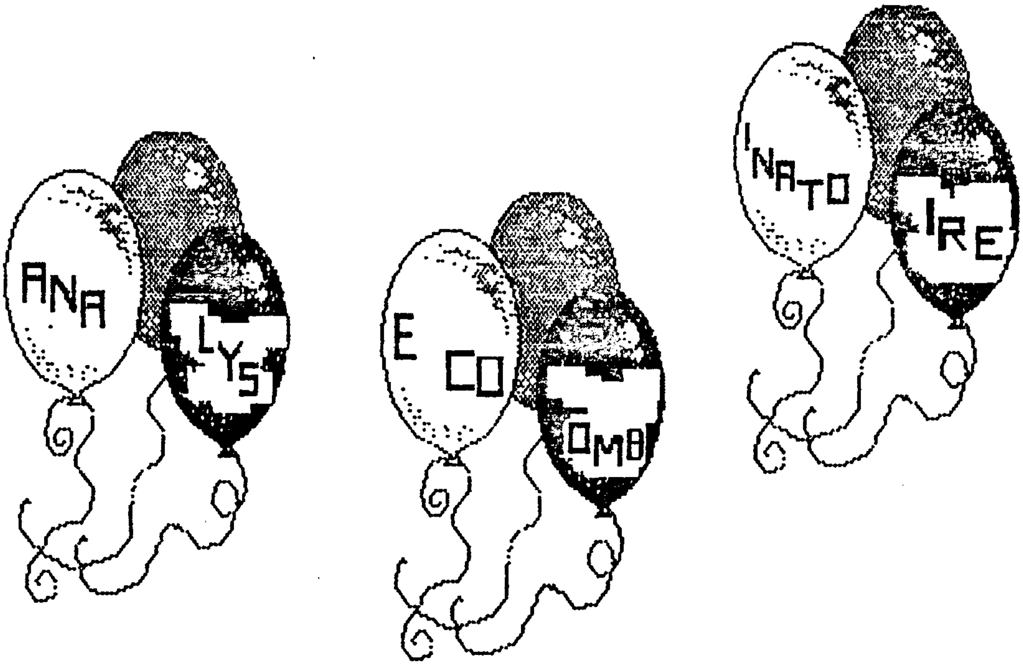
# 11

# Probabilites

# Analyse combinatoire




# Chapitre 11 - 1

# - ANALYSE COMBINATOIRE -

Le nouveau propriétaire d' un comptoir de crème glacée décide de réarranger chaque jour ses 20 parfums de crème, de manière à déterminer la présentation qui maximise les ventes. Combien de jours lui faudra-t-il pour épuiser toutes les possibilités ?

Pour la "première place", il y a 20 choix possibles. Quand elle est occupée, il demeure 19 choix pour la "seconde place". Une fois la seconde place occupée, il reste 18 choix possibles pour la " troisième place" et ainsi de suite jusqu' à la dernière place qui est automatiquement remplie par la glace restante. Il faudra donc 20.19.18.17. ... .4.3.2.1 = 2 432 902 008 176 640 000 jours ce qui fait $6.10^{15}$ années à notre marchand pour réaliser son projet.

## Le principe de multiplication :

Nous voyons dans l' exemple ci-dessus se dégager une observation importante :

> Si un événement A peut se produire de a manières et, lorsqu'il a lieu, si l' événement B peut se produire de b manières différentes, alors l' événement " A et B " peut se produire de a.b manières.

Bien entendu, ce principe s' étend au cas de 3 événements consécutifs et plus généralement au cas d' un nombre fini d' événements.

## Exercices :

1. Serge possède 7 chemises, 2 pantalons, 9 paires de chaussettes et 9 pulls. De combien de manières différentes peut-il s' habiller ( c' est-a-dire faire le choix d' une chemise, d' un pantalon, d' une paire de chaussettes et d' un pull )? En trouvant la réponse, vous comprendrez qu' il est parfois en retard le matin à l' école.
2. Pendant quelques années, les plaques de voiture belges étaient constituées de deux lettres autres que o, suivies de 3 chiffres. Combien de plaques différentes pouvait-on constituer de cette manière ?
3. Audrey a 12 cadeaux différents à offrir à ses 12 copains de classe. Quelle est le nombre de distributions possibles ?

Passons maintenant à un autre exemple : Air Belga offre 4 vols en avion de Bruxelles à Nice et Safina en offre 3. De combien de manières peut-on voler de Bruxelles à Nice ?

