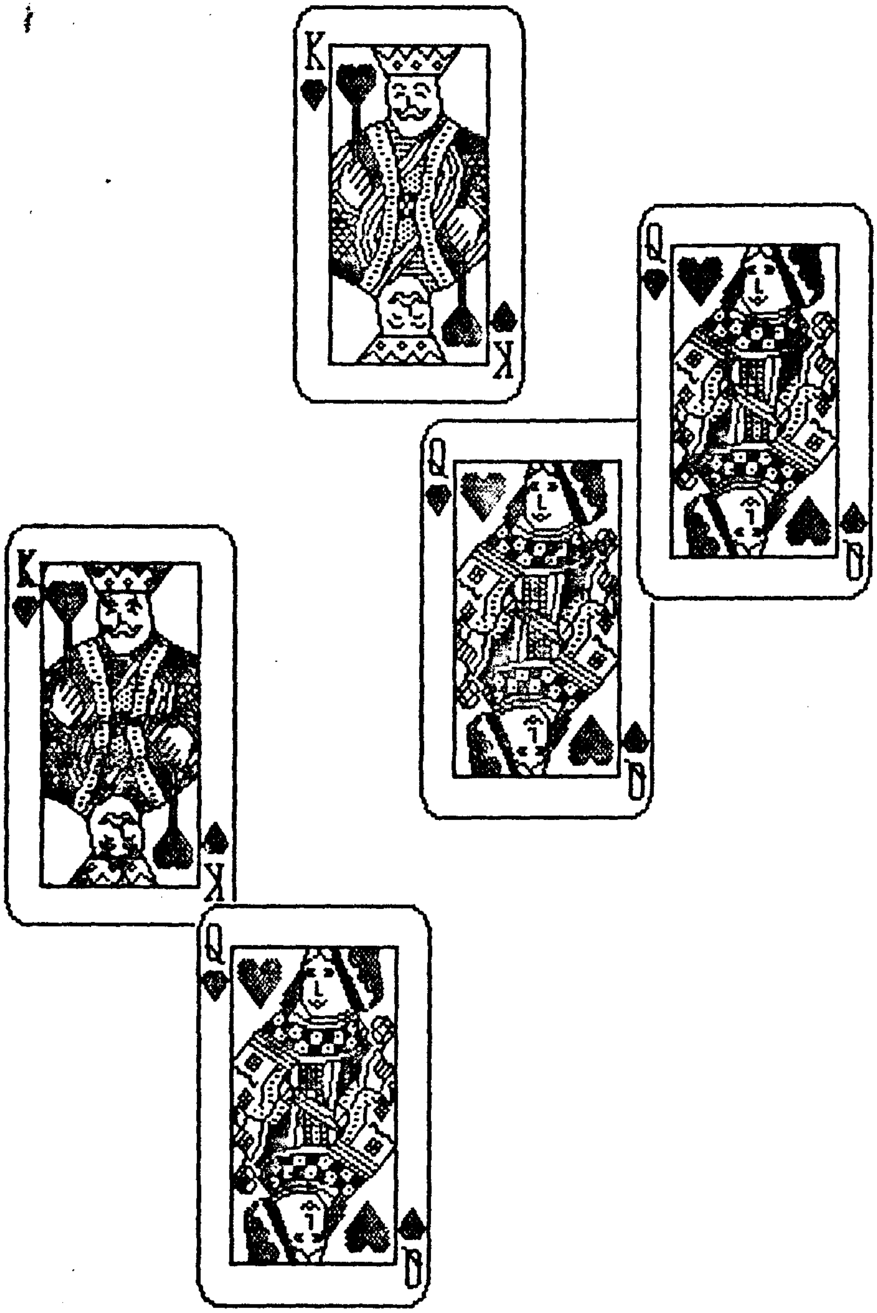
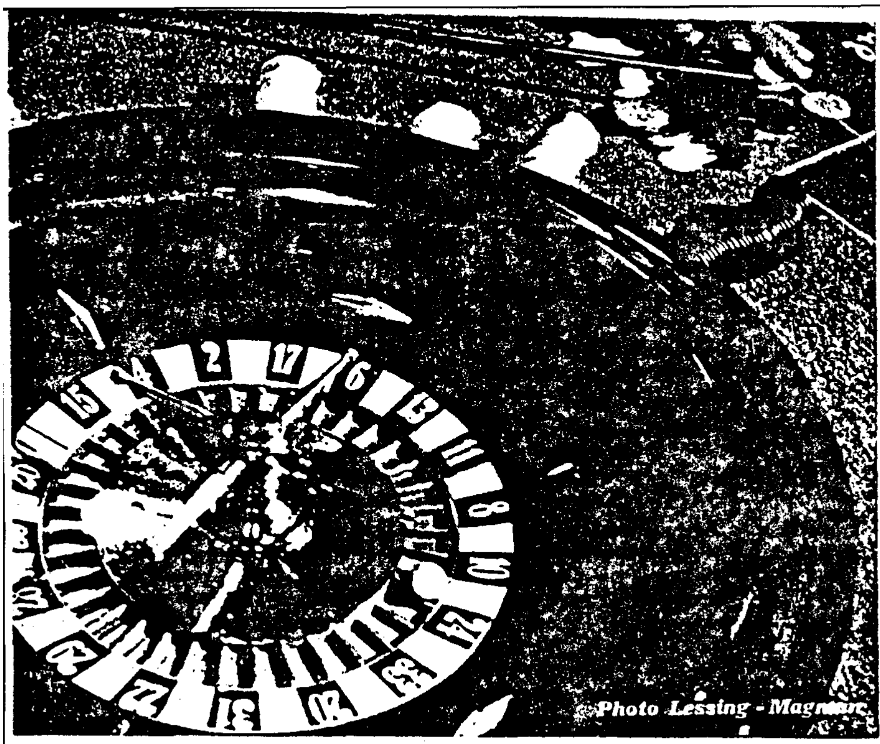


Chapitre II - 2

PROBABILITES



Concept pureme

le hasar
ne peu

La prouesse du mathématicien Shanks, passant trente années de sa vie à calculer les 707 premières décimales du nombre pi, est devenue aujourd'hui un point de comparaison classique pour évaluer comparativement la « puissance » des machines électroniques à traiter l'information. L'E.N.I.A.C. avait, en effet, reproduit en 25 minutes le calcul du mathématicien, en nous apprenant que seules les 520 premières décimales fournies par Shanks étaient exactes. En 1958, nous nous étions personnellement amusés à faire refaire par une I.B.M.-704 le calcul de 707 décimales de pi : chronomètre en mains, nous avions constaté que 43 secondes seulement étaient nécessaires pour obtenir l'impression du résultat. Et, sans doute, avec une machine conçue pour des opérations ultra-rapides du type Stretch, le calcul serait aujourd'hui terminé en moins d'une seconde.

Mais le problème présente un autre aspect. Bien que la difficulté du calcul croisse pratiquement comme le carré du nombre de décimales désirées, les machines ont été mises à contribution pour fournir ces décimales en quantités toujours plus grandes. Un fascicule publié par M. François Génuys, chef des Études scientifiques nouvelles à I.B.M. France, nous livre, par exemple, le résultat d'une longue séquence d'opérations apportant les 10 000 premières décimales de pi, et, depuis, ce record a été dépassé : un ordinateur 7090 est arrivé à 100 000 décimales.

On peut s'en étonner : à quoi bon de tels calculs ? En pratique, astronomes ou physiciens n'ont, en effet, jamais besoin de faire intervenir le nombre pi avec plus de 10 ou 12 décimales. La recherche de milliers de décimales ne serait-elle donc qu'un jeu de mathématicien ? Elle est bien davantage, et débouche sur des considérations pratiques du plus haut intérêt.

Il y a déjà longtemps qu'on avait été intrigué par une déconcertante rareté du chiffre 7 dans les décimales admises : il n'apparaît que 26 fois dans les 400 premières décimales. Ne devait-on pas s'attendre à le voir prendre une revanche par la suite ?

En effet, lorsque les calculs eurent été poussés plus loin, les mathématiciens furent rassurés : sous réserve de prendre en considération un nombre suffisamment grand de décimales, on constate que tout rentre dans l'ordre : le 7 apparaît 19 fois entre la 550^e et la 650^e décimale, c'est-à-dire que, dans les décimales de pi, les chiffres sont bien, comme on le prévoyait, répartis dans l'ensemble selon un pur hasard.

Mieux : si le calcul de 10 000 ou 20 000 décimales de pi présente aujourd'hui une réelle utilité pratique, c'est que la séquence des chiffres s'avère idéale pour fabriquer des « tables de hasard ».

Car les physiciens ont fait cette constatation étonnante : rien n'est aussi difficile à créer que le véritable hasard...

LA MATHÉMATIQUE CONTRE LES MARTINGALES

A première vue, les exemples sont nombreux où le calcul des probabilités paraît s'appliquer de façon remarquable, encore que les lois de ce calcul ne soient généralement connues des non-spécialistes que d'une façon extrêmement confuse.

Une image classique du hasard est ainsi le classique jeu de pile ou face. La pièce étant supposée parfaitement équilibrée, les « probabilités » respectives de pile et de face sont de 1/2. Ceci ne veut nullement dire que pile doit sortir si c'est face qui vient d'être enregistré, mais seulement que, si l'on joue des parties en nombre croissant, le rapport entre le nombre total des *pile* et celui des *face* tendra vers l'unité. Mais cette probabilité de 1/2 ne s'oppose pas à des séries de *pile* qui, en fait, sont même obligatoires.

Un calcul simple nous instruit sur les chances que l'on a d'assister à de plus ou moins longues séries de *pile* ou de *face*. Par exemple, si l'on considère un couple de coups, les combinaisons possibles sont les suivantes : pile-pile, pile-face, face-pile et face-face. Dès l'instant où les combinaisons sont au nombre de 4 et où une seule peut amener pile-pile, on conclut immédiatement que l'on a une chance sur 4 d'assister à une série de 2 *pile*. De même, les chances de voir une série de 3, 4 ou *n pile* seront respectivement 1/8, 1/16, $1/2^n$.

Notons au passage que pour $n = 10$, il vient $2^n = 1\,024$, c'est-à-dire qu'il y a approximativement une chance sur mille de voir pile sortir dix fois consécutives. Cette probabilité n'est nullement négligeable. On peut l'envisager pour les cas concrets de la boule ou de la roulette, où l'on mise sur des rouges et des noirs, des pairs et des impairs, des « passe » et des « manque ». Notons cependant que le jeu est rendu non-équitable par la présence d'un numéro « neutre », qui est le 5 pour la boule et le 0 à la roulette.

