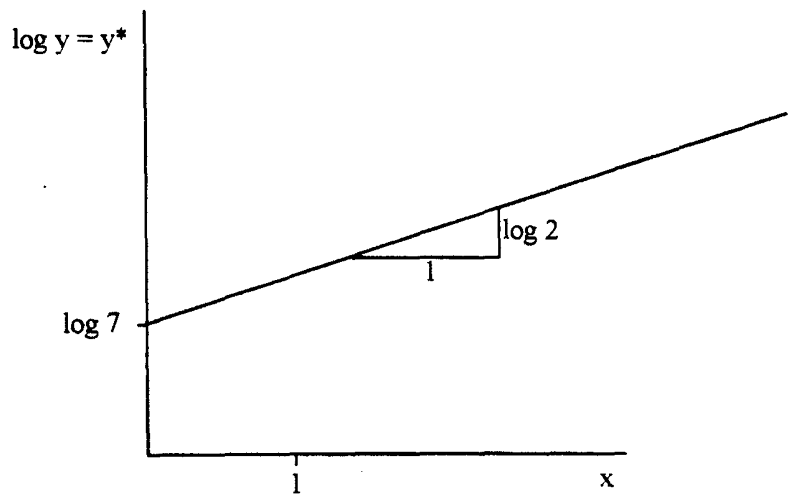


figure 6

MATHÉMATIQUE

GRAPHIQUES LOGARITHMIQUES ET SEMI-LOGARITHMIQUES

Frédérickx M.
Parker M.

3. Graphique dans des axes logarithmiques (log-log)

Pour représenter les fonctions du type $y = b \, . \, x^a$ $(a \neq 0, b > 0)$, **(3)**
on utilise fréquemment des axes logarithmiques. Dans une telle représentation, les axes sont perpendiculaires et pour chaque couple (x, y) vérifiant l'équation **(3)**, on porte en abscisse $x^* = \log x$ et en ordonnée, $y^* = \log y$.
Une fonction du type $y = b \, . \, x^a$ $(a \neq 0, b > 0)$ **(4)**
est représentée par une droite dans des axes log-log.
En effet, **(4)** équivaut à $\log y = a \, . \, \log x + \log b$ ou $y^* = a \, . \, x^* + \log b$

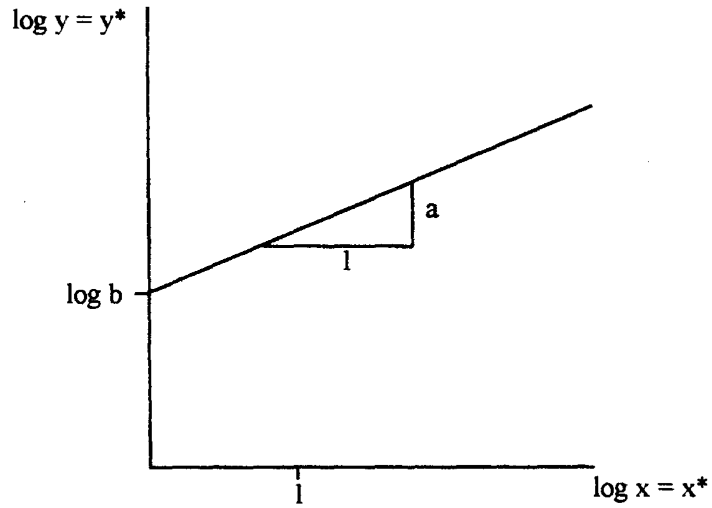


figure 7

La valeur de log b se lit immédiatement sur l'axe y*.
La pente a de la droite se voit facilement.

Exemple 1 : soit à représenter la fonction $y = x^6$ qui est dessinée dans des axes usuels à la figure 1.

x	y	x*	y*
1	1	0,00	0,00
2	64	0,30	1,81
3	729	0,48	2,86
4	4096	0,60	3,61
5	15625	0,70	4,19

On a $y^* = 6 \, . \, x^*$
Le graphique log-log de la fonction $y = x^6$ est une droite passant par l'origine ; sa pente vaut 6.

Exemple 2 : soit à représenter la fonction $y = 4 \cdot x^3$

$$y^* = 3x^* + \log 4$$

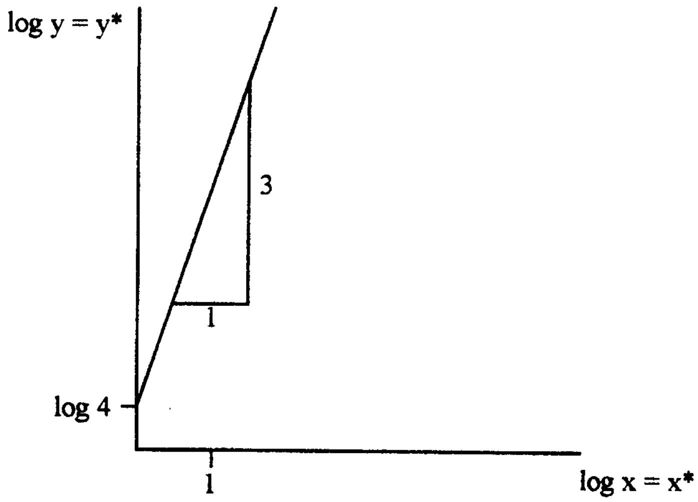


figure 8

MATHÉMATIQUE

GRAPHIQUES LOGARITHMIQUES ET SEMI-LOGARITHMIQUES

Frédérickx M.
Parker M.

4. Quelques applications

4.1. Les décès par maladie de coeur aux États-Unis.

Le graphique (figure 9, page 13) représente, dans des axes semi-logarithmiques, le nombre de personnes (sur 100 000 habitants) qui meurent d'une maladie de cœur aux États-Unis, et ce, selon leur âge.

a) Comment peut-on voir sur ce graphique que les personnes ont été groupées par tranches d'âge de 5 ans ?
Réponse : un point est dessiné tous les 5 ans.

b) Combien de personnes âgées de 10 à 15 ans (sur 100 000 habitants) sont-elles mortes d'une maladie de cœur ?
Réponse : environ 1,1 personne sur 100 000.

c) Même question pour les personnes entre 85 et 90 ans.
Réponse : environ 8 500 personnes sur 100 000.