La réponse est bien entendu 7 car on ne peut voler simultanément dans un avion d' Air Belga et de Safina. Mais soyons prudents! S' il y a 5 vols avec dîner et 6 vols en soirée de Nice à Rome, on ne peut en conclure qu' il y a 5 + 6 = 11 vols au total car un vol en soirée peut être aussi un vol avec dîner.

Nous avons

**Le principe d' addition** :

> Si l 'événement A peut se produire de a manières et l' événement B de b manières, alors que A et B ne peuvent se produire simultanément, alors l' événement " A ou B " peut se produire de a + b manières.

**La notion de factorielle** :

Revenons à l' heureux propriétaire du comptoir de crème glacée. Il peut ordonner ses 20 parfums de 20.19.18. ... .4.3.2.1 manières différentes. S' il disposait de n conteneurs et de n parfums, il serait amené à faire le produit des nombres naturels de 1 à n. Cette expression intervient tellement souvent en mathématique qu' on lui donne un nom, ( **factorielle n** ) et un symbole ( **n!**) . Donc

$$n! = n.(n-1).(n-2). \ldots . 3.2.1 \qquad \text{où } n \in \mathbb{N}_0$$

Cette notation fut introduite par Christian **Krampe** (1760-1826), un mathématicien peu connu de Strasbourg, afin d' éviter des difficultés d' impression liées à un symbole antérieur. La notion de factorielle remonte au moins à Pascal.

Notons qu' on convient de poser

$$0! = 1 ,$$

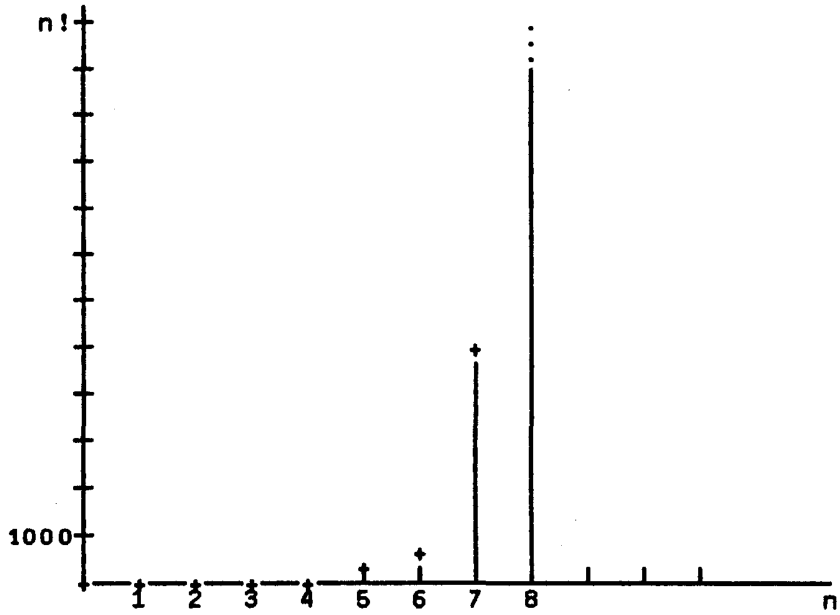
une convention dont l' intérêt est déjà apparue lors de l' étude du Binôme de Newton. Signalons qu' il est possible mais beaucoup plus délicat de concevoir une fonction factorielle x (x!) pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Calculons

$$\frac{6!}{4!} = \frac{6.5.4!}{4!} = 30$$

$$\frac{9!}{4!5!} = \frac{9.8.7.6.5!}{4!5!} = 9.7.2 = 126$$

| n | n! |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 6 |
| 4 | 24 |
| 5 | 120 |
| 6 | 720 |
| 7 | 5040 |
| 8 | 40 320 |
| 9 | 362 880 |
| 10 | 3 628 800 |
| 11 | 39 916 800 |




On voit que le graphique a une croissance vertigineuse.

Exercices :

1.Un restaurant offre 3 choix de boissons, 10 types de pizzas et 4 desserts différents. De combien de manières peut-on se constituer un repas comprenant une boisson, une pizza et un dessert ?

2.Une soirée dansante réunit 60 garçons et 50 filles. Combien de couples (mixtes) peuvent-ils se constituer ( et se défaire ) au cours de la soirée?