Envisageons maintenant une série où l'on mise, par exemple, « rouge » pendant dix parties consécutives : la probabilité de perdre pendant ces dix coups devient nettement supérieure à un pour mille, et cela pour *une* série. On comprendra ce que cela peut signifier au cours d'une soirée entière, où un joueur peut facilement voir défiler devant lui de longues suites de séries de 10 coups ; l'éventualité de dix coups sans rouge ou sans noir deviendra finalement une éventualité normale !

Avis aux possesseurs de martingales qui croient pouvoir se rattraper en doublant toujours leur mise ! S'ils ont commencé par miser 1 NF, ils se trouvent astreints à envisager des mises de 1 000, 2 000 ou 4 000 NF et, à défaut d'une limitation nécessitée ıathématique,

›arfait n'existe pas et ›tre fabriqué

par l'état de leur portefeuille, ils se heurteront aux règlements qui interdisent d'effectuer des mises dépassant un certain plafond, les latitudes de mises étant en fait calculées de telle manière qu'on ne puisse pas tabler sur des coefficients supérieurs à 1 000 entre le minimum et le maximum autorisés...

DE L'IMPROBABILITÉ A L'IMPOSSIBILITÉ

Les lois du hasard pour le jeu de pile ou face (ou bien les rouges et les noirs de la roulette si l'on fait abstraction du zéro) sont en général mal connues du public. En ce qui concerne les « numéros », on remarque couramment des erreurs de raisonnement effarantes.

A la roulette on sait qu'il existe 37 numéros. A chaque coup, un numéro donné a, bien entendu, 1 chance sur 37 de sortir. Il n'y a là qu'évidence. Et pourtant...

Il est intéressant, en guise de test, de poser à des joueurs la question suivante. Imaginons qu'un même numéro soit systématiquement rejoué à chaque coup. Supposons, par exemple, que ce soit le 13, et admettons que, 37 fois de suite, nous misions sur lui. Quelle sera la probabilité de gagner pendant ce temps ? Nous voulons dire quelle chance aura eue le numéro 13 de sortir au moins une fois ?

Or, il ne sera pas exceptionnel de s'entendre répondre que, dès l'instant où 37 numéros sont en présence, si l'on joue 37 fois, chaque numéro « doit » sortir une fois, autrement dit qu'au bout d'une séquence de 37 coups, on sera « moralement certain » d'avoir vu le 13 apparaître.

L'erreur de ce raisonnement saute aux yeux : l'expérience est là pour apprendre, aux dépens des joueurs, qu'un numéro peut fort bien rester non seulement 37, mais 50, 100 ou 150 coups sans sortir. Or, comment se calculent les probabilités ?

Si l'on ne joue qu'un seul coup, la discussion est immédiate : le numéro 13 a une chance sur 37 de sortir; il a donc 36 chances sur 37 de ne pas sortir. Cette « probabilité de non-apparition » de 13 est ainsi 36/37 ou 0,973; cela revient à dire que cette non-apparition a 97,3 chances sur 100 de se produire. La probabilité de l'événement contraire, de l'événement favorable pour le joueur est de 2,7 chances sur 100 (1/37 = 0,027).

Envisageons maintenant une suite de deux coups : la probabilité de voir le 13 ne sortir aucune de ces deux fois sera évidemment de 0,973 × 0,973, soit 0,946. On en conclura que la non-sortie du 13 a 94,6 chances sur 100 de se produire, c'est-à-dire qu'en deux coups, le 13 a seulement 5,4 chances sur 100 de sortir.

En trois coups, la probabilité de ne pas voir le 13 sera de 0,973 × 0,973 × 0,973 et, d'une manière générale, en *n* coups, elle sera de $(0,973)^n$. Ainsi, nous pouvons donner un diagnostic rigoureux pour notre série de 37 coups : au bout de ce temps, la probabilité que le 13 ne soit pas sorti sera de $(0,973)^{37}$, ce qui donne approximativement 0,363. Autrement dit, le numéro 13 a bel et bien 36,3 chances sur 100 de ne pas sortir au cours d'une série de 37 coups. Nettement plus du tiers des probabilités ! Au bout de 50 coups, cette probabilité est de 25,4 chances sur 100. Après 100 coups, elle sera encore de 4 chances sur 100. Elle ne commencera à être inférieure à 1 chance sur 100 qu'aux environs du 150ᵉ coup.

Inversement, on peut fort bien gagner plusieurs fois de suite. Là encore, le calcul est simple. La probabilité de sortie d'un numéro lors d'un seul coup était de 1/37 ou 0,027. Si l'on veut calculer la probabilité de voir un numéro *fixé à l'avance* (1) apparaître deux fois consécutives, il conviendra évidemment d'élever 0,027 au carré, ce qui donne approximativement 0,000 73. Autrement dit, la probabilité d'un gain double correspond seulement à 7,3 chances sur 10 000. Et celle d'un gain quadruple ne sera plus que d'une chance sur 2 millions.

Bien entendu, si l'on envisage des séries nettement plus longues, l'improbabilité se transforme bientôt en impossibilité.

LES LOIS DU MONDE SANS LOI

Il peut être intéressant d'approfondir ce dernier problème. Poursuivons notre exemple et imaginons un joueur qui, arrivant dans une salle de casino, joue le numéro 13. Il gagne : on ne lui prête nulle attention. Mais il laisse sa mise, et le 13 sort à nouveau. La salle d'admirer son joli coup. Et puis, ce coup se renouvelle encore : le public se rassemble alors littéralement autour de l'heureux gagnant, chacun donnant son avis sur le triplé obtenu avec un même numéro. Mais, déjà, le croupier relance la balle... et elle vient à nouveau sur le 13 où notre joueur a laissé sa mise ! Alors, l'enthousiasme commence à laisser place à la méfiance. Au cinquième coup, on alerte les chefs de service. Et, au sixième, on décide d'interrompre la partie. Pour tous les spécialistes, il y a irrégularité.

(1) *Cette restriction est capitale : si l'on considère un numéro venant de sortir il a évidemment 1 chance sur 37 de réapparaître au coup suivant.*

fectivement, si cela se produit, on devra admettre qu'il y a ıage. Le verdict du calcul est là : gagner six fois de suite à ıulette sur un numéro se situe au niveau d'une chance sur milliards ! Le grand mathématicien Émile Borel avait lonnent épilogué sur les niveaux de probabilités correspondant impossibilités. Il est impossible, avait-il pu affirmer, que des es, placés devant des claviers de machines à écrire et frappant ıasard, dactylographient des textes entiers de livres. Il est ossible, au même titre, qu'un numéro sorte plus de 4 ou 5 fois sécutives à la roulette. Selon Borel, un événement ayant une obabilité inférieure à 1 milliardième est « impossible » à l'échelle ıe vie humaine.

)e passionnants débats, notons-le au passage, pourraient interir à ce stade en matière de police judiciaire. Les milieux de la gistrature sont en général peu familiarisés avec le calcul des babilités et certains avocats excellent à présenter comme « coïnences » des événements dont la simultanéité a, en fait, une babilité pratiquement nulle.

l existe pourtant un domaine où le calcul des probabilités fait :e de loi : c'est celui des empreintes digitales. On admet — à :e titre — que, si deux empreintes révèlent 16 caractères comns, elles sont forcément celles d'un même individu : tel est le dict.

)r, on pourrait citer des procès où la défense évoqua des séries coïncidences très inférieures à celle de voir deux individus sséder les mêmes empreintes, et où les jurés acquittèrent le ;venu en lui laissant le bénéfice du doute.

Mais revenons à notre exemple précédent : un événement ayant e probabilité très faible doit être considéré comme « humaine:nt impossible ».

Pourquoi donc?... Pourquoi la roulette ne donnerait-elle pas à 20 fois le même numéro?...

Parce que, selon le mot célèbre d'un mathématicien, elle n'a ni ›nneur ni mémoire : rien ne l'oblige à désigner un numéro plutôt l'un autre, rien ne la contraint à jeter le veto sur un numéro rce qu'il vient de sortir.

L'INACCESSIBLE IDÉAL...

Non, rien assurément ne l'y contraint. Mais, précisément parce ıe son choix n'est fixé par aucune règle, on peut être sûr que roulette est totalement incapable de continuer à faire sortir, de çon régulière, le même numéro. On rejoint ainsi la mentalité ı mathématicien qui, considérant un certain nombre de coups, ra par définition qu'il y a hasard « si la loi de succession des sultats n'obéit à aucune loi », ou encore si la distribution des ponses est telle qu'aucun lien n'existe entre les résultats des ›ups : étant complètement indépendants, au sens profond du rme, ces coups ne tiennent pas plus compte des précédents pour ur ressembler que pour en différer.

Ces réflexions font ainsi prendre conscience de l'impossibilité ›ur un cerveau humain de « fabriquer » le hasard. Si l'on nous emande d'inventer les résultats d'une série de parties fictives de ıulette, nous tenterons d'aligner des séries de nombres : 7, 12, 3, 14, etc. Mais en fait, nous ne pourrons pas nous empêcher de :ter un regard sur ceux que nous venons d'écrire. Et même si ous les masquons, notre cerveau ne pourra les oublier entièreıent : nous répugnerons à écrire à nouveau un nombre que nous enons d'inventer. Nous chercherons à « équilibrer » notre série e manière à ce qu'elle ait l'air d'être le fruit du hasard. Or, cette :ntative d'aménagement est la négation même du hasard !

Si le hasard se manifeste dans les jeux de ce nom, il apparaît galement dans les erreurs dont sont entachées certaines mesures.)ans les sciences physiques, en astronomie notamment, une techique classique consiste à effectuer une longue série d'observaons et à en prendre ensuite la moyenne.

Imaginons que cette moyenne soit, par exemple, représentée ar le nombre 4 628. Imaginons que nous ayons affaire à un jeune stronome paresseux qui, pour s'épargner une monotone suite de ıesures, chercherait à inventer des mesures fictives. Il inscrira, ar exemple, 4 627, 4 631, 4 625, etc. Mais la supercherie serait ès vite découverte par un spécialiste qui, épluchant la « distriution » des écarts, ne trouverait pas les « indices de dispersion » 'une véritable série due au hasard.

Pour que la supercherie n'apparaisse pas, notre astronome débuınt devrait *calculer* des modèles de séries à partir de tables de hasard. Ce qui lui demanderait sans doute un travail beaucoup plus long que l'observation dont il prétendait se dispenser !

Tel est le sens profond du hasard. Il s'agit d'une « indépendance » de résultats successifs. Cette indépendance peut être d'autant mieux mise en évidence que l'on disposera d'une plus longue série de résultats permettant de conclure à une réelle absence de corrélation entre eux.