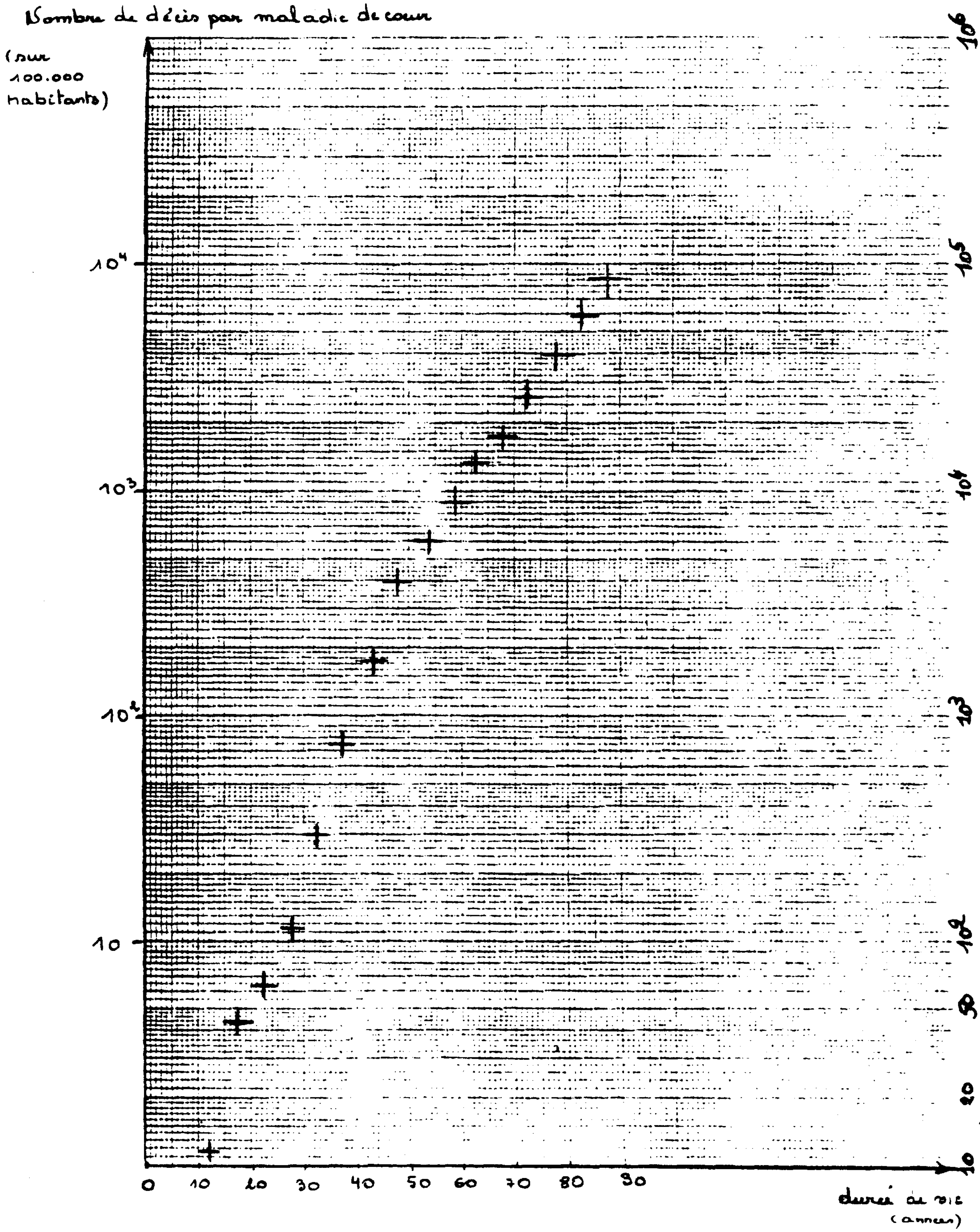
d) Les points du graphique relatifs aux personnes qui décèdent entre 50 et 90 ans sont pratiquement en ligne droite. Qu'est-ce que cela signifie ?
Réponse : le nombre N de décès par maladie de cœur (sur 100 000 habitants) et l'âge t du décès (entre 50 et 90 ans) sont reliés par une relation du type $N = b \,.\, a^t$ où a et b sont deux nombres réels positifs.

e) Que valent a et b ?
Réponse : les points (47,5 ; 400) et (87,5 ; 8500) appartiennent au graphique. On a donc

$$\alpha = \frac{\log 8500 - \log 400}{87{,}5 - 47{,}5} \quad \text{et } a = 10^{\alpha} \cong 1{,}08$$

La valeur de b se lit sur le graphique : $b \cong 11$
Une approximation de la loi qui relie N et t est $N = 11 \,.\, 1{,}08^t$

Exemple inspiré de Groei, *Helwet-Wiskunde* - Educaboek - 1990



Nombre de décès par maladie de coeur
(sur 100.000 habitants)
10^4
10^3
10^2
10
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
durée de vie (années)

figure 9

MATHÉMATIQUE

GRAPHIQUES LOGARITHMIQUES ET SEMI-LOGARITHMIQUES

Frédérickx M.
Parker M.

4.2. La troisième loi de Kepler (1571 - 1630)

Une analyse des observations effectuées par Tycho Brahé sur la planète Mars conduisit Kepler à formuler les bases de l'astronomie moderne. Les deux premières lois de Kepler furent publiées en 1609 dans son ouvrage *Astronomie nouvelle*. Elles s'énoncent comme suit :

1. Toutes les planètes décrivent des ellipses dont le Soleil est un des foyers.
2. La vitesse orbitale des planètes est variable. Les aires balayées pendant des temps égaux par le rayon vecteur allant du Soleil à la planète sont égales.

Dans un deuxième ouvrage, paru en 1618, intitulé *Les Harmonies de l'Univers*, Kepler publia sa troisième loi :

3. Les cubes des demi-grands axes des orbites des planètes sont directement proportionnels aux carrés des durées de leurs révolutions sidérales.

Si A est le demi-grand axe de l'orbite d'une planète et T sa période de révolution autour du soleil, le rapport $\frac{A^3}{T^2}$ est donc constant.
(A est mesuré en unités astronomiques : 1 u.a. = $1{,}495.10^{11}$ m, T est mesuré en secondes)

planète	A	T	$\frac{A^3}{T^2}$	log A	Log T
Mercure	0,387	$7{,}60.10^6$	$1{,}003.10^{-15}$	-0,412	6,881
Vénus	0,723	$1{,}94.10^7$	$1{,}004.10^{-15}$	-0,141	7,288
Terre	1,000	$3{,}16.10^7$	$1{,}001.10^{-15}$	0	7,500
Mars	1,523	$5{,}94.10^7$	$1{,}001.10^{-15}$	0,183	7,774
Jupiter	5,202	$3{,}74.10^8$	$1{,}006.10^{-15}$	0,716	8,573
Saturne	9,554	$9{,}30.10^8$	$1{,}008.10^{-15}$	0,980	8,968
Uranus	19,218	$2{,}66.10^9$	$1{,}003.10^{-15}$	1,284	9,425
Neptune	30,109	$5{,}20.10^9$	$1{,}009.10^{-15}$	1,479	9,716
Pluton	39,600	$7{,}82.10^9$	$1{,}015.10^{-15}$	1,598	9,893

Comme $\frac{A^3}{T^2} = K$

On a $A = K^{\frac{1}{3}} . T^{\frac{2}{3}}$

ou $\log A = \frac{2}{3} \log T + \log K^{\frac{1}{3}}$

ou dans des axes logarithmiques $A^* = \frac{2}{3} T^* + \log K^{\frac{1}{3}}$

Le graphique de A^* (= log A) en fonction de T^* (= log T) est donc une droite de pente $\frac{2}{3}$ et une valeur approchée de $K^{\frac{1}{3}}$ se lit aisément sur le graphique.

On obtient $\log K^{\frac{1}{3}} = -5$, $K^{\frac{1}{3}} \cong 10^{-5}$ ou $K \cong 10^{-15} (u.a)^3/s^2$
Voir figure 10 (page 15).