3.Christophe veut se rendre de Tubize à la mer en s' arrêtant à Braine l' Alleud pour prendre son copain Michaël. Il y a 4 routes de Tubize à Braine et 6 de Braine à la mer. Combien d' itinéraires différents, Christophe peut-il emprunter ?

4.Un club de 20 membres désire choisir un président, un secrétaire et un trésorier parmi ses membres. Ces mandats ne sont pas cumulables. De combien de manières le choix est-il possible ?
Et si les mandats sont cumulables ?

5.Chaque lettre du mot christel est écrite sur une carte différente. Combien de "mots" peut-on former avec ces cartes, étant donné qu' un "mot" peut avoir 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ou 8 lettres ?

6.Un entraîneur de basket-ball dispose de 4 arrières, de 3 pivots et de 5 ailiers. De combien de manières peut-il constituer une équipe comprenant 2 arrières, 1 pivot et 2 ailiers ?

7. Des numéros de téléphone comprennent 7 chiffres. Combien de téléphones peuvent-ils desservir si tous les chiffres sont admis ? Combien y en a-t-il si le premier chiffre ne peut être zéro ?

8. Combien y a-t-il de nombres de trois chiffres ? Combien y a-t-il de nombres de trois chiffres distincts ? Combien y a-t-il de nombres pairs de trois chiffres ? Combien y a-t-il de nombres de trois chiffres qui se terminent par 4 ?

9. Combien de nombres supérieurs à 5000, à chiffres distincts peut-on former en utilisant les chiffres 0, 2, 3, 4, 5, 6 ?

10. Calculer, en simplifiant

$$\frac{7!}{4!3!} \quad , \quad \frac{(n-1)!}{n!} \quad , \quad \frac{(n!)^2}{(n-1)!(n-2)!}$$

11. Une classe contient 6 rangées de 5 sièges individuels fixés au sol et peints en vert. De combien de manières peut-on y installer 15 élèves ?

12. De combien de manières peut-on distribuer 9 livres différents à 3 personnes a) si chacune en reçoit 3

b) si chacune en reçoit au moins 1

c) sans restriction

<u>Permutations et arrangements</u>

Soit E un ensemble de n éléments. On peut ordonner totalement E en choisissant successivement un premier, un deuxième, ... un ènième élément dans E. Cela peut se faire de

$$n.(n-1).(n-2). \ldots .3.2.1 = n!$$

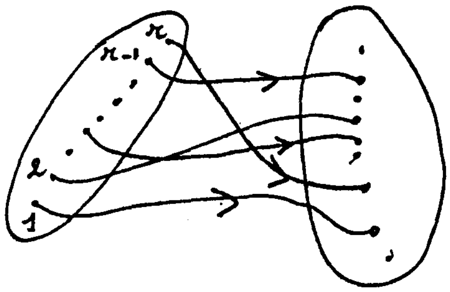
manières. Ordonner totalement E consiste donc à établir une bijection de l' ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, n-2, n-1, n\}$ sur E.

Chacune de ces bijections est appelée **permutation** de E.

Remarque : Dans l' étude des transformations, le mot permutation est plutôt réservé aux bijections de l' ensemble E sur lui-même. Le nombre de celles-ci est également n! Il n' y a guère de confusion possible résultant de ce double usage des mots "permutation de E".

Exemple : Avec les lettres du mot renaud, on peut constituer 6! = 720 mots de 6 lettres différentes tels que reunad, dauner, drunae ... Supposons maintenant qu' on demande de former des mots de trois lettres différentes prélevées parmi les lettres du mot renaud. Les lettres peuvent donc occuper 3 positions. La première position peut être occupée de 6 façons différentes. Ensuite, la deuxième peut l' être de 5 façons différentes et finalement la troisième de 4 façons. Le principe de multiplication s' applique et livre 6.5.4 = 120 possibilités. Ce type de problème est tellement commun qu' on introduit un vocabulaire et des notations à son sujet :

Lorsqu' on dispose de **n objets différents** et qu on en **sélectionne r dans un ordre déterminé, cela s' appelle un arrangement de n objets pris r à r.** On peut voir un arrangement de n objets pris r à r comme




une injection ( c' est à dire une application telle que $x \neq y$ implique $f(x) \neq f(y)$.) de l' ensemble { 1, 2, ... , r − 1, r } dans l' ensemble E de n objets . On peut encore considérer le problème comme étant celui d' une urne comprenant n boules distinctes où on prélève un échantillon ordonné de r boules et ce sans remise.