Schématiquement, le hasard parfait se rencontrerait dans une situation où aucun lien de parenté n'existerait entre les événements, alors que le « conditionnement » serait total dans l'hypothèse d'événements se commandant entièrement les uns les autres.

Mais le hasard parfait existe-t-il dans le monde physique? De même que deux individus quelconques à la surface de la Terre sont toujours plus ou moins cousins, ne doit-on pas considérer que l'hypothèse d'événements physiques totalement indépendants n'est qu'une fiction?

Assurément. Le hasard est, pour les mathématiciens, une représentation idéale. Il en va ainsi de la ligne droite des géomètres : aucune ligne dans la nature n'en est l'image rigoureuse.

Quel que soit le cas choisi, on découvrira l'existence de facteurs introduisant des termes perturbatifs. Ainsi, à propos du jeu de pile ou face, il est classique de remarquer que, devant être différenciés, les deux côtés d'une pièce de monnaie seront forcément dissymétriques. Et le lancement de la pièce obéit lui-même à une certaine loi. De même, les différentes cases d'une roulette ne sauraient être considérées comme rigoureusement identiques, et l'on ne peut affirmer que le lancement ne favorise aucune combinaison. Tous ces facteurs perturbatifs sont malheureusement fort difficiles à chiffrer.

DES MACHINES A FAIRE LE HASARD ?

Mais, depuis quinze ans, les techniciens construisent des machines à fabriquer le hasard. De telles machines sont souvent nécessaires pour créer des « bruits » ou simuler des phénomènes

Comment fonctionne une cellule de hasard

On réalise facilement le pile ou face électronique au moyen des « cellules binaires », ces dispositifs à bascule qui, voici dix ans, eurent les honneurs de l'actualité lors du premier âge des calculatrices électroniques à usage industriel ou scientifique.

Rappelons brièvement leur principe. Par définition un dispositif à bascule, encore appelé « flip-flop », comporte deux organes (les tubes de naguère sont aujourd'hui systématiquement remplacés par des transistors) qui se bloquent et se débloquent alternativement, à l'instar de nos va-et-vient électriques. Une telle cellule comporte ainsi une entrée E et deux sorties S_1 et S_2. L'envoi d'une première impulsion en E assure son transfert par S_1, mais, en même temps, cette opération provoque un changement d'état de la cellule : S_1 est bloqué, de sorte que l'impulsion suivante sortira par S_2. Et ainsi de suite.

En calcul électronique, l'organe ainsi constitué joue le rôle de démultiplicateur par 2. Or, il peut donner immédiatement naissance à une cellule de hasard. Il faut, pour cela, que les impulsions soient provoquées de façon aléatoire — l'activité d'un radioélément excitant un compteur de Geiger fournit en l'occurrence une solution aussi élégante que simple. D'autre part, la cellule doit être « interrogée » à intervalles réguliers sur son état du moment.

Dans le prototype qui a été réalisé pour la machine Calliope, cette interrogation était assurée par un courant alternatif de fréquence variable (0,2 à 5 hertz) appliqué sur la plaque d'un thyratron. C'est à ce rythme que le thyratron « relevait » l'état de la cellule : la sortie S_1 assurait l'arrivée sur sa grille d'une impulsion positive propre à provoquer la fermeture d'un relais dans le circuit plaque du thyratron, tandis que la grille restait négative si la sortie en service était S_2, auquel cas le relais demeurait ouvert.

aléatoires, dans des études de télétransmission ou dans des élaborations de modèles économiques. Le principe en est simple. Il s'agit le plus souvent de créer le « pile ou face électronique ». Nous avions nous-même, naguère, construit sous le nom de Calliope un modèle de cellule à cycle aléatoirement variable.

Toutes ces machines électroniques à fabriquer le hasard peuvent, cela va sans dire, être beaucoup plus parfaites que les divers modèles de jeux éternellement proposés aux théoriciens du calcul des probabilités. Il n'en demeure pas moins qu'aucune ne crée réellement le hasard parfait : les techniciens ont introduit la notion de « taux de parenté » entre les séquences de coups, pour mesurer l'écart avec ce que serait le vrai hasard. A l'heure actuelle, il est cependant courant d'obtenir des taux très inférieurs au centmilliardième. Ces taux suffisent largement pour toutes les applications pratiques...

Mais, du point de vue théorique, cette impossibilité de créer physiquement le hasard est très importante, car il s'agit bien d'une incapacité de fait, quelle que soit la solution envisagée.

Parfois on éprouve même les plus grandes difficultés à comprendre pourquoi, dans un processus matériel, le hasard n'est pas parfait.

L'exemple suivant nous avait été proposé. Imaginons que nous ayons pris place au bord d'une route et que nous regardions les numéros de voitures défilant devant nous. Nous notons « 1 » si le numéro principal est impair et « 0 » s'il est pair. Après un certain temps d'observation, nous obtiendrons une séquence de 1 et de 0 qui sera celle d'un jeu de pile ou face; on pourrait penser qu'il s'agit là d'un jeu « parfait ». Quelle relation pourrait-on imaginer, en effet, entre la parité du numéro d'une voiture et le fait que le véhicule passe devant l'endroit où nous nous trouvons?

Or, ce n'est toujours pas le hasard parfait ! Pour que notre série ait un sens, il faut qu'elle soit longue, « susceptible d'être prolongée indéfiniment ». C'est la condition première pour obtenir une série parfaitement aléatoire. Notre observation des numéros de voiture doit donc pouvoir être envisagée dans le cadre d'une très longue période de temps, durant des jours, des semaines, des mois. Or, dans ces conditions, nous verrons repasser les mêmes véhicules que leurs conducteurs ont l'habitude d'utiliser à heures fixes ou à jours fixes, pour leur travail ou leurs loisirs. Par conséquent, notre série de 1 et de 0 ne sera pas pure : elle sera polluée par des cycles de répétition propres aux lois d'utilisation des véhicules. Il y aura des liens de parenté dans la série !

A l'heure présente, le meilleur exemple physique de hasard que l'on puisse citer est encore le rayonnement cosmique. Cela se conçoit si l'on pense que les particules cosmiques frappant la Terre proviennent de l'ensemble de la galaxie, leur large origine dans l'espace se doublant d'une origine également très vaste dans le temps puisque, selon leur provenance, les particules frappant actuellement la Terre ont été émises à des époques très différentes. L'événement auquel nous donnons le nom de rayons cosmiques traduit donc les intersections les plus variées dans l'espace et dans le temps. Une discussion subtile est cependant nécessaire : il convient en fait d'écarter de ce rayonnement cosmique les émissions exceptionnelles traduisant les crises du Soleil. Mais cela étant, on peut admettre que le taux de parenté des événements est de l'ordre de 10^{-30}. C'est très peu; et pourtant ce n'est pas encore véritablement zéro.

LE HASARD DANS L'ALPHABET

D'une manière très générale, pour étudier les séquences réelles d'événements physiques, les physiciens sont ainsi amenés à superposer à la trame mathématique du hasard un mécanisme qui tienne compte de l'existence de certaines dépendances entre les événements.

Un type de dépendance particulièrement bien étudié est ainsi la fameuse « chaîne de Markov ». Le principe consiste à admettre que la probabilité d'un événement dépend de celui qui vient de survenir. Un exemple caractéristique pourrait être fourni par les cours de la Bourse : si l'on prend en considération non pas l'indice moyen des valeurs mais les variations de cet indice de part et d'autre de sa ligne moyenne d'évolution, on définira en effet à la Bourse des séances de baisse et des séances de hausse (en comptant pour nulles, pour simplifier, les séances « stationnaires »). Or, leur aspect est très différent de celui d'une série de pile ou face : nous découvrons d'étonnantes séries de hausse faisant suite a de non moins étonnantes séries de baisse. Tous les professionnels le savent : depuis longtemps, la baisse appelle la baisse, comme la hausse appelle la hausse.

Cela revient à dire que, moins encore que dans les jeux de hasard, on ne peut envisager de jouer à la Bourse selon le principe des « martingales ». (Par exemple, acheter des nombres croissants d'une action dont la baisse s'accentue, en considérant que, d'après les lois des probabilités, la baisse sera un jour suivie d'une hausse.) Un exemple est d'ailleurs célèbre. On rapporte qu'autrefois un mathématicien, ayant étudié les lois de la Bourse, avait affirmé sa foi dans la possibilité de gagner scientifiquement, sans information sur le sens des valeurs, simplement en prenant en considération des facteurs d'écarts et de probabilités. Il joua. Au bout de quelques mois, il était ruiné...

Les ingénieurs des télécommunications connaissent un exemple typique de chaîne de Markov avec la séquence des lettres du langage. Si nous remplaçons les lettres d'un texte par des nombres de 1 à 26 traduisant leur position dans l'alphabet, il va sans dire que nous n'obtiendrons pas la distribution d'une roulette qui aurait 26 cases : ainsi, dans le cas d'un texte français, le numéro 5 correspondant à la lettre *e*, reviendra très souvent. Mais, cela étant, ayant attribué à chaque lettre une fréquence, il serait théoriquement possible de construire une roulette affectant aux chiffres la même probabilité de sortie. Pourtant, en effectuant des tirages avec une telle roulette, nous n'obtiendrions pas encore une distribution correspondant aux lettres d'un texte. En français, un *d* est généralement suivi d'une voyelle; il ne sera en tout cas pas suivi d'un *n* ou d'un *m*, c'est-à-dire que la sortie d'une lettre en favorise ou en interdit une autre. Elle peut aller jusqu'à en imposer une autre : c'est ainsi que, dans notre langue, la lettre *q* est toujours suivie de *u*, au point que, depuis longtemps, les services télégraphiques ont fait l'économie de ce dernier signe. Ils se contentent de transmettre « q » pour « qu »...

LES TYPES DE PARENTÉ

Mais la chaîne de Markov ne correspond qu'à un type de parenté particulièrement simple entre les termes d'une série. Les mathématiciens s'emploient actuellement à jeter les bases d'études très générales — prenant essentiellement place dans les théories de l'information — qui, à partir de la « distribution gaussienne » du hasard, permettraient d'analyser de façon de plus en plus précise les phénomènes physiques. Ayant défini un taux de parenté, il s'agit — la question est capitale dès l'instant où ce taux atteint des valeurs importantes — de procéder à des classifications des types de parenté. Malheureusement, les symboles par lesquels ces classifications d'expriment sont à peu près intraduisibles dans les termes de notre langage courant. Disons seulement, pour en donner une idée, que ces parentés peuvent relever de trois grands principes. Il y a d'abord le principe de la séquence : c'est le principe de la chaîne de Markov. Il y a ensuite le principe de la concentration : un événement modifie globalement la probabilité d'autres événements. Sur la carte du ciel, par exemple, l'existence d'une galaxie entraîne une probabilité de galaxies dans la région avoisinante, du fait de l'existence d'amas galactiques. Il y a enfin le principe de la dispersion : une donnée définie est « modulée » par des facteurs extrêmement nombreux d'origine très diverse. On rencontre ce type de parenté lorsque l'on cherche à étudier l'activité cosmique dans une région particulière de l'espace.