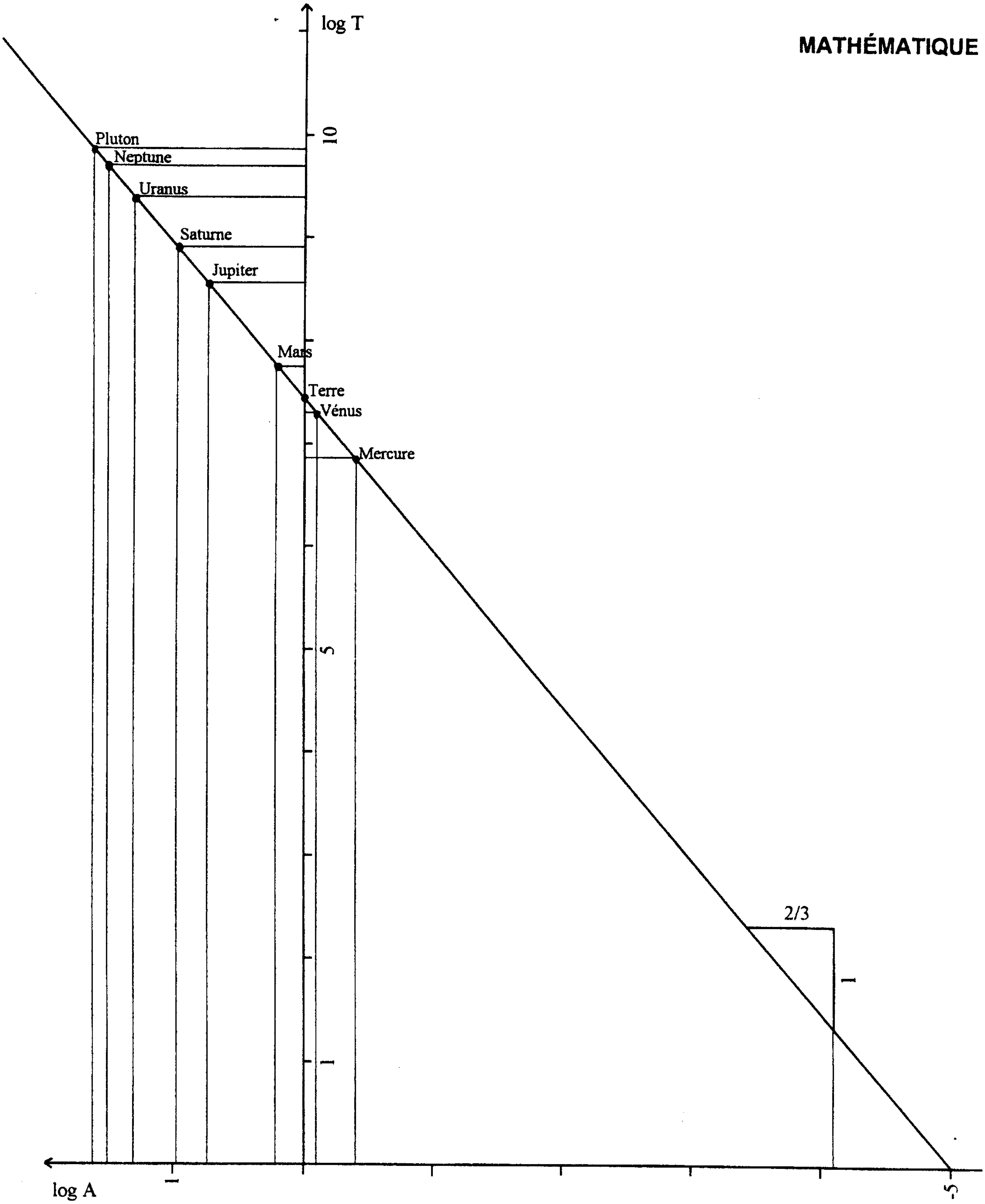

log T
10
5
1
Pluton
Neptune
Uranus
Saturne
Jupiter
Mars
Terre
Vénus
Mercure
2/3
1
log A
1
-5

figure 10

MATHÉMATIQUE

GRAPHIQUES
LOGARITHMIQUES ET
SEMI-LOGARITHMIQUES

Frédérickx M.
Parker M.

4.3. Masse et surface de peau

Il existe un lien entre la masse (M) d'un animal et la surface (S) de sa peau. Celui-ci est donné par la relation $S = k \cdot M^{\frac{2}{3}}$
où k est la constante de Meeh
S est exprimé en dm^2
M est exprimé en kg.

Voici quelques exemples :

animal	k
souris	9
chat	10
lapin	9,75
aigle	7,5
chauve-souris	57,5
homme	11

Si le graphique log-log ci-dessous représente la relation masse-surface de peau d'un cheval, que vaut sa constante de Meeh et quelle est la surface de peau d'un cheval de 200 kg ?

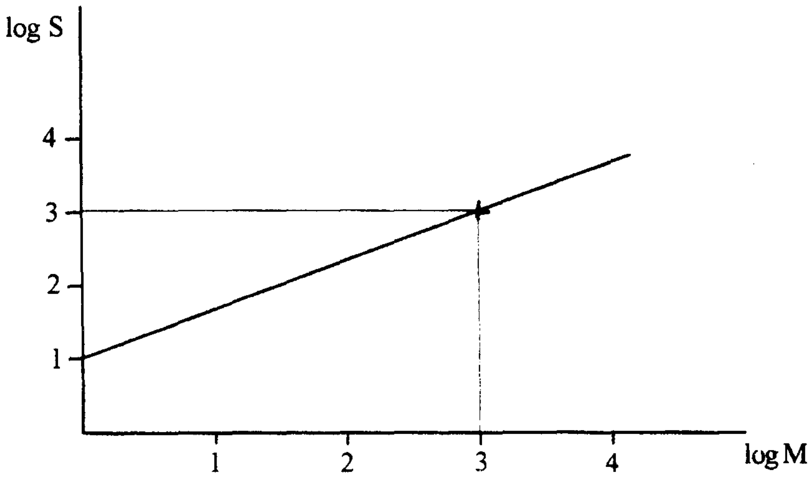


figure 11

ou

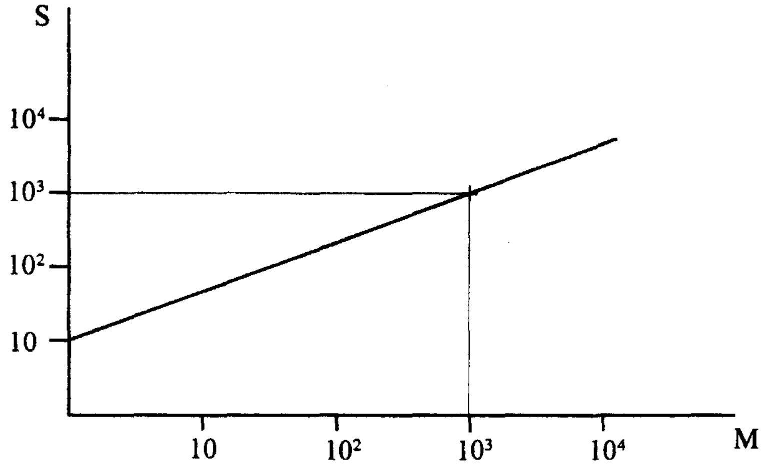


figure 12

Réponse : la constante de Meeh du cheval vaut 10 et la surface de peau d'un cheval de 200 kg vaut 342 dm^2.

MATHÉMATIQUE

GRAPHIQUES LOGARITHMIQUES ET SEMI-LOGARITHMIQUES

Frédérickx M.
Parker M.

4.4. Relation effet-dose

4.4.1.

Dans un grand nombre d'expériences biologiques et physiologiques, les effets E et les doses D de produit utilisé (un médicament par exemple) sont liés par la relation $E = a \cdot \log_{10} D + b$ **(5)**
où a et b sont des constantes qui dépendent de l'expérience.
On a mesuré les effets E_1 et E_2 correspondant à deux doses D_1 et D_2.
On a ainsi noté : pour D = 3, E = 5 et pour D = 7, E = 9. Calculez les valeurs de a et de b.
Réponse : $a = \dfrac{4}{\log \frac{7}{3}} \cong 10{,}87$ $\quad b \cong 5 - 10{,}87 \cdot \log 3 \cong -0{,}186$

4.4.2.

On appelle rapport d'activité $R_{B/A}$ d'un médicament B par rapport à un médicament A, le rapport $\dfrac{D_A}{D_B}$ des doses produisant le même effet :

$$R_{B/A} = \frac{\text{dose de A produisant l'effet } E_1}{\text{dose de B produisant le même effet } E_1} = \frac{D_A}{D_B}$$

On dit que ces médicaments agissent selon des **mécanismes comparables** si ce rapport est indépendant de l'effet E. On dit que le médicament B est plus efficace que le médicament A si $R_{B/A} = \dfrac{D_A}{D_B} > 1$

Les graphiques semi-logarithmiques (log-lin) permettent de voir facilement si deux médicaments A et B agissent selon des mécanismes comparables. Dans ces axes, la relation **(5)** devient $E = a \cdot D^* + b$.

