9

Calcul de primitives

— CALCUL DE PRIMITIVES —

On appelle **primitive** de la fonction f(x), toute fonction F(x) qui est telle que

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

Cette fonction F(x) (quand elle existe) est déterminée à une constante près, on adopte la *notation* :

$$\boxed{F(x) + C = \int f(x)\, dx}$$

<u>Primitives immédiates :</u>

$\int dx =$

$\int a.dx =$ où $a \in \mathbb{R}$

$\int x^n\, dx =$ où $n \in \mathbb{R}$

$\int \sin x\, dx =$

$\int \cos x\, dx =$

$\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx =$

$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx =$

$\int e^x\, dx =$

$\int a^x\, dx =$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

$\int \frac{dx}{1 + x^2}$

$\int \frac{dx}{x.\sqrt{x^2 - 1}}$

1. $\int (ax + b)^n \, dx$

2. $\int e^{ax + b} \, dx$

3. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

5. $\int (1 + tg^2 x) \, dx$

6. $\int (1 + cotg^2 x) \, dx$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

8. $\int \frac{dx}{x^3}$

9. $\int \frac{dx}{(a + bx)^3}$

10. $\int \frac{dx}{ax + b}$

11. $\int (x + 1)^3 \, dx$

12. $\int (x + 2)^4 \, dx$

13. $\int (2x + 1)^4 \, dx$

14. $\int \frac{x^2}{x^3 + 1} \, dx$

15. $\int \sin(nx) \, dx$

16. $\int \frac{x}{a^2 + x^2} \, dx$

17. $\int (2x^4 - x^3 + x - 1 + \frac{1}{x}) \, dx$

18. $\int \frac{x^2}{1 + x^2} \, dx$

19. $\int \sin^2 \frac{x}{2} \, dx$

20. $\int tg^2 x \, dx$

21. $\int (\frac{1}{x^3} + \sqrt[3]{x^2} + 7x - \frac{3}{x}) \, dx$

22. $\int \frac{2x^2 - x + 2}{2x - 3} \, dx$

23. $\int \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x + 2} \, dx$

24. $\int \frac{x^4 - 16}{x^3 + x^2 - 4x - 4} \, dx$

25. $\int \frac{dx}{x^2.(ax + b)}$

26. $\int \sin(2x + 3) \, dx$

27. $\int x.\sin(2x^2 - 5) \, dx$

28. $\int (x - 1).\sqrt{x^2 - 2x + 1} \, dx$

29. $\int \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x} \, dx$

30. $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$

31. $\int \frac{dx}{\sin x}$

32. $\int \frac{dx}{\left(1 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