Ainsi les études les plus poussées sur le hasard, tous les efforts qu'on a tentés pour découvrir, pour débusquer le hasard parfait, n'ont-ils abouti finalement qu'à l'analyse des innombrables facteurs qui le rendent impossible. Le hasard parfait n'existe physiquement pas et ne peut être créé avec aucun appareil.

Il n'a d'existence que mathématique et — nous rejoignons l'exemple évoqué au début de cet article — c'est dans les nombres seulement qu'on peut espérer le trouver. Le cas du nombre pi est caractéristique. Depuis longtemps, les mathématiciens savaient que pi est un nombre transcendant, ce qui voulait dire qu'il ne saurait être la racine d'aucune équation algébrique et que, en conséquence, aucune loi ne régit la succession des décimales, laquelle est évidemment illimitée. Or, ces critères sont précisément ceux-là mêmes qui permettent d'affirmer que l'on a affaire au hasard parfait ! Ainsi est-ce à un nombre comme pi qu'il faut s'adresser pour obtenir ce fameux hasard idéal, un tel nombre apparaissant ainsi, en quelque sorte, transcendant d'une nouvelle manière...

Albert DUCROCQ

PROBABILITES

A revoir : (cours de cinquième)

- Les définitions de la probabilité d' un événement.
- Les axiomes de la théorie des probabilités.
- La notion de probabilité conditionnelle.
- La notion d' événements indépendants.

Exercices :

1. Que pensez-vous des affirmations suivantes ?

   a) La probabilité d' avoir un oeuf cassé dans une caisse vaut 0,25 et la probabilité d' avoir au moins un oeuf cassé dans cette caisse vaut 0,17.

   b) La probabilité pour qu' il pleuve demain vaut 0,3 et la probabilité pour qu' il ne pleuve pas demain vaut 0,5

2. La probabilité d' atteindre un avion d' un coup de canon vaut 0,2. Quelle est la probabilité d' atteindre l' avion par le tir simultané de 5 ~~avions~~ canons ?

3. On pose à un étudiant 10 questions auxquelles il faut répondre par oui ou par non. Ne connaissant aucune des réponses, l' étudiant répond au hasard. Quelle est la probabilité pour qu' il ait

   a) 10 réponses correctes.

   b) au moins 5 réponses correctes

4. A la roulette il y a 37 possibilités de positions pour la bille.

   a) Quelle est la probabilité d' apparition du nombre 13.

   b) Quelle est la probabilité de non-apparition du nombre 13 durant 37 jeux ?

5. Partant du point p d' une plaine, un homme marche 100 m en ligne droite dans une direction choisie au hasard et arrive en un point q. Partant de q, il marche à nouveau 100 m en ligne droite dans une direction aléatoire et arrive en un point r. Quelle est la probabilité pour que la distance $|pr|$ soit supérieure à 100 m ?

6. Pour une certaine maladie, on met au point un traitement qui conduit à la guérison dans 80 % des cas. Six malades sont soumis à ce traitement. Quelle est la probabilité pour que

   a) tous guérissent ?

   b) aucun ne guérisse ?

   c) exactement 4 malades guérissent ?

7. Une urne contient 3 boules blanches, deux boules rouges et n boules vertes ($n \geq 2$).

   a) Si $n = 5$, quelle est la probabilité pour qu' en extrayant simultanément deux boules de l' urne celles-ci soient de couleurs différentes ?

   b) Si $n = 5$, quelle est la probabilité pour qu' en extrayant simultanément 4 boules de l' urne on obtienne une boule blanche, une boule verte et deux boules rouges ?

   c) Quelle valeur minimale doit-on donner à n pour qu' en extrayant simultanément deux boules de l' urne, la probabilité d' obtenir deux boules de même couleur soit supérieure à $\frac{1}{3}$?

8. Combien de dés doit-on jeter pour que la probabilité d' obtenir au moins un 6 soit supérieure à $\frac{1}{2}$?

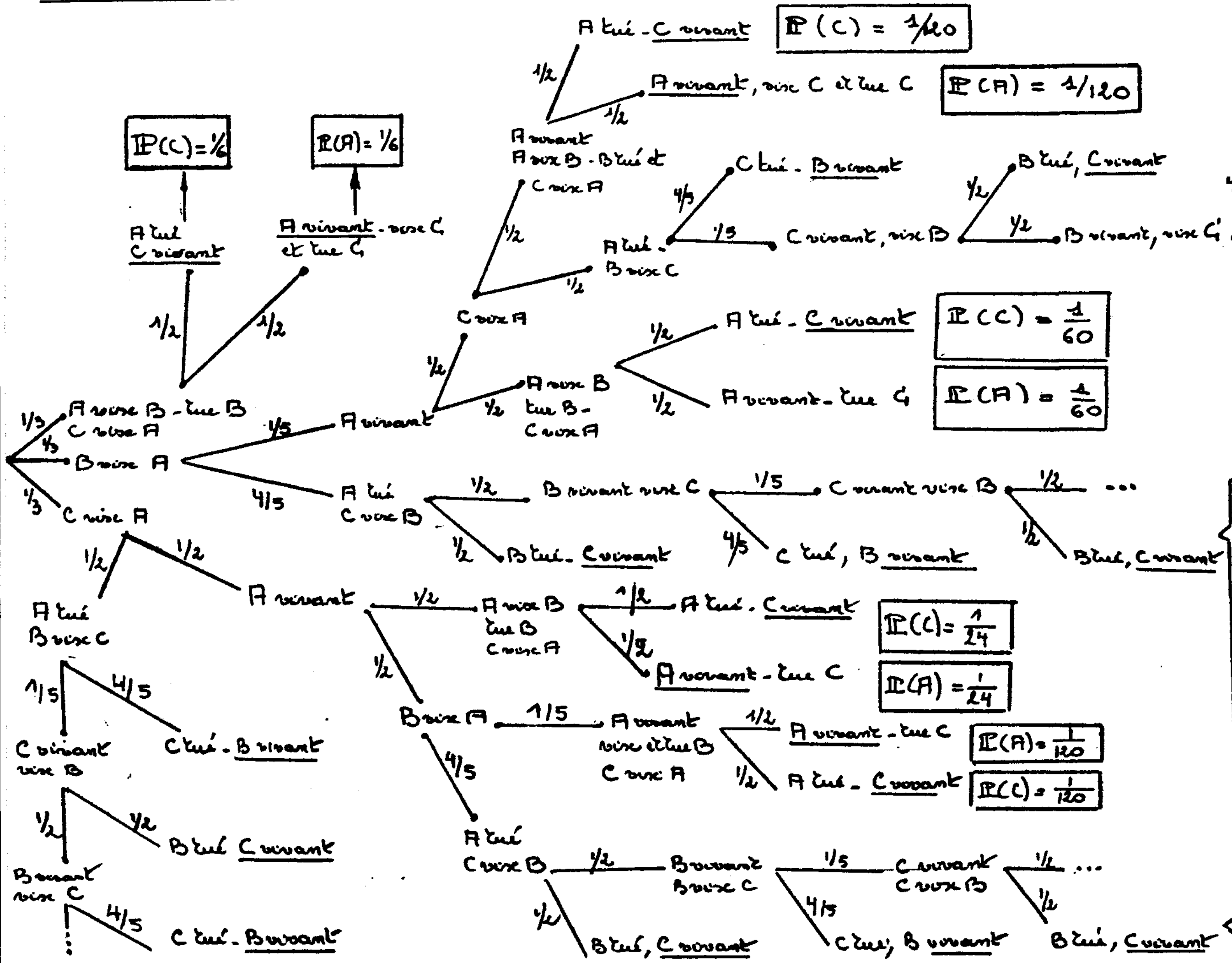
9. Six nombres distincts sont tirés au hasard parmi les nombres { 1, 2, 3, ... , 10 }. Quelle est la probabilité pour que le tirage comprenne le nombre 3 et un seul nombre inférieur à 3 ?

10. "Un sinistre crétin" : (concours IBM)

    Il estime démesurément sa fausse habilité, ses réflexes et sa chance, aussi est-il très mauvais automobiliste. Ses exploits : dépasser par la droite en fin de côte, en virage avec une visibilité insuffisante et sans réserve de puissance. Lorsqu' on lui signale les risques, sa réponse est " ma chance d' accident n' est que d' un sur cent par dépassement ". Comme il effectue systématiquement sa manoeuvre, en supposant correcte son évaluation de " chance d' accident ", à partir de combien de dépassements possède-t-il plus de nonante-neuf chances sur cent d' avoir un accident ?

11. Trois tireurs d' habilité variable appelés A, B et C s' affrontent individuellement. Chaque tireur est placé au sommet d' un triangle équilatéral. Ils tirent au sort l' ordre du tir. Ensuite chacun tire à son tour jusqu' à ce qu' il ne reste pas de survivant. Chaque tireur tire où il veut, sur l'un, sur l' autre, en l' air, sur lui-même, donc où il veut. Mais, nous l' avons dit, ils sont d' habilités différentes . A a 100 % de réussites, B a 80 % de réussites et C seulement 50 % de réussites. Le problème est de trouver le tireur qui a la meilleure chance de survivre en supposant que chacun adopte sa meilleure stratégie.