Pour que les médicaments A et B agissent selon des mécanismes comparables, il faut que, pour obtenir un effet donné, le rapport $\dfrac{D_A}{D_B}$ soit constant.
Donc $\log \dfrac{D_A}{D_B} = \log D_A - \log D_B = D^*_A - D^*_B$ est constant et les deux droites qui représentent E_A en fonction de D^*_A et E_B en fonction de D^*_B sont alors parallèles :

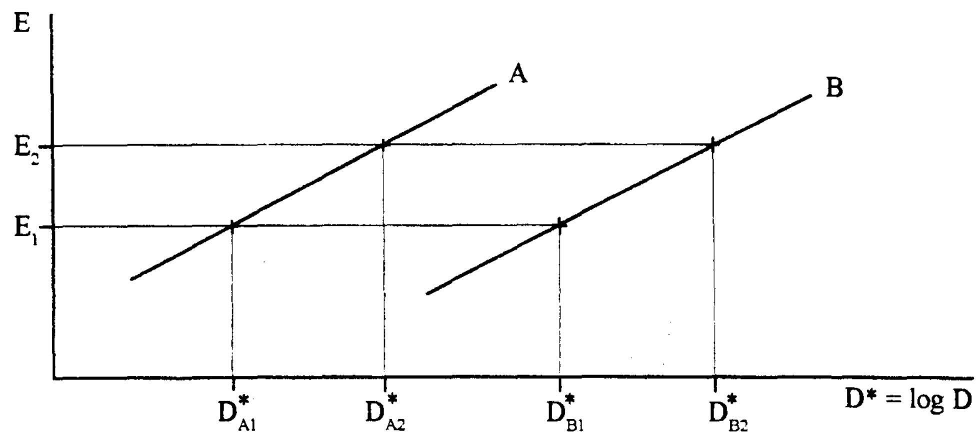


figure 13

4.4.3.

En étudiant les relations entre dose D et effet E de deux médicaments A et B, on trouve :
- pour le médicament A : $E_A = 3 \cdot \log_{10} D_A + 5$
- pour le médicament B : $E_B = 3 \cdot \log_{10} D_B + 6{,}1$

Calculez le rapport d'activité $R_{B/A}$ du médicament B par rapport au médicament A.
Ces deux médicaments agissent-ils suivant des mécanismes comparables ?
Si la réponse est affirmative, lequel des deux médicaments est-il le plus efficace ?
Réponse : on voit immédiatement que ces deux médicaments agissent suivant des mécanismes comparables puisque dans chaque cas, la pente a de la droite $E = a \cdot \log D + b$ vaut 3. Les deux droites sont donc bien parallèles.
Pour un effet donné $E_A = E_B = E$, on a $\log D_A = \frac{E - 5}{3}$ et $\log D_B = \frac{E - 6{,}1}{3}$

d'où $\log R_{B/A} = \log D_A - \log D_B = 0{,}3666...$

et $R_{B/A} \cong 2{,}326$

Le médicament B est donc le plus efficace.

Même exercice que le précédent pour l'énoncé suivant :

- pour le médicament A : $E = 4 \cdot \log_{10} D_A + 7$
- pour le médicament B : $E = 5 \cdot \log_{10} D_B + 6$

Réponse : les deux droites qui représentent ici E en fonction de $D^* = \log D$ ont des pentes différentes ; ces deux médicaments n'agissent donc pas suivant des mécanismes comparables.
Pour un effet donné $E_A = E_B = E$, on a $\log D_A = \frac{E - 7}{4}$ et $\log D_B = \frac{E - 6}{5}$

d'où $\log R_{B/A} = \log D_A - \log D_B = \frac{E - 11}{20}$,

ce qui confirme le fait que le rapport d'activité dépend de l'effet désiré. Pour un « petit » effet ($E < 11$), on a $R_{B/A} < 1$ et le médicament A est plus efficace que le médicament B. Par contre, pour un « grand » effet ($E > 11$), on a $R_{B/A} > 1$ et le médicament B est le plus efficace.

MATHÉMATIQUE

GRAPHIQUES LOGARITHMIQUES ET SEMI-LOGARITHMIQUES

Frédérickx M.
Parker M.

4.5. Temps d'exécution d'algorithmes

On veut comparer les temps d'exécution de deux algorithmes qui résolvent le même problème.
Pour un algorithme linéaire, écrit en Basic et exécuté sur un micro-ordinateur très peu puissant, on obtient $t_A = 19{,}5 \cdot 10^6 \cdot N$
Pour un algorithme cubique, écrit en Fortran et exécuté sur un très gros ordinateur, on obtient $t_B = 3 \cdot N^3$
Les temps t_A et t_B sont exprimés en nanosecondes et N est le nombre de données traitées.
Pour quelles valeurs de N a-t-on $t_A < t_B$?

Réponse : $t_A = 19{,}5 \cdot 10^6 \cdot N$
$t_B = 3 \cdot N^3$
$t_A < t_B$ si $N > 2550$

On voit que la différence entre les deux facteurs constants permet à l'algorithme cubique d'être plus rapide pour de petites valeurs de N, mais qu'ensuite l'algorithme linéaire devient plus efficace.
Graphiques bilogarithmiques de t_A et t_B :

$\log t_A \cong 7{,}3 + \log N$ et $\log t_B \cong 0{,}5 + 3 \cdot \log N$

N	Fortran Algorithme cubique	Basic Algorithme linéaire
10	3 microsecondes	200 millisecondes
100	3 millisecondes	2 secondes
1 000	3 secondes	20 secondes
10 000	49 minutes	3,2 minutes
100 000	35 jours	32 minutes
1 000 000	95 années	5,4 heures