33. $\int \frac{\ln|x|}{x}\,dx$

34. $\int (3x^2 - 1)(x^3 - x + 3)^5\,dx$

35. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$

36. $\int \ln|x|\,dx$

37. $\int x.\sin x.dx$

38. $\int \arcsin x\,dx$

39. $\int \frac{1}{x.\ln|x|}\,dx$

40. $\int (x^2 - 2)e^{x+3}\,dx$

41. $\int xe^{2x}\,dx$

42. $\int x^2\cos x\,dx$

43. $\int x^2\sqrt{1 + x^3}\,dx$

44. $\int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x}\,dx$

45. $\int e^x\cos x\,dx$

46. $\int (2x - 1)e^{x^2 - x + 4}\,dx$

47. $\int \ln^2 x\,dx$

48. $\int \frac{\cos x}{(1 - \sin x)^5}\,dx$

49. $\int \frac{e^x}{e^x - 1}\,dx$

50. $\int (2x^3 - x^2 + 1)\sin x\,dx$

51. $\int \frac{dx}{x^2 - 1}$

52. $\int e^{\pi a}\left(a^2 + 7a - \frac{6}{a^7}\right)dx$

53. $\int (x^2 - 2x + 3)e^x\,dx$

54. $\int x.\mathrm{tg}^2\,\frac{x^2}{2}.dx$

55. $\int \cos^2\frac{x}{2}\,dx$

56. $\int \sin x\cos x\,dx$

57. $\int \mathrm{cotg}^2 x\,dx$

58. $\int \frac{1 - x^2}{1 + x^2}\,dx$

59. $\int (x^2 + x + 2) \ln|x| \, dx$

60. $\int \frac{1 + x + x^2}{x(1 + x^2)} \, dx$

61. $\int \frac{1}{(5x + 7)^3} \, dx$

62. $\int (\ln x)^n \, dx \quad$ où $n \in \mathbb{N}$

63. $\int \frac{4x^2 - 6x - 1}{(2x - 1)^{\frac{3}{2}}} \, dx$

64. $\int x \, \mathrm{arctg} x \, dx$

65. $\int \frac{x^2 \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \, dx$

66. $\int e^{3x - 1} \, dx$

67. $\int \mathrm{th} x \, dx$

68. $\int (2x+1)\cos(x^2 + x - 2) \, dx$

69. $\int \sin^3 x \, dx$

70. $\int \frac{3x}{1 + \sqrt{1 + 2x}} \, dx$

71. $\int \frac{1}{1 - x} \sqrt{\frac{x}{1 - x}} \, dx$

72. $\int e^{-3x} \cos x \, dx$

73. $\int \frac{dx}{(\sqrt{3 - x})^3}$

74. $\int (x^2 + 1)(x + 1)^5 \, dx$

75. $\int \frac{4x^2 + 2x + 1}{(2x - 1)^3} \, dx$

76. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

77. $\int \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} \, dx$

78. $\int \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{9 - x^2}} \, dx$

79. $\int \frac{dx}{\left(\sqrt{1 - x^2}\right)^3}$

80. $\int \frac{1}{x} (\ln x)^2 \, dx$

81. $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

82. $\int \frac{5x}{\left(x^2 - 3\right)^2} \, dx$

83. $\int \frac{1}{5 + 4\cos x} \, dx$

84. $\int \frac{\sqrt{1 - x^{\frac{2}{3}}}}{x \sqrt[3]{x}} \, dx$

85. $\int \frac{\mathrm{cotg} x}{\ln(\sin x)} \, dx$

86. $\int \frac{dx}{x^2 + 4}$

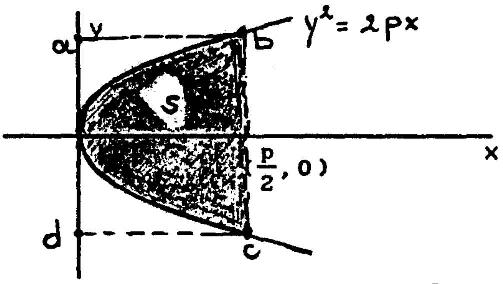
87. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x - 2)^2 + 9}$

88. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$

89. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 3x + 2}$

90. Construire $y = x^2 - 6x + 5$
Calculer l' aire délimitée par la courbe, l' axe des x, et les parallèles à l' axe des y aux points d' abscisse 0 et 5.

91.



Montrer que S vaut les $\frac{2}{3}$ de l' aire du rectangle abcd.

92. Retrouver l' aire du cercle de rayon R.

93. Calculer l' aire de l' ellipse dont les axes ont respectivement 2a et 2b pour longueur.

94. Calculer l' aire de la surface comprise entre les courbes $y = x^2 + 2x + 1$, $y = x^2 - 2$, $x = 0$, $y = 0$, et $x = 2$.

95. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + x + 1}$

96. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 - 1}$

97. $\displaystyle\int \frac{4x^2 + x + 13}{x^3 - x^2 + 3x + 5}\, dx$

98. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6 - 1}$

99. $\displaystyle\int \frac{x^5 + 1}{(x^2 + 1)^2}\, dx$

100. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$

101. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, dx$

102. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}\, dx$

103. $\displaystyle\int \frac{dx}{2 - \sin^2 x}$

104. $\displaystyle\int \cos^8 x\, dx$

105. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\, dx$

106. $\displaystyle\int \sin^4 x\, dx$

107. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\, dx$

108. $\displaystyle\int \sin 5x \sin 3x\, dx$

109. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x}\, dx$

Intégration des fractions rationnelles

Soit à calculer $\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$ où f(x) et g(x) sont deux polynômes tels que le degré de f(x) est inférieur au degré de g(x).

On décompose la fraction à intégrer en fractions simples. on est donc ramené au calcul de

A) $I = \int \frac{dx}{(x-a)^n}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}_0$:

$$I = \begin{cases} \ln|x-a| + C & \text{si } n = 1 \\ \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C & \text{si } n \neq 1 \end{cases}$$

B) $J = \int \frac{\alpha x + \beta}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$ où $a \in \mathbb{R}_0$; $b, c, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}_0$ et $b^2 - 4ac < 0$

$$= C_1 . \int \frac{(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx + C_2 . \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes faciles à déterminer

Soit $J_1 = \int \frac{(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$ dont le calcul est immédiat si on fait le changement de variable $t = ax^2 + bx + c$.