Chacun tire sur l'adversaire le plus habile



$$\boxed{\mathbb{P}(C)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} + \cdots = \frac{1}{600}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots\right) = \frac{1}{600}\cdot\frac{10}{9} = \boxed{\frac{1}{540}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} + \cdots = \frac{1}{75}\left(1+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\cdots\right) = \frac{1}{75}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \boxed{\frac{2}{135}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(C)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} + \cdots = \frac{2}{15}\cdot\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots\right) = \boxed{\frac{4}{27}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} + \cdots = \frac{8}{75}\left(1+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\cdots\right) = \boxed{\frac{16}{135}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(C)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} + \cdots = \frac{1}{30}\cdot\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots\right) = \boxed{\frac{1}{27}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} + \cdots = \frac{2}{75}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots\right) = \boxed{\frac{4}{135}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} + \cdots = \frac{2}{15}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots\right) = \boxed{\frac{4}{27}}$$

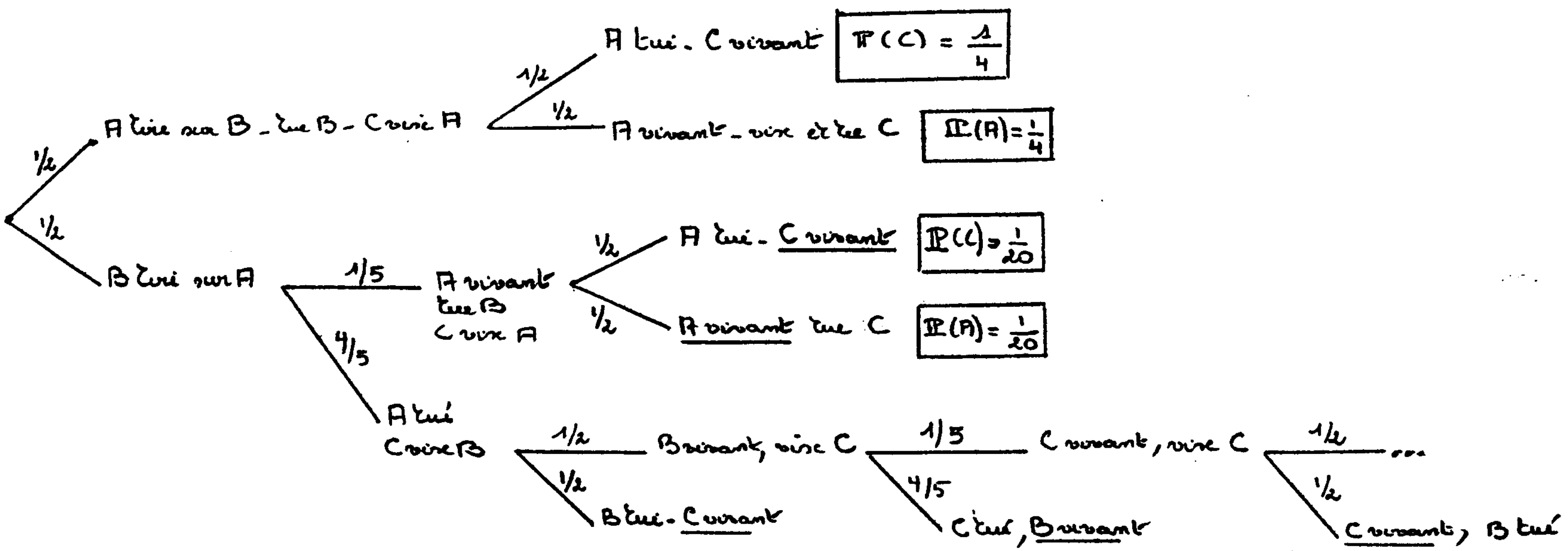
$$\boxed{\mathbb{P}(C)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} + \cdots = \frac{1}{60}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots\right) = \boxed{\frac{1}{54}}$$

$$\mathbb{P}(\text{survie de } A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{120} + \frac{1}{60} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = \frac{29}{120} \simeq 0.24$$

$$\mathbb{P}(\text{survie de } B) = \frac{2}{135} + \frac{16}{135} + \frac{4}{135} + \frac{4}{27} = \frac{14}{45} \simeq 0.31$$

$$\mathbb{P}(\text{survie de } C) = \frac{1}{6} + \frac{1}{120} + \frac{1}{540} + \frac{1}{60} + \frac{4}{27} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{27} + \frac{1}{54} = \frac{161}{360} \simeq 0.45$$

! C décide de <u>tirer en l'air</u> s'il doit tirer le premier coup de feu. Puis, chacun tire sur l'adversaire le plus habile.



$$\boxed{\mathbb{P}(C)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\,\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{4}{5}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{5}\,\frac{1}{2} + \cdots$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots\right) = \frac{1}{5}\cdot\frac{10}{9} = \boxed{\frac{2}{9}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B)} = \frac{1}{2}\,\frac{4}{5}\,\frac{1}{2}\,\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\,\frac{4}{5}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{5}\,\frac{1}{2}\,\frac{4}{5} + \cdots$$

$$= \frac{4}{25}\cdot\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots\right) = \frac{4}{25}\cdot\frac{10}{9} = \boxed{\frac{8}{45}}$$

$$\mathbb{P}(\text{survie de } A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{3}{10} = 0,3$$

$$\mathbb{P}(\text{survie de } B) = \frac{8}{45} \simeq 0.18$$

$$\mathbb{P}(\text{survie de } C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{2}{9} = \frac{47}{90} \simeq 0.52$$

12. Une boîte contient 11 boules numérotées 1, 2, 3, ..., 11. Si on tire simultanément 6 boules au hasard, quelle est la probabilité que la somme des numéros des boules tirées soit impaire ?

13. Chacun de nous hérite 23 chromosomes de son père et autant de chromosomes homologues de sa mère. Quelle est la probabilité de recevoir

a) Le chromosome Y de son père ?

b) Tous les chromosomes de son père ?

c) 12 chromosomes de son père et 11 chromosomes de sa mère ?

14. A est albinos, ses parents sont normaux, son frère B est normal. Quelle est la probabilité pour que B soit hétérozygote ?
(L' albinisme est un caractère récessif)

15. A et B jouent à pile ou face avec une pièce non pipée.($\mathbb{P}$(face) = $\mathbb{P}$(pile) = 0.5). A et B lancent alternativement la pièce. A commence. Le gagnant est celui qui fait face le premier. Quelle est probabilité pour chacun de gagner ?
Si les joueurs jouent pour de l' argent de combien doit être la mise de chacun pour que le jeu soit équilibré ?

VARIABLE ALEATOIRE DISCRETE

<u>Définition</u> :

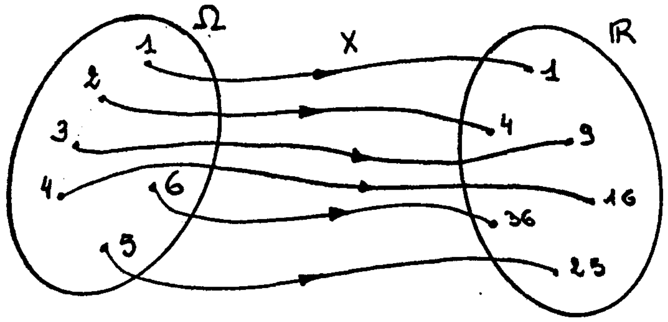
Une variable aléatoire liée à une épreuve est une application de la catégorie d' épreuves dans $\mathbb{R}$.

Exemples :

- Epreuve : jet d' un dé

  Catégorie d' épreuves : { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

  Variable aléatoire : application X envoyant le nombre qui apparaît sur le dé, sur le carré de ce nombre.

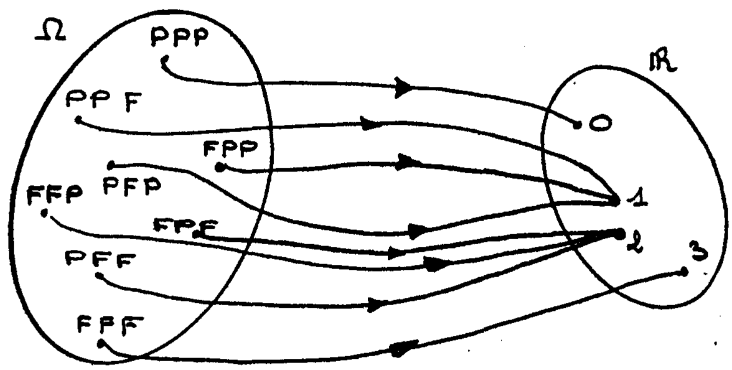


$X(1) = 1$
$X(2) = 4$
$X(3) = 9$
$X(4) = 16$
$X(5) = 25$
$X(6) = 36$

- Epreuve : jet de 3 pièces de monnaie discernables ayant un côté pile (P) et un côté face (F).

  Catégorie d' épreuves : { PPP, PPF, PFP, FPP, FFP, FPF, PFF, FFF }

  Variable aléatoire : application X envoyant chaque élément de la catégorie d' épreuves sur le "nombre de faces"



Une variable aléatoire est dite **discrète** si l' ensemble des valeurs prises par cette variable est un ensemble fini ou une ~~une~~ infinité dénombrable. Nous ne travaillerons qu' avec ce type de variables.

Une variable aléatoire est dite **continue** si l' ensemble des valeurs prises par cette variable est un intervalle de $\mathbb{R}$.

DISTRIBUTION DE PROBABILITES

Définir une distribution de probabilités sur la catégorie d' épreuves d' une expérience revient à attribuer à chaque valeur de la variable aléatoire liée à cette catégorie d' épreuves une probabilité (en respectant les axiomes de la théorie des probabilités).

Soit X une variable aléatoire liée à une catégorie d' épreuves et $\{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$ l' ensemble des valeurs prises par X. On note

$$\mathbb{P}(X = x_k) = p_k \qquad \text{où } k \in \{ 1, 2, \ldots, n \}$$

L' ensemble des couples (x_k, p_k) s' appelle la distribution de probabilité de la variable aléatoire X.