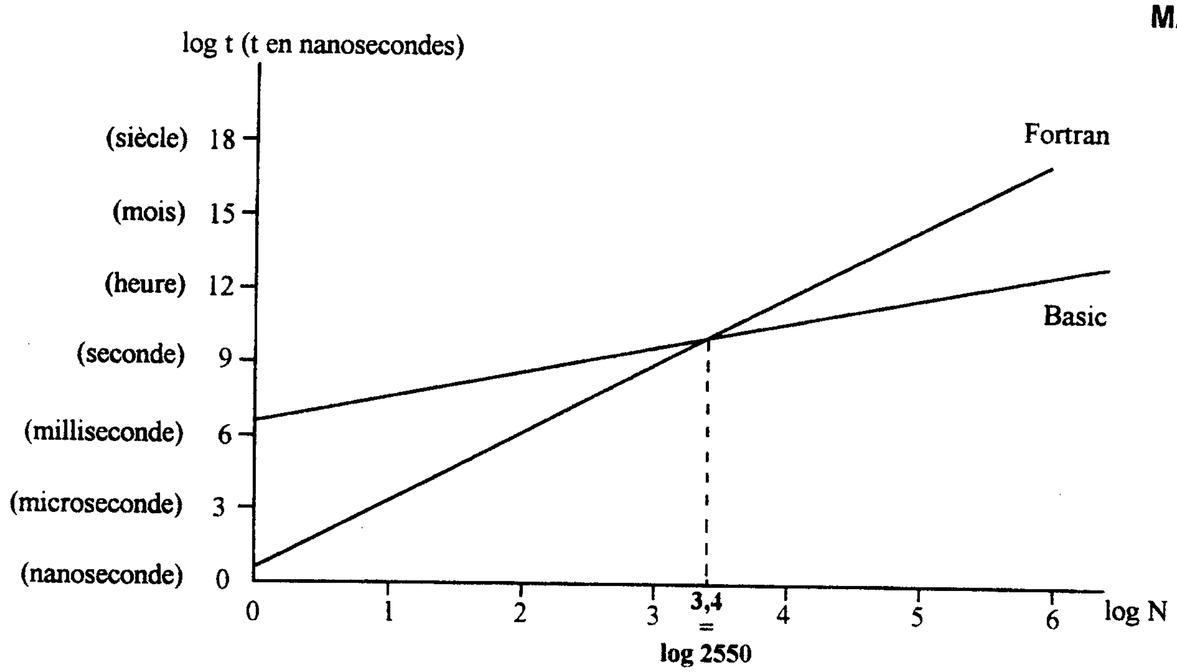


figure 14

ou

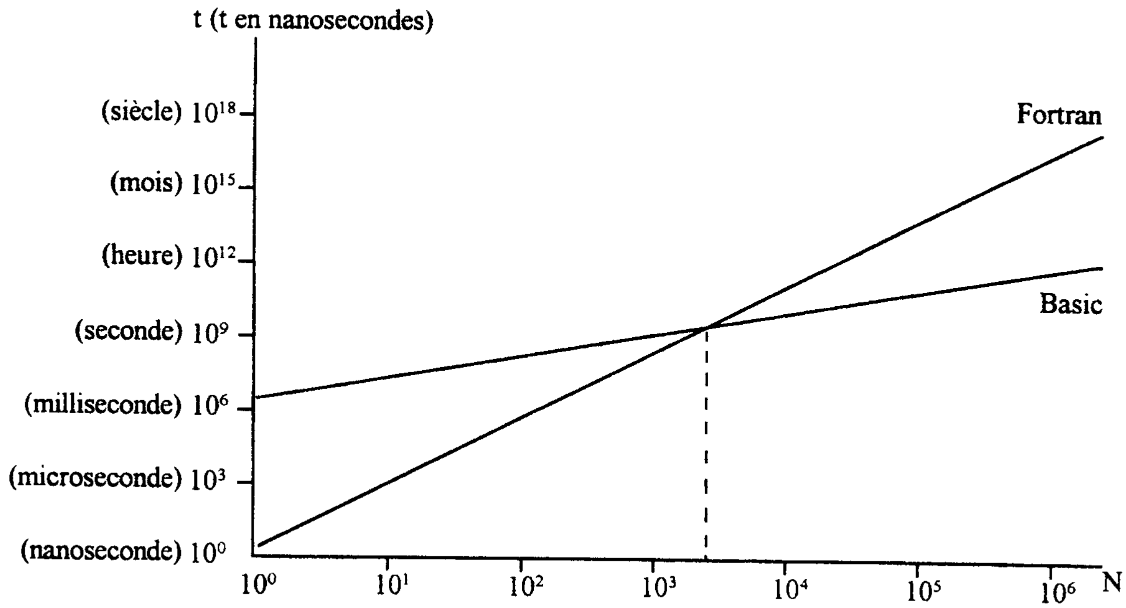


figure 15

MATHÉMATIQUE

GRAPHIQUES LOGARITHMIQUES ET SEMI-LOGARITHMIQUES

Frédérickx M.
Parker M.

5. Une convention bien utile

Très souvent dans un graphique semi-logarithmique, pour la facilité de l'utilisateur, ce ne sont pas les valeurs de log y qui sont indiquées sur l'échelle logarithmique, mais celles de y.
De même, dans les graphiques log-log, sur l'axe x*, on indique en fait les valeurs de x et sur l'axe y*, on indique les valeurs de y. Nous avons déjà vu des exemples de ceci aux points 4.3 et 4.5.
Reprenons l'exemple de la fonction $y = 5^x$ (voir figure 1, page 5).
Avec cette convention, le graphique devient

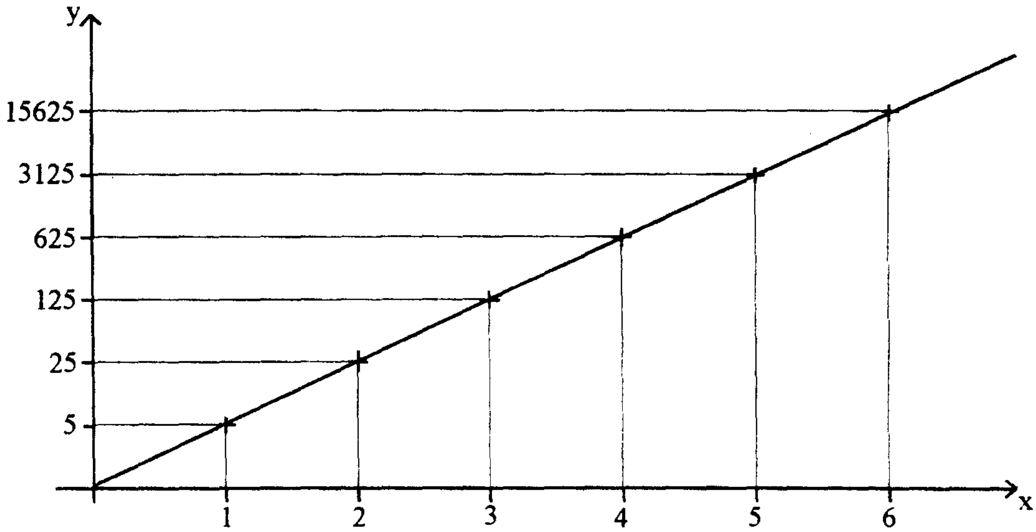


figure 16

La valeur 25 sur l'axe vertical représente donc en fait log 25 = 1,4. Le point de coordonnées (2,25) dans des axes linéaires devient le point (2, log 25) dans des axes semi-logarithmiques. Grâce au subterfuge cité ci-dessus, l'utilisateur ne doit pas calculer la valeur de log 25, ce qui facilite sa tâche.
Cette convention présente un autre avantage : nous avons vu que les fonctions du type $y = b \cdot a^x$ ont pour graphique lin-log des droites d'équation $y^* = \log a \cdot x + \log b$.
Étant donné que les valeurs indiquées sur l'axe y* sont celles de y, la valeur de a se lit immédiatement sur le graphique.

Exemple :

On donne les points de coordonnées (1,24), (2,96), (3,384), (4,1536), (5,6144), (6,24576). Ils appartiennent à une courbe d'équation $y = b \cdot a^x$. Comment déterminer a et b graphiquement ?
On reporte ces points dans des axes lin-log.