**Le nombre d' arrangements de n objets pris r à r est noté** $A_n^r$ (Ce qui n' est pas une notation standard : On utilise également $V_n^r$ en parlant des variations de n objets pris r à r, $P_n^r$ , $_rP_n$ ou $P(n,r)$ en parlant de permutations de n objets pris r à r ).

$$A_n^r = n.(n-1).(n-2). \; \ldots \; .(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ce qui exige la convention $0! = 1$ dans le cas particulier où $n = r$.

A noter que $A_n^n = n!$ est le nombre de permutations de n objets.

## Permutations d' objets dont certains sont identiques

Nous avons vu qu' avec les lettres du mot renaud on peut former $6! = 720$ mots différents. Le mot renaud possède la particularité que toutes ses lettres sont deux à deux distinctes. Qu' arrive-t-il s' il y a répétitions de lettres ?

Supposons qu' on parte du mot Anne. Convenons momentanément qu' on peut distinguer les deux lettres n en les écrivant par exemple l' une en vert et l' autre en rouge ou en utilisant des indices comme $n_1$ et $n_2$. Alors, $an_1n_2e$ et $an_2n_1e$ sont des mots différents. Avec ces conventions il y a $4! = 24$ mots différents qu' on peut obtenir avec les lettres du mot $an_1n_2e$ :

$an_1n_2e$, $an_2n_1e$,
$an_1en_2$, $an_2en_1$,
$aen_1n_2$, $aen_2n_1$,

$en_1n_2a$, $en_2n_1a$,
$en_1an_2$, $en_2an_1$,
$ean_1n_2$, $ean_2n_1$,
$n_1an_2e$, $n_2an_1e$,
$n_1aen_2$, $n_2aen_1$,
$n_1ean_2$, $n_2ean_1$,
$n_1en_2a$, $n_2en_1a$,
$n_1n_2ae$, $n_2n_1ae$,
$n_1n_2ea$, $n_2n_1ae$.

En fait, chaque mot est compté deux fois étant donné que $n_1$ et $n_2$ sont en fait des lettres identiques et peuvent être permutées entre elles. Il n' y a donc que $\frac{24}{2}$ mots différents que l' on peut former avec les lettres du mot Anne.

De même , avec les lettres du mot dimitri, il y a au total 7! mots différents si on utilise $i_1$, $i_2$, et $i_3$ . Les lettres i peuvent en fait être permutées (arrangées) de 3.2.1 = 3! manières différentes. Le nombre de mots différents qu' on peut former avec les lettres du mot dimitri est donc égal à $\frac{7!}{3!}$ que l' on note $P_7^3$.

Le nombre de mots différents qu' on peut former avec les lettres du mot mathématique vaut $P_{12}^{2,2,2} = \frac{12!}{2!2!2!} = 59\ 875\ 200$

Le nombre de mots différents qu' on peut former avec les lettres du mot initialisation vaut $P_{14}^{5,2,2,2} = \frac{\cancel{15!}\ 14!}{5!2!2!2!} = \cancel{1\ 362\ 160\ 800}$
90.810.720

## Arrangements avec répétition

Supposons qu' on ait 4 boîtes contenant respectivement un nombre illimité de m,de a, de r et de c (une boîte par lettre). On veut former des mots de 4 lettres à l' aide du contenu de ces boîtes. Par exemple marc, cram, rara, ccca, marr ... Le principe de multiplication montre qu' on peut créer 4.4.4.4 = $4^4$ = 256 mots différents . Le nombre de mots de 2 lettres serait $4^2$ .Le nombre de mots de 18 lettres serait $4^{18}$ .

D' une manière générale, on dispose d' un ensemble de s objets différents ou de copies de ceux-ci en nombre illimité. On désire constituer des ensembles ordonnés de t objets prélevés parmi les éléments de E et leurs copies.

**Le nombre de ces arrangements avec répétition de s objets pris t à t est égal à**

$$s^t$$

Ainsi l' ensemble $\mathbb{R}^2$ est obtenu à partir de E = $\mathbb{R}$ en considérant les arrangements avec répétitions de ses éléments pris 2 à 2.