Exemples :

1. Expérience : Jet de 3 pièces de monnaie indiscernables.
   Variable aléatoire : Nombre de "faces" obtenues.
   Distribution des probabilités :

x_k	0	1	2	3
p_k	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

   Vérification : $\sum_{i=1}^{4} p_i = 1$

2. Expérience : Un sac contient 8 boules indiscernables au toucher, numérotées 1, 1, 1 , 1, 2, 2, 3, 4. On tire simultanément 3 boules du sac.
   Variable aléatoire : A chaque tirage, on fait correspondre la somme des nombres figurant sur les boules tirées.
   Distribution des probabilités :

x_k	3	4	5	6	7	8	9
p_k	$\frac{4}{56}$	$\frac{12}{56}$	$\frac{10}{56}$	$\frac{14}{56}$	$\frac{9}{56}$	$\frac{5}{56}$	$\frac{2}{56}$

   Vérification : $\sum_{i=1}^{7} p_i = 1$

FONTION DE REPARTITION D' UNE VARIABLE ALEATOIRE DISCRETE

Si X_1, X_2, ..., X_n sont les valeurs prises par la variable aléatoire X classées de telle manière à ce que $X_1 < X_2 < \dots < X_n$, l' ensemble des couples

$$(t, \mathbb{P}(X \le t)) \quad \text{où} \quad t \in \mathbb{R}$$

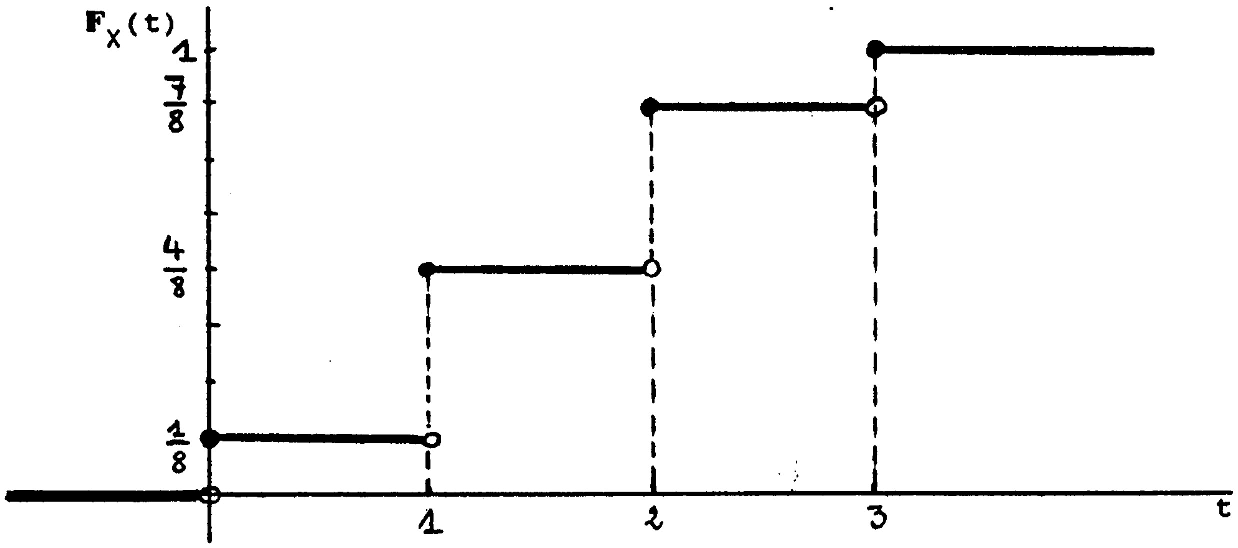
est appelé la fonction de répartition de la variable aléatoire X et se note $\mathbb{F}_X(t)$.

$$\mathbb{F}_X(t) = \mathbb{P}(X \le t) \begin{cases} = 0 & \text{si } t < X_1 \\ = p_1 & \text{si } X_1 \le t < X_2 \\ = p_1 + p_2 & \text{si } X_2 \le t < X_3 \\ = p_1 + p_2 + p_3 & \text{si } X_3 \le t < X_4 \\ \dots & \\ = p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} & \text{si } X_{n-1} \le t < X_n \\ = 1 & \text{si } t \ge X_n \end{cases}$$

<u>Exemple</u> :

Expérience : Jet de 3 pièces de monnaie indiscernables.

Variable aléatoire : Nombre de "faces" obtenues.



Remarquons que $\mathbb{P}(a < X \le b) = \mathbb{F}_X(b) - \mathbb{F}_X(a)$

ESPERANCE MATHEMATIQUE D' UNE VARIABLE ALEATOIRE DISCRETE

$$\boxed{\overline{X} = \mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k . p_k}$$

(Moyenne " probable ")

Exemple :

Parmi les douze clés d' un trousseau, il en existe quatre qui peuvent ouvrir une porte. Un enfant, ne faisant aucune distinction entre les clés choisit au hasard trois clés du trousseau pour ouvrir la porte.

On considère la variable aléatoire X égale au nombre de clés ouvrant la porte parmi les clés choisies. Quelle est la loi de distribution de probabilités de X et son espérance mathématique ?

x_k	0	1	2	3
p_k	$\frac{8}{12}.\frac{7}{11}.\frac{6}{10} = \frac{14}{55}$	$\frac{4}{12}.\frac{8}{11}.\frac{7}{10}.3 = \frac{28}{55}$	$\frac{4}{12}.\frac{3}{11}.\frac{8}{10}.3 = \frac{12}{55}$	$\frac{4}{12}.\frac{3}{11}.\frac{2}{10} = \frac{1}{55}$

$$\mathbb{E}\,(X) = 0.\frac{14}{55} + 1.\frac{28}{55} + 2.\frac{12}{55} + 3.\frac{1}{55} = 1$$

VARIANCE ET ECART-TYPE D' UNE VARIABLE ALEATOIRE DISCRETE

Variance :

$$\boxed{\sigma^2(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k . (x_k - \overline{x})^2}$$

ou $\sigma^2(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k . (x_k - \overline{x})^2 = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k^{\ 2} - 2\overline{x}.\sum_{k=1}^{n} p_k x_k + \overline{x}^2.\sum_{k=1}^{n} p_k$

$$= \sum_{k=1}^{n} p_k x_k^{\ 2} - 2\overline{x}.\overline{x} + \overline{x}^2$$

$$\boxed{\sigma^2(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k . x_k^{\ 2} - \overline{x}^2}$$

Ecart-type : $\sigma(X)$

Exemple :

Neuf chevaux pénètrent en colonne, un par un, sur la piste d' un cirque. Sur ces neuf chevaux, cinq sont noirs et quatre sont blancs. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de chevaux blancs précédant le premier cheval noir. Que vaut l' espérance mathématique et la variance de X

x_k	0	1	2	3	4
p_k	$\frac{5}{9} = \frac{70}{126}$	$\frac{4}{9}.\frac{5}{8} = \frac{35}{126}$	$\frac{4}{9}.\frac{3}{8}.\frac{5}{7} = \frac{15}{126}$	$\frac{4}{9}.\frac{3}{8}.\frac{2}{7}.\frac{5}{6} = \frac{5}{126}$	$\frac{4}{9}.\frac{3}{8}.\frac{2}{7}.\frac{1}{6} = \frac{1}{126}$

$$E(X) = \frac{1}{126}.(\ 0.70 + 1.35 + 2.15 + 3.5 + 4.1) = \frac{2}{3}$$

$$\sigma^2(X) = \frac{1}{126}.(\ 0^2.70 + 1^2.35 + 2^2.15 + 3^2.5 + 4^2.1) - \frac{4}{9} = \frac{50}{63}$$

Exercices :

1. Une urne contient 2 jetons rouges, 3 jetons bleus et 1 jeton vert. Chaque jeton rouge porte le numéro 1, chaque jeton bleu porte le numéro 2 et le jeton vert porte le numéro 0.
   Un joueur tire simultanément 2 jetons de l' urne. On suppose tous les tirages équiprobables.
   a) Quelle est la probabilité d' obtenir deux jetons de couleurs différentes ?
   b) Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeurs la somme des nombres inscrits sur les deux jetons tirés. Quelle est la loi de probabilité de X et son espérance mathématique ?

2. On jette un dé et ce jusqu'à ce qu' on obtienne un 6. Soit X le nombre de jets nécessaires. Trouver la distribution de probabilité de X et vérifier que $\sum_k p_k = 1$.

3. Deux joueurs A et B écrivent simultanément un nombre choisi dans l' ensemble { 1, 2, 3 } et ce à l' insu l' un de l' autre.
   Soit x le nombre choisi par A et y le nombre choisi par B.
   Si x + y est pair, A reçoit p francs de B.
   Si x + y est impair, B reçoit q francs de A.

a) Soit X le gain algébrique de A à l' issue d' une partie. Calculer $\mathbb{E}(X)$ sachant que A et B choisissent 1, 2 ou 3 avec équiprobabilité.

b) Déterminer les couples d' entiers p et q pour que le jeu soit équitable.

c) Si $p = 4$ et $q = 5$ et que les joueurs jouent 3 parties successives, déterminer la probabilité pour que le gain de A soit positif à l' issue de ces 3 parties.

4. On lance deux dés discernables à 6 faces numérotées de 1 à 6 et on convient :
   - d' ajouter les points obtenus s' ils sont tous les deux pairs.
   - de former la valeur absolue de la différence des points si l' un est pair et l' autre impair.
   - de faire le produit des points obtenus s' ils sont tous les deux impairs.

   On appelle X la variable aléatoire formée de cette manière. Quelle est la distribution de probabilités de cette variable ?
   Que vaut son espérance mathématique et son écart-type ?

5. On jette un dé bien équilibré. X est la variable aléatoire représentant le double du nombre obtenu et Y la variable prenant les valeurs 1 ou 3 suivant que l' on obtienne un nombre pair ou impair. Quelles sont les valeurs prises par la variable $X + Y$. Quelle est la distribution de probabilités de cette variable ?

6. On jette une paire de dés. X est la variable aléatoire représentant le minimum des deux nombres obtenus. Quelle est la distribution de probabilités de cette variable ? Que vaut son espérance mathématique et son écart-type ?

DISTRIBUTION BINOMIALE B(n,p)

LOI, DISTRIBUTION DE PROBABILITES

On considère une expérience dont la catégorie d' épreuves a deux éléments : $\Omega = \{ S = \text{"succès "} , E = \text{" échec "} \}$.

Exemples : Jeu de pile ou face, acceptation ou refus d' une pièce usinée, admission ou refus à un examen ...

On appelle p la probabilité d' obtenir S et q la probabilité d' obtenir E :

$$\mathbb{P}(S) = p \ , \ \mathbb{P}(E) = q \quad \text{où } p + q = 1$$

On répète n fois la **même** expérience, chacune d' entre elles étant indépendante des autres.On peut alors définir la variable aléatoire X représentative du nombre de succès apparus lors de ces n expériences. Que vaut alors la probabilité pour que X prenne la valeur x où $x \in \{ 0, 1, 2, \ldots , n-1, n \}$?

La situation suivante $\underbrace{SSSS \ldots S}_{x \text{ fois}}\underbrace{EEE \ldots E}_{n - x \text{ fois}}$

est une des possibilités pour avoir X = x. Sa probabilité vaut $p^x.q^{n-x}$

Il existe $P_n^{x,n-x} = \dfrac{n!}{x!(n-x)!} = \dbinom{n}{x}$ situations de ce type.