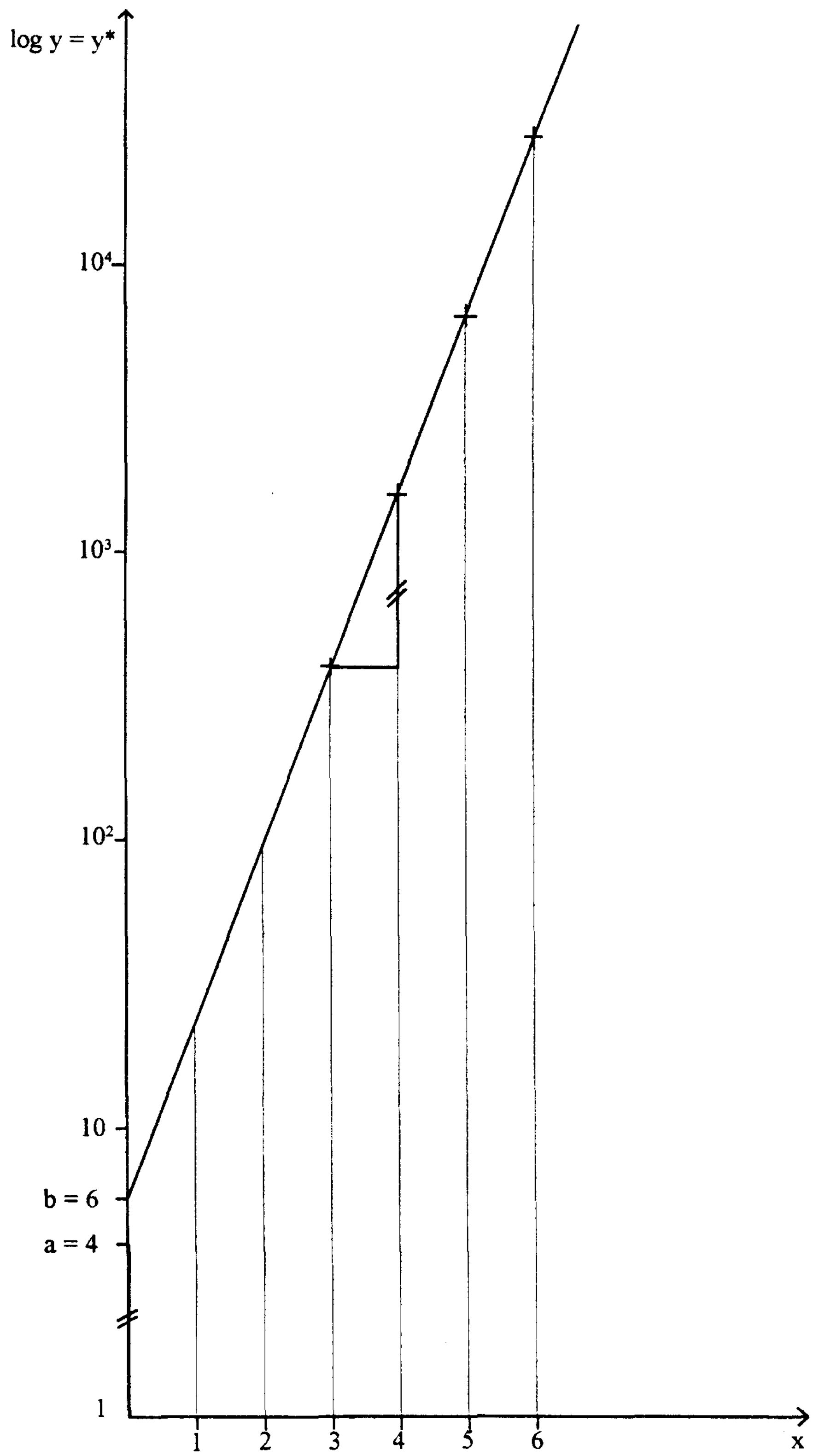


figure 17

Les valeurs de a et de b se lisent aisément sur le graphique : a = 4 et b = 6. La loi qui relie les points donnés est donc $y = 6 . 4^x$.

MATHÉMATIQUE

GRAPHIQUES LOGARITHMIQUES ET SEMI-LOGARITHMIQUES

Frédérickx M.
Parker M.

6. Le papier à simple ou double échelle logarithmique

Des exemples de tels papiers sont reproduits en annexe.

6.1. Précision

Si on regarde attentivement ces papiers, on se rend compte que les sous-graduations des échelles logarithmiques sont obtenues par interpolation linéaire. On assimile donc la fonction logarithmique à une succession de segments de droite. Ceci est certainement une source d'imprécision, mais dans la pratique, ces erreurs sont en général négligeables.

6.2. Petits nombres et grands nombres

Que faire des fonctions du type $y = a^x$ où $0 < a < 1$?
Les valeurs prises par y sont alors inférieures à 1. Or, la plus petite valeur que peut prendre y semble valoir 1 dans l'échelle logarithmique. On peut remédier à cet inconvénient :

voir figures 18 et 19 (page suivante)

L'utilisateur peut choisir la signification des nombres qui apparaissent sur l'axe y*.
Pour les fonctions du type $y = a^x$ où $a > 1$, l'interprétation est celle de la figure 18. La valeur y = 560 par exemple, se porte au « troisième étage » en face de la graduation 5,6.
Pour les fonctions du type $y = a^x$ où $0 < a < 1$, l'interprétation des nombres situés sur l'axe y* dépend du nombre de décimales que l'utilisateur veut considérer (figure 19).

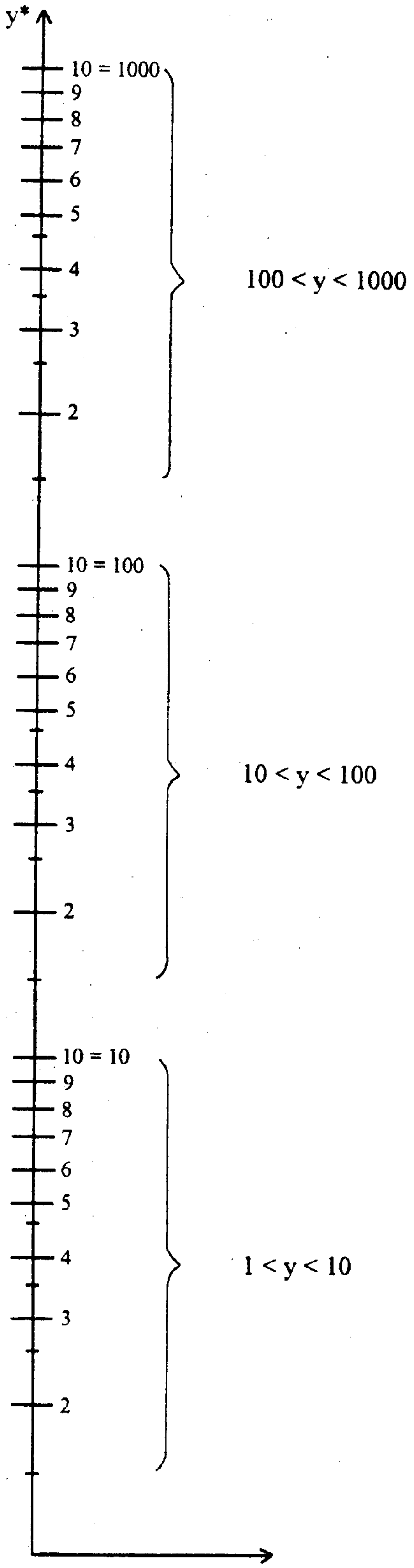


figure 18

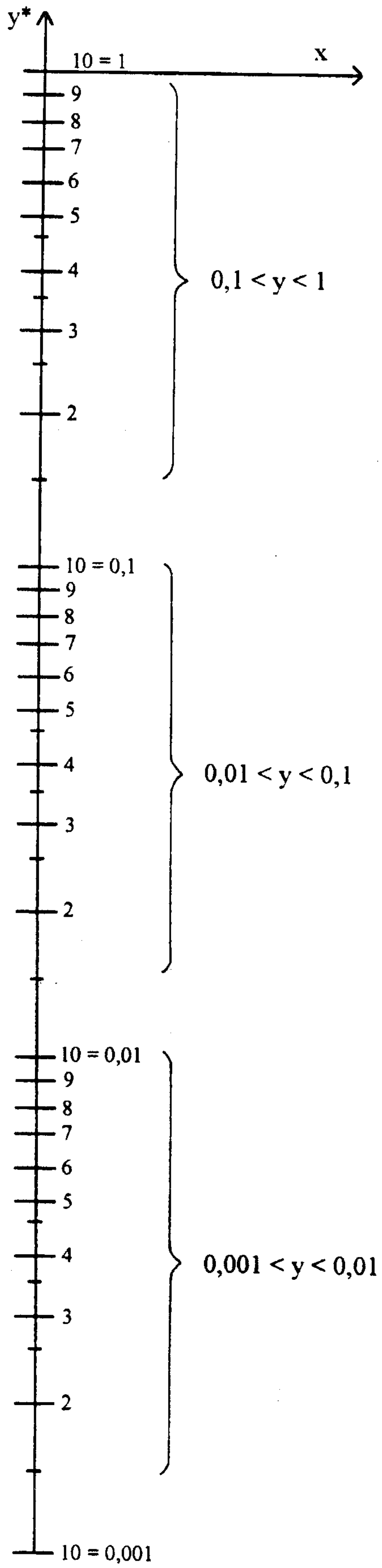


figure 19

MATHÉMATIQUE

GRAPHIQUES
LOGARITHMIQUES ET
SEMI-LOGARITHMIQUES

Frédérickx M.
Parker M.