Voici une interprétation ensembliste. On dispose d' un ensemble S de s éléments et d' un ensemble T de t éléments. Le nombre d' applications de T dans S est égal à $s^t$. Un arrangement avec répétition peut donc se voir comme une fonction.

Voici une interprétation par modèles d' urnes. On dispose d' une urne contenant s boules distinctes. On procède à un tirage de t boules avec remise de chaque boule après le tirage. Il y a $s^t$ tirages possibles.

Soyons vigilants !

Une personne apprend à faire des signaux sur un voilier. Elle dispose à cet effet de drapeaux de 6 couleurs différentes qu' elle peut disposer sur une perche pour former un signal. Combien de signaux peut-elle former en utilisant 4 drapeaux. ?

Ce problème n' est pas clairement posé. Y a-t-il un seul drapeau de chaque couleur ? Si c' est le cas, il y a 6.5.4.3 = 360 solutions. Si un signal peut comporter des drapeaux de même couleur et qu' il y a au moins 4 drapeaux de chaque couleur, il y a $6^4$ = 1296 signaux différents.

En posant et en résolvant un problème combinatoire, il convient donc d' être particulièrement attentif~~s~~ aux ambiguïtés possibles de l' énoncé et aux interprétations possibles de celui-ci.

Exercices :

1.Combien de mots différents peut-on former en permutant les lettres du mot emmanuel.

2. Combien de mots de 4 lettres peut-on former avec les lettres du mot paris sans répétition de lettres.
3. Combien de mots peut-on former avec des lettres du mot paris sans répétition de lettres.
4. Si 20 chevaux participent à une course, de combien de manières peut-on réaliser le tiercé a) dans l' ordre ?
   b) dans le désordre ?
5. Un dé est lancé 20 fois. Combien de résultats différents peut-on obtenir ?
6. Si on dispose de 4 drapeaux rouges, de 3 verts et de deux blancs, combien de signaux de 9 drapeaux peut-on constituer en enfilant ces drapeaux sur une perche ?
   Même question avec 8 et ensuite 7 drapeaux.

## Combinaisons et principe de double évaluation

Dans les pages précédentes, l' ordre dans lequel les divers choix étaient effectués avait de l' importance. Ce n' est pas toujours le cas. Si un groupe de 20 personnes doit se choisir un président, un secrétaire et un trésorier ,tous distincts, l'ordre du choix a de l' importance et il y a 20.19.18 choix possibles. Si ce même groupe doit constituer une délégation de 3 personnes, l' ordre n' a pas d' importance car choisir les personnes A, B, C ou A, C, B ou B, A, C ou B, C, A ou C, A, B ou C, B, A revient au même; bref, $3! = 6$ choix reviennent au même et il y a en fait $\frac{20.19.18}{6}$ délégations possibles. Ceci a déjà été expliqué, digéré et étudié dans le chapitre " Binôme de Newton ".

Ce résultat peut être obtenu d' une autre manière, par le **principe de double évaluation** qui introduit un ordre dans la délégation. A première vue cela peut paraître plus lourd mais dans des situations plus complexes, la lourdeur cède souvent le pas à la clarté. Voici comment on procède ici :

On compte le nombre de quadruples (X, Y, Z, D) où X, Y, Z sont des personnes distinctes et D une délégation. La double évaluation consiste à compter le nombre de (X, Y, Z, D) possibles de deux manières différentes.

Première manière : Soit d, le nombre de délégations. On peut d' abord choisir D, puis X dans D, puis Y dans D, puis Z dans D. Ceci donne d.3.2.1 quadruples.

Seconde manière : On peut d' abord choisir X, puis Y, puis Z, puis D, ce dernier étant déterminé. Cela donne 20.19.18.1 quadruples.

On a donc 20.19.18.1 = d. 3. 2. 2. 1 et d = $\frac{20.19.18}{6}$ comme auparavant.

Le problème, précédent se généralise comme suit : Soit E un ensemble de n éléments. Un sous-ensemble de E constitué de k éléments est appelé **combinaison de n éléments pris k à k**. ( Cette terminologie est standard).

Le nombre de combinaisons de n objets pris k à k est noté $\binom{n}{k}$ et ce nombre s' appelle coefficient binômial. Cette notation devenue standard est due à **Andreasvon Elligoliauson** mais on utilise encore $C_n^k$, C(n,k) ou ${}_nC_k$ .