On a donc

$$\boxed{\mathbb{P}(X = x) = p_x = \binom{n}{x}.p^x.q^{n-x}}$$

Remarques :

1. Les différents p_x où $x \in \{ 0, 1, 2, \ldots ,n \}$ sont les n + 1 termes consécutifs du développement du binôme de Newton $(p + q)^n$. De là, le nom de distribution binômiale.
2. Il est à noter que l' on a bien $\sum_{x=0}^{n} p_x = (p + q)^n = 1$

Exemple :

Une urne contient 9 boules : 6 rouges et 3 vertes. On tire une boule au hasard de l' urne, on note sa couleur et on la remet dans l' urne. Quelle est la probabilité d' obtenir 4 boules rouges en 5 tirages ?

$$X : \begin{cases} S : \text{" La boule retirée est rouge "} & p = 2/3 \\ E : \text{" La boule retirée est verte "} & q = 1/3 \end{cases}$$

X est une variable aléatoire binômiale de paramètres n = 5 et $p = \frac{2}{3}$

$$X : B\left(5 , \frac{2}{3} \right)$$

On a donc $p_4 = \binom{5}{4} . (2/3)^4 . (1/3)^1 \cong 0,3$

EMPLOI DES TABLES

Les tables B(n,p) donnent les différentes valeurs de p_x pour n et p choisis. (voir pages suivantes)

Il est à noter que si p > 0,5, la valeur de

$$p_x = \binom{n}{x} . p^x . q^{n-x}$$

se trouve en cherchant dans les tables la valeur de p_{n-x} pour une variable B(n,1-p) qui vaut

$$\binom{n}{n-x} . (1 - p)^{n-x} . (1 - (1 - p))^{n-(n-x)} = \binom{n}{x} . p^x . q^{n-x}$$

Il suffit en effet d' inverser le rôle de S et de E : obtenir x succès pour une variable B(n,p) revient à obtenir n-x échecs pour une variable B(n,p). Cette situation équivaut à obtenir n-x succès pour une variable B(n,1 - p) ou B(n,q).

<u>Exemple</u> : Si X est une variable B(10 ; 0,7) que vaut p_4 ?
Il suffit de rechercher p_6 pour une variable B(10 ; 0,3). La valeur recherchée vaut donc 0,0368.

INDIVIDUAL TERMS, BINOMIAL DISTRIBUTION

n	x	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
1	0	.9500	.9000	.8500	.8000	.7500	.7000	.6500	.6000	.5500	.5000
	1	.0500	.1000	.1500	.2000	.2500	.3000	.3500	.4000	.4500	.5000
2	0	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4225	.3600	.3025	.2500
	1	.0950	.1800	.2550	.3200	.3750	.4200	.4550	.4800	.4950	.5000
	2	.0025	.0100	.0225	.0400	.0625	.0900	.1225	.1600	.2025	.2500
3	0	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2746	.2160	.1664	.1250
	1	.1354	.2430	.3251	.3840	.4219	.4410	.4436	.4320	.4084	.3750
	2	.0071	.0270	.0574	.0960	.1406	.1890	.2389	.2880	.3341	.3750
	3	.0001	.0010	.0034	.0080	.0156	.0270	.0429	.0640	.0911	.1250
4	0	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1785	.1296	.0915	.0625
	1	.1715	.2916	.3685	.4096	.4219	.4116	.3845	.3456	.2995	.2500
	2	.0135	.0486	.0975	.1536	.2109	.2646	.3105	.3456	.3675	.3750
	3	.0005	.0036	.0115	.0256	.0469	.0756	.1115	.1536	.2005	.2500
	4	.0000	.0001	.0005	.0016	.0039	.0081	.0150	.0256	.0410	.0625
5	0	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1160	.0778	.0503	.0312
	1	.2036	.3280	.3915	.4096	.3955	.3602	.3124	.2592	.2059	.1562
	2	.0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3364	.3456	.3369	.3125
	3	.0011	.0081	.0244	.0512	.0879	.1323	.1811	.2304	.2757	.3125
	4	.0000	.0004	.0022	.0064	.0146	.0284	.0488	.0768	.1128	.1562
	5	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0024	.0053	.0102	.0185	.0312
6	0	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0754	.0467	.0277	.0156
	1	.2321	.3543	.3993	.3932	.3560	.3025	.2437	.1866	.1359	.0938
	2	.0305	.0984	.1762	.2458	.2966	.3241	.3280	.3110	.2780	.2344
	3	.0021	.0146	.0415	.0819	.1318	.1852	.2355	.2765	.3032	.3125
	4	.0001	.0012	.0055	.0154	.0330	.0595	.0951	.1382	.1861	.2344
	5	.0000	.0001	.0004	.0015	.0044	.0102	.0205	.0369	.0609	.0938
	6	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0018	.0041	.0083	.0156
7	0	.6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0490	.0280	.0152	.0078
	1	.2573	.3720	.3960	.3670	.3115	.2471	.1848	.1306	.0872	.0547
	2	.0406	.1240	.2097	.2753	.3115	.3177	.2985	.2613	.2140	.1641
	3	.0036	.0230	.0617	.1147	.1730	.2269	.2679	.2903	.2918	.2734
	4	.0002	.0026	.0109	.0287	.0577	.0972	.1442	.1935	.2388	.2734
	5	.0000	.0002	.0012	.0043	.0115	.0250	.0466	.0774	.1172	.1641
	6	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0036	.0084	.0172	.0320	.0547
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0016	.0037	.0078

Linear interpolations with respect to p will in general be accurate at most to two decimal places.

INDIVIDUAL TERMS, BINOMIAL DISTRIBUTION (Continued)

n	x	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
8	0	.6634	.4305	.2725	.1678	.1001	.0576	.0319	.0168	.0084	.0039
	1	.2793	.3826	.3847	.3355	.2670	.1977	.1373	.0896	.0548	.0312
	2	.0515	.1488	.2376	.2936	.3115	.2965	.2587	.2090	.1569	.1094
	3	.0054	.0331	.0839	.1468	.2076	.2541	.2786	.2787	.2568	.2188
	4	.0004	.0046	.0185	.0459	.0865	.1361	.1875	.2322	.2627	.2734
	5	.0000	.0004	.0026	.0092	.0231	.0467	.0808	.1239	.1719	.2188
	6	.0000	.0000	.0002	.0011	.0038	.0100	.0217	.0413	.0703	.1094
	7	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0012	.0033	.0079	.0164	.0312
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0017	.0039
9	0	.6302	.3874	.2316	.1342	.0751	.0404	.0207	.0101	.0046	.0020
	1	.2985	.3874	.3679	.3020	.2253	.1556	.1004	.0605	.0339	.0176
	2	.0629	.1722	.2597	.3020	.3003	.2668	.2162	.1612	.1110	.0703
	3	.0077	.0446	.1069	.1762	.2336	.2668	.2716	.2508	.2119	.1641
	4	.0006	.0074	.0283	.0661	.1168	.1715	.2194	.2508	.2600	.2461
	5	.0000	.0008	.0050	.0165	.0389	.0735	.1181	.1672	.2128	.2461
	6	.0000	.0001	.0006	.0028	.0087	.0210	.0424	.0743	.1160	.1641
	7	.0000	.0000	.0000	.0003	.0012	.0039	.0098	.0212	.0407	.0703
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0035	.0083	.0176
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0008	.0020
10	0	.5987	.3487	.1969	.1074	.0563	.0282	.0135	.0060	.0025	.0010
	1	.3151	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098
	2	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439
	3	.0105	.0574	.1298	.2013	.2503	.2668	.2522	.2150	.1665	.1172
	4	.0010	.0112	.0401	.0881	.1460	.2001	.2377	.2508	.2384	.2051
	5	.0001	.0015	.0085	.0264	.0584	.1029	.1536	.2007	.2340	.2461
	6	.0000	.0001	.0012	.0055	.0162	.0368	.0689	.1115	.1596	.2051
	7	.0000	.0000	.0001	.0008	.0031	.0090	.0212	.0425	.0746	.1172
	8	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0014	.0043	.0106	.0229	.0439
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0016	.0042	.0098
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010
11	0	.5688	.3138	.1673	.0859	.0422	.0198	.0088	.0036	.0014	.0005
	1	.3293	.3835	.3248	.2362	.1549	.0932	.0518	.0266	.0125	.0054
	2	.0867	.2131	.2866	.2953	.2581	.1998	.1395	.0887	.0513	.0269
	3	.0137	.0710	.1517	.2215	.2581	.2568	.2254	.1774	.1259	.0806
	4	.0014	.0158	.0536	.1107	.1721	.2201	.2428	.2365	.2060	.1611
	5	.0001	.0025	.0132	.0388	.0803	.1321	.1830	.2207	.2360	.2256
	6	.0000	.0003	.0023	.0097	.0268	.0566	.0985	.1471	.1931	.2256
	7	.0000	.0000	.0003	.0017	.0064	.0173	.0379	.0701	.1128	.1611
	8	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0037	.0102	.0234	.0462	.0806
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0018	.0052	.0126	.0269

15

INDIVIDUAL TERMS, BINOMIAL DISTRIBUTION (Continued)

n	x	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
11	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0007	.0021	.0054
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0005
12	0	.5404	.2824	.1422	.0687	.0317	.0138	.0057	.0022	.0008	.0002
	1	.3413	.3766	.3012	.2062	.1267	.0712	.0368	.0174	.0075	.0029
	2	.0988	.2301	.2924	.2835	.2323	.1678	.1088	.0639	.0339	.0161
	3	.0173	.0852	.1720	.2362	.2581	.2397	.1954	.1419	.0923	.0537
	4	.0021	.0213	.0683	.1329	.1936	.2311	.2367	.2128	.1700	.1208
	5	.0002	.0038	.0193	.0532	.1032	.1585	.2039	.2270	.2225	.1934
	6	.0000	.0005	.0040	.0155	.0401	.0792	.1281	.1766	.2124	.2256
	7	.0000	.0000	.0006	.0033	.0115	.0291	.0591	.1009	.1489	.1934
	8	.0000	.0000	.0001	.0005	.0024	.0078	.0199	.0420	.0762	.1208
	9	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0015	.0048	.0125	.0277	.0537
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0008	.0025	.0068	.0161
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0029
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002
13	0	.5133	.2542	.1209	.0550	.0238	.0097	.0037	.0013	.0004	.0001
	1	.3512	.3672	.2774	.1787	.1029	.0540	.0259	.0113	.0045	.0016
	2	.1109	.2448	.2937	.2680	.2059	.1388	.0836	.0453	.0220	.0095
	3	.0214	.0997	.1900	.2457	.2517	.2181	.1651	.1107	.0660	.0349
	4	.0028	.0277	.0838	.1535	.2097	.2337	.2222	.1845	.1350	.0873
	5	.0003	.0055	.0266	.0691	.1258	.1803	.2154	.2214	.1989	.1571
	6	.0000	.0008	.0063	.0230	.0559	.1030	.1546	.1968	.2169	.2095
	7	.0000	.0001	.0011	.0058	.0186	.0442	.0833	.1312	.1775	.2095
	8	.0000	.0000	.0001	.0011	.0047	.0142	.0336	.0656	.1089	.1571
	9	.0000	.0000	.0000	.0001	.0009	.0034	.0101	.0243	.0495	.0873
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0022	.0065	.0162	.0349
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0012	.0036	.0095
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0016
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
14	0	.4877	.2288	.1028	.0440	.0178	.0068	.0024	.0008	.0002	.0001
	1	.3593	.3559	.2539	.1539	.0832	.0407	.0181	.0073	.0027	.0009
	2	.1229	.2570	.2912	.2501	.1802	.1134	.0634	.0317	.0141	.0056
	3	.0259	.1142	.2056	.2501	.2402	.1943	.1366	.0845	.0462	.0222
	4	.0037	.0349	.0998	.1720	.2202	.2290	.2022	.1549	.1040	.0611
	5	.0004	.0078	.0352	.0860	.1468	.1963	.2178	.2066	.1701	.1222
	6	.0000	.0013	.0093	.0322	.0734	.1262	.1759	.2066	.2088	.1833
	7	.0000	.0002	.0019	.0092	.0280	.0618	.1082	.1574	.1952	.2095
	8	.0000	.0000	.0003	.0020	.0082	.0232	.0510	.0918	.1398	.1833
	9	.0000	.0000	.0000	.0003	.0018	.0066	.0183	.0408	.0762	.1222