6.3. Exemples d'utilisation

6.3.1.

Au laboratoire, l'expérimentateur obtient des mesures lors d'une expérience. Il croit que la variable x et la fonction y de cette variable sont liées par une loi exponentielle. Il reporte les couples de valeurs qu'il a obtenues lors de son expérience sur un papier lin-log. S'il obtient une droite, la loi qui régit l'expérience est du type $y = b \,.\, a^x$
Les valeurs de a et de b se lisent sur le graphique, comme nous l'avons vu précédemment.

Exemple pratique :

Pour déterminer la période ou la demi-vie d'une substance radioactive, on mesure l'activité de cette substance, activité qui est proportionnelle au taux de comptage des particules émises.
On obtient le tableau suivant :

temps (h)	taux
0	1000
0,2	819
0,4	670
0,6	548
0,8	449
1	368
1,5	223
2	135
2,5	82
3	49
4	18
5	7

Le taux de comptage C est tel que $C = C_0 \,.\, e^{-\lambda t}$
ou $C^* = \log C = \log C_0 - (\lambda \,.\, \log e) \,.\, t$
dont le graphique lin-log est une droite. L'ordonnée à l'origine est $\log C_0$ et la valeur de C_0 se lit donc immédiatement sur l'axe vertical ($C_0 = 1000$).

Figure : voir annexe I

On peut déterminer de façon graphique la constante de radiation λ. En effet, on voit que la pente de cette droite, c'est-à-dire $-\lambda \,.\, \log e$, vaut $-\log 2{,}7 = -\log e$ et donc $\lambda = 1$.
On en déduit $C = 1000 \,.\, e^{-t}$

6.3.2.

Si l'expérimentateur obtient des mesures lors d'une expérience et qu'il croit que la variable x et la fonction y de cette variable sont liées par une loi du type $y = b \cdot x^a$, il reporte les couples de valeurs qu'il a obtenues lors de son expérience sur un papier log-log. S'il obtient une droite, la loi qui régit l'expérience est bien du type présumé. Les valeurs de a et de b se lisent sur le graphique, comme nous l'avons vu précédemment.

Exemple pratique :

Un corps glisse sans frottement vers le bas d'un plan incliné qui a un angle de 17,5°. On mesure le temps (t) mis par le corps pour parcourir différents espaces (e). On obtient les résultats suivants, avec une incertitude de 0,001 s sur le temps et de 0,005 m sur l'espace parcouru.

t(s)	e(m)
0,4880	0,20
0,6880	0,40
0,8340	0,60
0,9410	0,80
1,0470	1,00
1,1760	1,20
1,2470	1,40

La loi qui relie temps et espace parcouru est $e = \frac{1}{2} at^2$ **(6)**

Par calculs, on trouve $a = (1{,}7517 \pm 0{,}0360)\ m/s^2$. Graphiquement, sur papier log-log, on trouve une valeur de a qui est acceptable.

Figure : voir annexe II

En effet, **(6)** équivaut à $e^* = 2 \cdot \log t + \log \frac{a}{2}$ **(7)**

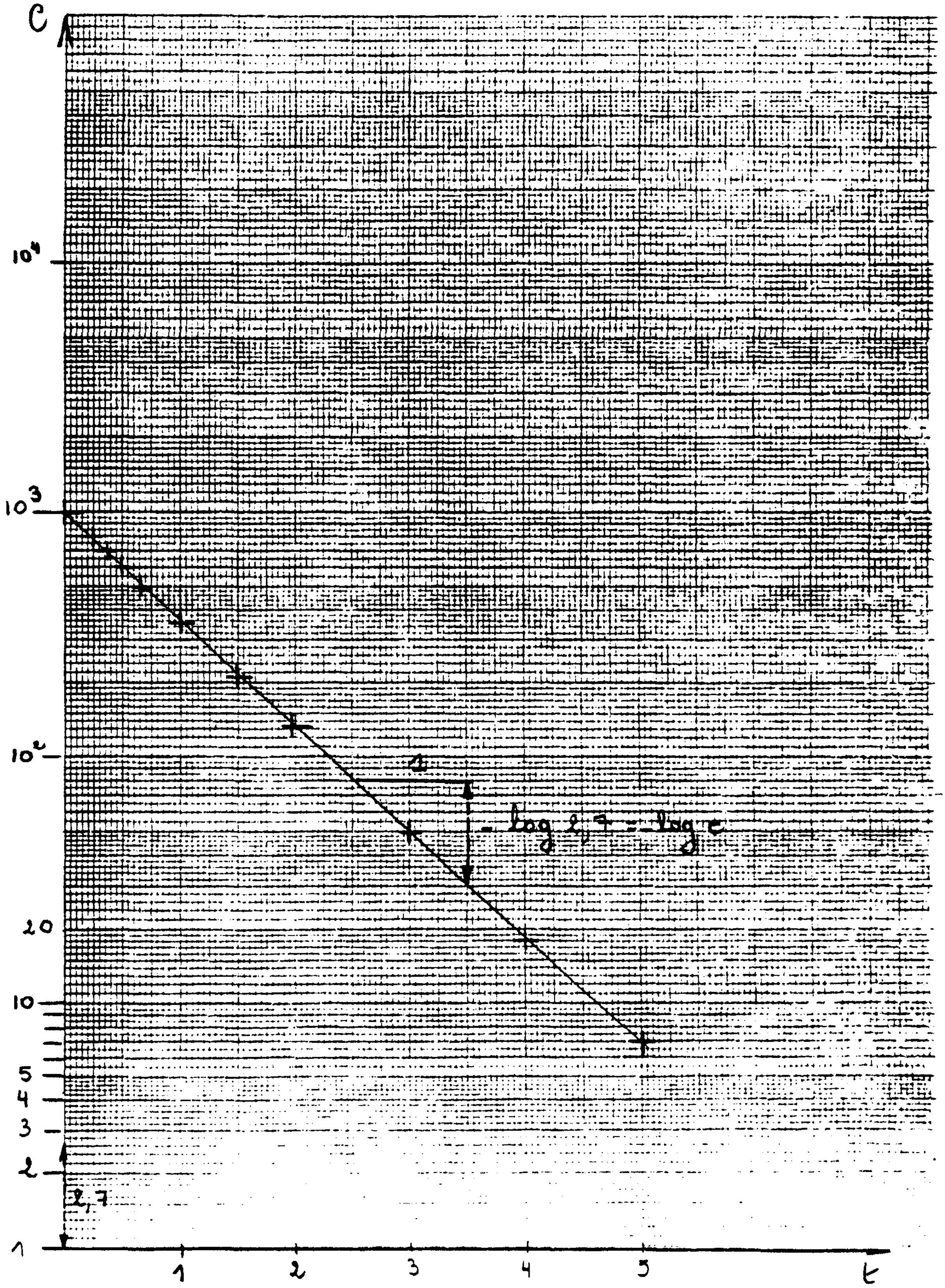
La valeur de $\log \frac{a}{2}$ est donc l'ordonnée à l'origine de la droite représentative de **(7)** et la valeur de $\frac{a}{2}$ se lit immédiatement sur le graphique.

On trouve $\frac{a}{2} \cong 0{,}85$ ou $a \cong 1{,}7$.