Une double évaluation des (k + 1)-uples constitués de k éléments distincts de E et d' un sous-ensemble de k éléments qui les contient, livre

$$n.(n-1).(n-2). \dots .(n-k+1) . 1 = \binom{n}{k}.k.(k-1). \dots .2.1$$

Donc,

$$\binom{n}{k} = \frac{n.(n-1).(n-2). \dots .(n-k+1)}{k.(k-1).(k-2). \dots .2.1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

<u>Un autre exemple de double évaluation</u> :

L' observation livre un polyèdre qui possède 12 faces pentagonales et dont tout sommet figure sur 3 faces. Combien ce polyèdre a-t-il d' arêtes et de sommets ?

Ce n' est pas facile à visualiser, dès lors la combinatoire peut venir à la rescousse.

Soit $n_s$ le nombre de sommets et $n_a$ le nombre d' arêtes. Comptons de deux manières les couples (f , p) où f est une face et p un sommet appartenant à f :

$$12.5 = n_s.3 \qquad \text{ou} \qquad n_s = 20$$

Comptons de deux manières les couples (f , a) où f est une face et a une arête appartenant à f :

$$12.5 = n_a.2 \qquad \text{ou} \qquad n_a = 30.$$

On constate que cette méthode s' applique facilement alors qu' aucune formule toute faite n' est disponible au départ.

**Tableau récapitulatif** ( La plupart de ces formules se retrouvent facilement et rapidement par raisonnement ... Alors, n' encombrez pas votre mémoire de choses inutiles)

Nombre de manières de prendre n éléments parmi n ( permutation de n éléments) :

1. Tous les éléments sont distincts :
   1.1. L'ordre des éléments n' a pas d' importance : 1
   1.2. L'ordre des éléments a de l'importance : $n!$

2. Il existe des éléments identiques :
   1.1. L'ordre des éléments n' a pas d' importance : 1
   1.2. L'ordre des éléments a de l' importance :
   $P_n^{\alpha,\beta,\gamma} = \dfrac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}$ s' il y a $\alpha$ éléments identiques d' un type
   $\beta$ éléments identiques d' un deuxième type
   $\gamma$ éléments identiques d' un troisième type

Nombre de manières de prendre m éléments parmi n éléments distincts

1. Sans répétition ($m < n$) :
   1.1. L'ordre des éléments n' a pas d' importance (combinaison)
   $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{(n - m)!m!}$ ( voir chapitre " Binôme de Newton" )
   1.2. L'ordre des éléments a de l'importance (arrangement)
   $n.(n - 1).(n - 2). \ldots . (n - m + 1) = \dfrac{n!}{(n - m)!}$

2. Avec répétition ($m \gtrless n$) :
   1.1. L'ordre des éléments n' a pas d' importance :
   $\begin{pmatrix} n + m - 1 \\ m \end{pmatrix}$
   Cette formule peut se démontrer sans trop de peine par récurrence.
   1.2. L'ordre des éléments a de l' importance : $n^m$

Exercices :

1.Les 13 élèves de la classe veulent constituer un comité de 4 personnes parmi eux afin de rencontrer la direction.

a) De combien de manières est-ce possible ?

b) De combien de manières est-ce possible si un des 4 élèves doit occuper le rôle particulier de porte-paroles ?

2.Etant donné huit points du plan dont trois quelconques ne sont pas alignés, combien de triangles admettent-ils trois de ces points pour sommets ?

3.D' un groupe de 5 filles et de 6 garçons combien peut-on extraire d' équipes de 5 joueurs regroupant

a) 3 filles et 2 garçons

b) 5 filles ou 5 garçons

c) au moins 3 garçons.

4.Vincent veut répartir les 12 autres élèves de la classe en trois équipes de 4 dont l' une va jouer au whist, la seconde va jouer aux échecs et la troisième va faire le devoir de math. De combien de manières est-ce possible ?

5.D' un ensemble de 13 cartes différentes, on extrait un ensemble de 5 cartes. Combien y a-t-il de tels ensembles ?

6.Une urne contient 6 boules blanches et 10 boules noires. De combien de manières peut-on extraire 6 boules contenant 3 boules blanches et 3 boules noires ?

7.Un polyèdre possède des faces triangulaires et 6 sommets qui sont chacun sur quatre faces. Combien y a-t-il de faces ?

8.Combien y a-t-il de nombres de 4 chiffres différents ?