Soit $J_2 = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ qui devient par changement de variable

$$= C_3 . \int \frac{dy}{(y^2+m^2)^n}$$ où C_3 et m sont des constantes.

qui devient, en posant $z = \frac{y}{m}$

$$= C_4 . \int \frac{dz}{(z^2+1)^n}$$ où C_4 est une constante.

Soit $K_n = \int \frac{dz}{(z^2 + 1)^n}$

Si $n = 1$: $K_1 = \text{arctg}z + C$

Si $n > 1$: $K_n = \int \frac{z^2 + 1}{(z^2 + 1)^n} dz - \int \frac{z^2}{(z^2 + 1)^n} dz$

$$= K_{n-1} - \int \frac{z^2}{(z^2 + 1)^n} dz \qquad (1)$$

Le calcul de $L_n = \int \frac{z^2}{(z^2 + 1)^n} dz$ se fait par parties :

$u = z$	$v = \frac{(z^2 + 1)^{-n + 1}}{2(1 - n)}$
$du = dz$	$dv = \frac{z}{(z^2 + 1)^n} dz$

$$L_n = z . \frac{(z^2 + 1)^{-n + 1}}{2(1 - n)} - \frac{1}{2(1 - n)} . K_{n-1} \qquad (2)$$

(1) et (2) montrent que K_n peut se calculer par récurrence puisqu' on connaît K_1.

110. Construire ·

$$y = \frac{(2x - 1)(x + 1)}{x}$$

Calculer l' aire délimitée par la courbe, l' axe X et les droites d' équation $x = 2$ et $x = 4$

111. $\int (\arcsin x)^2 \, dx$

112. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 2}$

113. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} \, dx$

114. $\int \frac{dx}{5 + 3\cos^2 x}$

115. $\int \frac{1}{x^2} \cdot \mathrm{tg}^2 \frac{1}{x} \cdot dx$

116. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 1}$

117. $\int \cos^3 \frac{2x}{3} \, dx$

118. $\int \frac{dx}{\mathrm{tg}x + \sin x}$

119. $\int \sin x \sin 3x \, dx$

120. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin x} \, dx$

121. $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$

122. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$

123. $\int \cos 4x \cos 7x \, dx$

124. $\int \cos 2x \sin 4x \, dx$

125. $\int \frac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{\sec x}} \, dx$

126. $\int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx$

127. $\int \cos x \cos 2x \cos 3x \, dx$

128. $\int \mathrm{tg}^3 3x \, dx$

129. $\int \frac{dx}{\lambda + \cos x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

130. $\int e^{3x}(x^3 - 6\sin x) \, dx$

131. $\int \frac{1 + \mathrm{tg}^2 x}{\sqrt{\mathrm{tg}x}} \, dx$

132. $\int \frac{\sin^3 x}{\lambda - \cos x} \, dx$ où $\begin{cases} \lambda \in \mathbb{R} \\ \lambda > 1 \end{cases}$

133. $\int \frac{dt}{\cos t}$

134. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + x + 2}}$

135. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 9}}$

136. $\int \frac{x + 3}{\sqrt{9x^2 + 2x + 1}} \, dx$

Intégration des fonctions rationnelles en sinx et cosx

Voici quelques procédés pour intégrer une fonction trigonométrique. Il ne faut pas vouloir les utiliser à tous prix !

Soit f une fonction rationnelle

$\int f(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x)\, dx$ .... on pose $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$

$\int \cos x \,.\, f(\sin x)\, dx$ .... on pose $t = \sin x$ (1)

$\int \cos^n x \,.\, f(\sin x)\, dx$ comme $\cos^n x = \cos x.\left(1 - \sin^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}}$, on emploie le procédé (1)

$\int \sin x \,.\, f(\cos x)\, dx$ .... on pose $t = \cos x$ (2)

$\int \sin^n x \,.\, f(\cos x)\, dx$ comme $\sin^n x = \sin x.\left(1 - \cos^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}}$, on emploie le procédé (2)

$\left.\begin{array}{l} \int \sin mx \,.\, \cos nx \,.\, dx \\ \int \sin mx \,.\, \sin nx \,.\, dx \\ \int \cos mx \,.\, \cos nx \,.\, dx \end{array}\right\}$ On applique les formules de Simpson

$\int \sin^m x \,.\, \cos^n x.\, dx$

Soit on pose $t = \cos x$ (en particulier si m est impair) ou
$t = \sin x$ (en particulier si n est impair) pour appliquer les procédés vus ci-dessus.

Soit on applique les formules
$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ et $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$
si m et n sont pairs et ce pour abaisser le degré des facteurs

Soit on pose $t = \operatorname{tg} x$ si m et n sont pairs et que l' un des deux (au moins) est négatif .