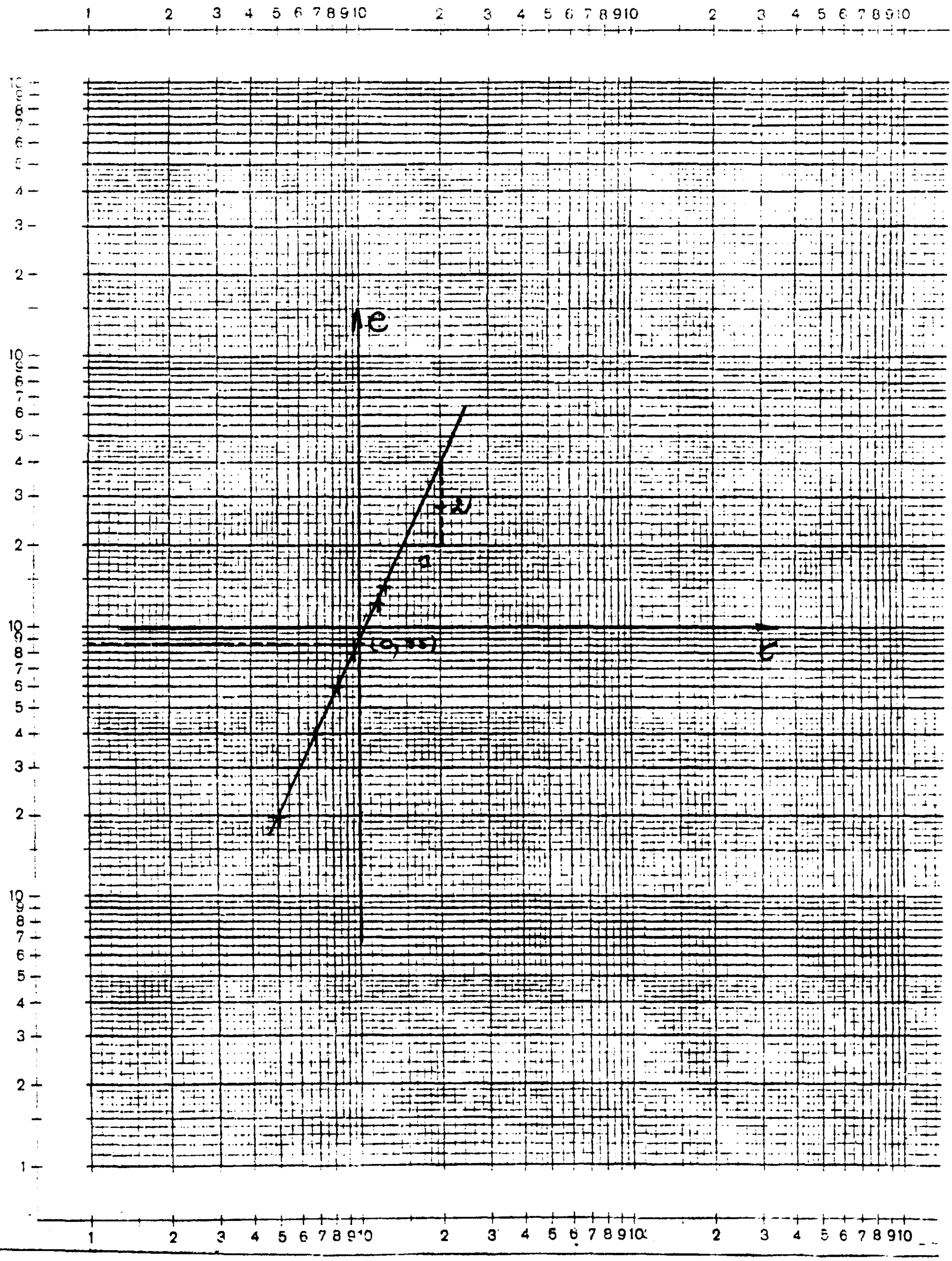
6.3.3.

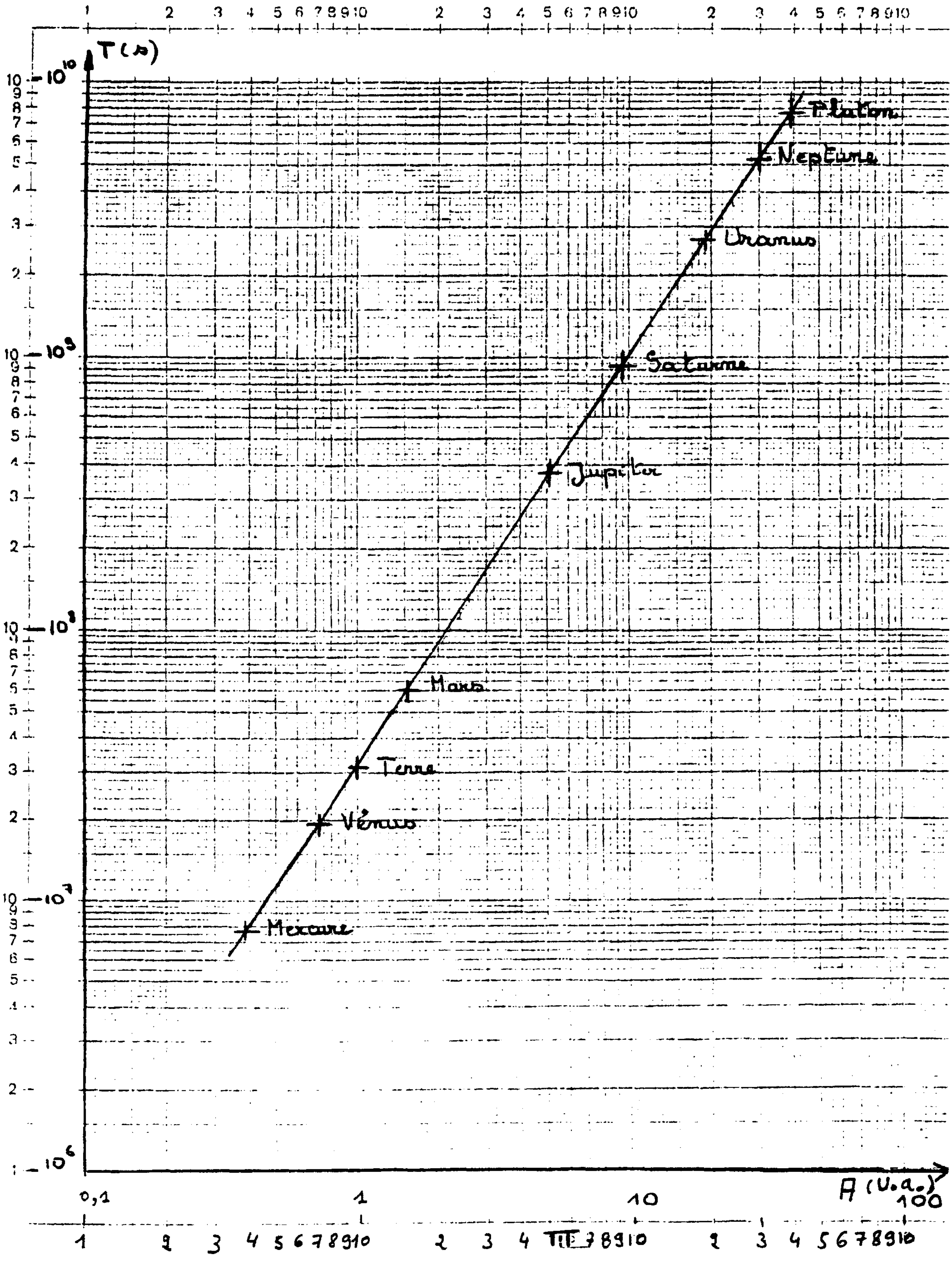
Le graphique vu au point 4.2 (figure 10, page 15) est repris sur papier log-log dans l'annexe III.

Annexe



Papier log-log




T (s)
10^{10}
10^{9}
10^{8}
10^{7}
10^{6}
Pluton
Neptune
Uranus
Saturne
Jupiter
Mars
Terre
Vénus
Mercure
0,1
1
10
100
A (U.a.)