9.Combien peut-on former de mots de 7 lettres différentes formés de 3 consonnes et de 4 voyelles ?

10.On possède 12 souches de blé différentes que l' on veut croiser entre elles. Combien y a-t-il de croisements possibles ?

11.Dans une famille de 5 enfants, quelle est la probabilité d' avoir

a)au moins 3 garçons ?

b)au moins 3 garçons ou au moins 3 filles ?

12.Si $\binom{n}{5} = \binom{n}{10}$, que vaut $\binom{n}{2}$ ?

13. Il y a 22 élèves en 6A et 24 élèves en 6B. Combien de délégations peut-on former de façon à ce qu' elles contiennent 2 élèves de chaque classe ?
14. Dans un jeu de 32 cartes, Gilles extrait 8 cartes. Quelle est la probabilité qu' il obtienne parmi ces huit cartes
    a) 4 as ?
    b) exactement 3 as ?
    c) au moins 3 piques ?
15. Combien peut-on former de mots de 7 lettres distinctes commençant par une voyelle et finissant par une consonne ?
    Même question si les mots ne doivent pas être formés de lettres distinctes.
16. De combien de manières peut-on répartir 28 dominos entre 4 joueurs?
17. Combien de mots de 4 lettres peut-on former avec les lettres du mot bernard ?
18. On forme des nombres composés de 5 chiffres significatifs différents, 2 et 7 doivent figurer parmi les 5 chiffres. Combien de nombres peut-on former ?
19. Sur un damier de 16 cases disposées en 4 lignes et 4 colonnes, on dispose 5 jetons identiques à raison de 1 jeton par case. Quel est le nombres de dispositions différentes si
    a) on n' impose aucune condition ?
    b) un ligne entière doit être remplie ?
    c) il doit y avoir une seule ligne et une seule colonne contenant deux jetons, les autres lignes et colonnes ne contenant qu' un jeton ?
    Si on admet qu' une case peut contenir plusieurs jetons quel est le nombre de positions différentes de ces jetons dans lesquelles deux cases contiennent a) exactement 2 jetons ?
    b) au moins deux jetons ?
20. Dans un jeu de pronostics de football comprenant 13 matches combien de colonnes peut-on remplir avec les symboles 1, 2 ou x?
21. Dans le jeu particulièrement intéressant (!?) " tapis vert ", quelle est la probabilité de gagner ?
22. Avec les nombres de 15 à 32, combien de produits de 2 facteurs peut-on former ?

23. Combien de lettres peut-on former en morse avec successivement 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 signes . ou - ? En conclure la nécessité d' utiliser 4 signes pour représenter toutes les lettres de l' alphabet.

24. Les 120 permutations du mot ahsme sont disposées par ordre alphabétique comme si chacune d' elles était un mot ordinaire de 5 lettres. La dernière lettre du 86ème mot dans cette liste est-il a, h, s, m ou e ?

25. Quel est le nombre de diagonales d' un polygone convexe à n côtes ?

26. Une serrure de sûreté à 10 boutons peut être ouverte en poussant dans un ordre quelconque les 5 boutons corrects. Supposons que le modèle de cette serrure soit changé par le fabricant de telle manière que des ensembles comprenant un maximum de 9 boutons ou un minimum d' un seul bouton puissent servir de combinaisons. Combien de combinaisons supplémentaires seraient créées de cette façon ?

27. Dans une bibliothèque se trouvent 10 livres en langue étrangère : 5 en anglais, 3 en allemand et 2 en espagnol.
Un lecteur polyglotte choisit 5 livres . Quel est le nombre de choix possibles si
a) il prend les livres au hasard ?
b) il prend un livre au moins dans chacune des trois langues ?
c) il prend 3 livres dans une langue et 2 dans une autre ?
d) il prend un seul livre en anglais ?
e) il prend au moins un livre en anglais ?

28. Combien de mots différents de 12 lettres peut-on former avec les lettres du mot mathématique ?
Parmi ceux-ci, combien contiennent le groupement thé, dans cet ordre ?

29. Un groupe de 100 judokas compte 40 ceintures vertes dont la personne A et 60 ceintures noires dont la personne B.
De combien de manières peut-on choisir deux combattants parmi les 100 judokas
a) sans condition ?
b) si les combats se font entre adversaires de même force (même ceinture) ?
c) si A ~~doit~~ ne peut rencontrer que B ?