137. $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\,dx$

148. $\displaystyle\int \frac{a^3}{x^4 - a^4}\,dx$ où $a \in \mathbb{R}$

138. $\displaystyle\int \frac{x + 3}{\sqrt{-4x^2 + 4x - 3}}\,dx$

149. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \sin x}$

139. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}$

150. $\displaystyle\int x\sqrt{1 + x}\,dx$

140. $\displaystyle\int \frac{\left(1 - \sqrt{x^2 + x + 1}\right)^2}{x^2.\sqrt{x^2 + x + 1}}\,dx$

151. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}\,dx$

141. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x - 1}}$

152. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + e^{ax}}$ où $a \in \mathbb{R}^+$

142. $\displaystyle\int \frac{6\,dx}{\sqrt{7x^2 - 8x + 9}}$

153. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x.\sin^2 x}$

143. $\displaystyle\int \frac{x + 3}{\sqrt{-4x^2 + 4x + 3}}\,dx$

154. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{x^5}{1 - \cos x}\,dx$

144. $\displaystyle\int \frac{x + 3}{\sqrt{4x^2 + 4x + 3}}\,dx$

155. $\displaystyle\int \frac{x^5}{a^3 + x^3}\,dx$ où $a \in \mathbb{R}$

145. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2 + 2x + 1}}$

156. $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(a^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ où $a \in \mathbb{R}$

146. $\displaystyle\int \frac{5x + 3}{\sqrt{x^2 + 4x + 10}}\,dx$

157. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(1 + x)}$

147. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1}}{x}\,dx$

158. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3 x\,dx$

Intégration des fontions irrationnelles

Intégrales contenant $\sqrt{a^2 - x^2}$ où $a \in \mathbb{R}$: on pose $x = a.\sin t$

Intégrales contenant $\sqrt{x^2 - a^2}$ où $a \in \mathbb{R}$: on pose $x = a.\sec t$

Intégrales contenant $\sqrt{x^2 + a^2}$ où $a \in \mathbb{R}$: on pose $x = a.\operatorname{tg} t$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad \text{où } a \in R_0;\ b,\ c \in \mathbb{R} :$$

— Si $a < 0$: On se ramène par changement de variable à

$$\int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}} = \arcsin \frac{t}{k} + C$$

— Si $a > 0$: On se ramène par changement de variable à

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} = \ln \left| t + \sqrt{t^2 \pm k^2} \right| + C$$

$$\int \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx \quad \text{où } a,\ \alpha \in R_0;\ b,\ c,\ \beta \in \mathbb{R}$$

$$= A. \underbrace{\int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx}_{\substack{\text{immédiat si on pose} \\ t = ax^2 + bx + c}} + B. \underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}}_{\text{voir ci-dessus}}$$

Transformations d' Euler pour l' intégration des fonctions rationnelles en (x, $\sqrt{ax^2 + bx + c}$) :

— Si $a \geq 0$, on pose $t = \sqrt{ax^2 + bx + c} \pm \sqrt{a}\,.x$

— Si $c > 0$, on pose $\sqrt{ax^2 + bx + c} = x.t \pm c$

— Si $b^2 - 4ac \geq 0$, on pose $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha).t$

où α est une racine du trinôme $ax^2 + bx + c$

159. $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{ax} \sin x \, dx$ où $a \in \mathbb{R}$

160. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1 + 2x}} \, dx$

161. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 2x + \lambda}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

162. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{a + x} \, dx$ où $a \in \mathbb{R}$

163. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x^3 + a^3)}$ où $a \in \mathbb{R}$

164. $\displaystyle\int \frac{x^{\frac{3}{2}}}{(a^2 - x)^2} \, dx$ où $a \in \mathbb{R}$

165. $\displaystyle\int_0^1 x.\ln(1 + x) \, dx$

166. $\displaystyle\int \frac{x}{(x - 1)^2(x + 1)} \, dx$

167. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \cos^2 x} \, dx$

168. $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \sin^2 x \, dx$

169. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}} \, dx$

170. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$

171. $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(1 + x^2\right)^2}$

172. $\displaystyle\int \cos^2 3x \sin^4 3x \, dx$

173. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2} \, dx$

174. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 6}} \, dx$

175. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}}$

176. $\displaystyle\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 2\sin^2 x}$

177. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\cos^2 x + \sin x.\cos x + \sin^2 x}$

178. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} \cdot \frac{dx}{x^2}$

179. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} \, dx$