INDIVIDUAL TERMS, BINOMIAL DISTRIBUTION (Continued)

n	x	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
14	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0014	.0049	.0136	.0312	.0611
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0010	.0033	.0093	.0222
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0019	.0056
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0009
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
15	0	.4633	.2059	.0874	.0352	.0134	.0047	.0016	.0005	.0001	.0000
	1	.3658	.3432	.2312	.1319	.0668	.0305	.0126	.0047	.0016	.0005
	2	.1348	.2669	.2856	.2309	.1559	.0916	.0476	.0219	.0090	.0032
	3	.0307	.1285	.2184	.2501	.2252	.1700	.1110	.0634	.0318	.0139
	4	.0049	.0428	.1156	.1876	.2252	.2186	.1792	.1268	.0780	.0417
	5	.0006	.0105	.0449	.1032	.1651	.2061	.2123	.1859	.1404	.0916
	6	.0000	.0019	.0132	.0430	.0917	.1472	.1906	.2066	.1914	.1527
	7	.0000	.0003	.0030	.0138	.0393	.0811	.1319	.1771	.2013	.1964
	8	.0000	.0000	.0005	.0035	.0131	.0348	.0710	.1181	.1647	.1964
	9	.0000	.0000	.0001	.0007	.0034	.0116	.0298	.0612	.1048	.1527
	10	.0000	.0000	.0000	.0001	.0007	.0030	.0096	.0245	.0515	.0916
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0024	.0074	.0191	.0417
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0016	.0052	.0139
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0032
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
16	0	.4401	.1853	.0743	.0281	.0100	.0033	.0010	.0003	.0001	.0000
	1	.3706	.3294	.2097	.1126	.0535	.0228	.0087	.0030	.0009	.0002
	2	.1463	.2745	.2775	.2111	.1336	.0732	.0353	.0150	.0056	.0018
	3	.0359	.1423	.2285	.2463	.2079	.1465	.0888	.0468	.0215	.0085
	4	.0061	.0514	.1311	.2001	.2252	.2040	.1553	.1014	.0572	.0278
	5	.0008	.0137	.0555	.1201	.1802	.2099	.2008	.1623	.1123	.0667
	6	.0001	.0028	.0180	.0550	.1101	.1649	.1982	.1983	.1684	.1222
	7	.0000	.0004	.0045	.0197	.0524	.1010	.1524	.1889	.1969	.1746
	8	.0000	.0001	.0009	.0055	.0197	.0487	.0923	.1417	.1812	.1964
	9	.0000	.0000	.0001	.0012	.0058	.0185	.0442	.0840	.1318	.1746
	10	.0000	.0000	.0000	.0002	.0014	.0056	.0167	.0392	.0755	.1222
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0013	.0049	.0142	.0337	.0667
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0040	.0115	.0278
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0008	.0029	.0085
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0018
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

INDIVIDUAL TERMS, BINOMIAL DISTRIBUTION (Continued)

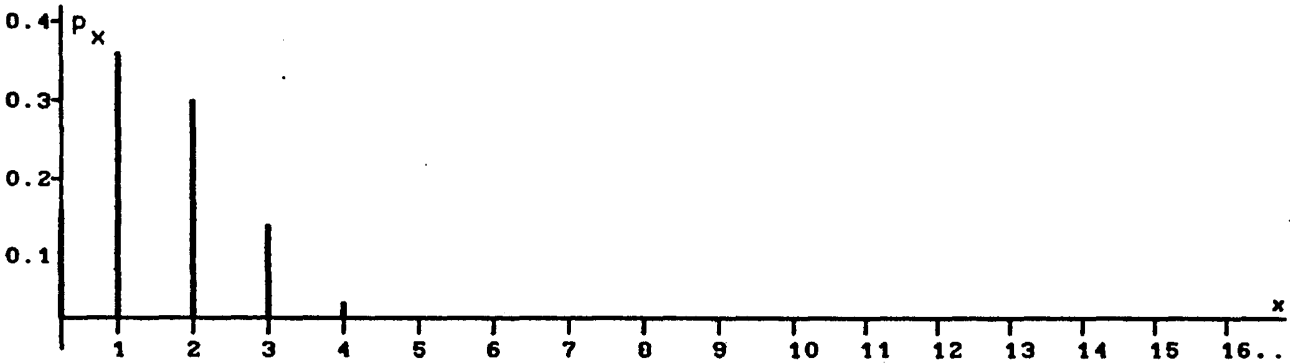
n	x	p .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
17	0	.4181	.1668	.0631	.0225	.0075	.0023	.0007	.0002	.0000	.0000
	1	.3741	.3150	.1893	.0957	.0426	.0169	.0060	.0019	.0005	.0001
	2	.1575	.2800	.2673	.1914	.1136	.0581	.0260	.0102	.0035	.0010
	3	.0415	.1556	.2359	.2393	.1893	.1245	.0701	.0341	.0144	.0052
	4	.9076	.0605	.1457	.2093	.2209	.1868	.1320	.0796	.0411	.0182
	5	.0010	.0175	.0668	.1361	.1914	.2081	.1849	.1379	.0875	.0472
	6	.0001	.0039	.0236	.0680	.1276	.1784	.1991	.1839	.1432	.0944
	7	.0000	.0007	.0065	.0267	.0668	.1201	.1685	.1927	.1841	.1484
	8	.0000	.0001	.0014	.0084	.0279	.0644	.1134	.1606	.1883	.1855
	9	.0000	.0000	.0003	.0021	.0093	.0276	.0611	.1070	.1540	.1855
	10	.0000	.0000	.0000	.0004	.0025	.0095	.0263	.0571	.1008	.1484
	11	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0026	.0090	.0242	.0525	.0944
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0024	.0081	.0215	.0472
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0021	.0068	.0182
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0016	.0052
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
18	0	.3972	.1501	.0536	.0180	.0056	.0016	.0004	.0001	.0000	.0000
	1	.3763	.3002	.1704	.0811	.0338	.0126	.0042	.0012	.0003	.0001
	2	.1683	.2835	.2556	.1723	.0958	.0458	.0190	.0069	.0022	.0006
	3	.0473	.1680	.2406	.2297	.1704	.1046	.0547	.0246	.0095	.0031
	4	.0093	.0700	.1592	.2153	.2130	.1681	.1104	.0614	.0291	.0117
	5	.0014	.0218	.0787	.1507	.1988	.2017	.1664	.1146	.0666	.0327
	6	.0002	.0052	.0301	.0816	.1436	.1873	.1941	.1655	.1181	.0708
	7	.0000	.0010	.0091	.0350	.0820	.1376	.1792	.1892	.1657	.1214
	8	.0000	.0002	.0022	.0120	.0376	.0811	.1327	.1734	.1864	.1669
	9	.0000	.0000	.0004	.0033	.0139	.0386	.0794	.1284	.1694	.1855
	10	.0000	.0000	.0001	.0008	.0042	.0149	.0385	.0771	.1248	.1669
	11	.0000	.0000	.0000	.0001	.0010	.0046	.0151	.0374	.0742	.1214
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0012	.0047	.0145	.0354	.0708
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0012	.0045	.0134	.0327
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0039	.0117
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0009	.0031
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

INDIVIDUAL TERMS, BINOMIAL DISTRIBUTION (Continued)

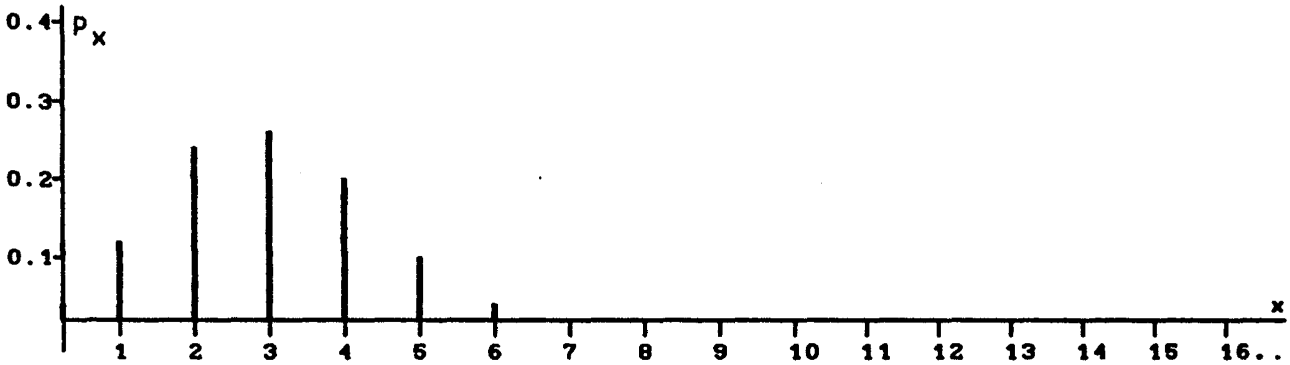
n	x	p .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
19	0	.3774	.1351	.0456	.0144	.0042	.0011	.0003	.0001	.0000	.0000
	1	.3774	.2852	.1529	.0685	.0268	.0093	.0029	.0008	.0002	.0000
	2	.1787	.2852	.2428	.1540	.0803	.0358	.0138	.0046	.0013	.0003
	3	.0533	.1796	.2428	.2182	.1517	.0869	.0422	.0175	.0062	.0018
	4	.0112	.0798	.1714	.2182	.2023	.1491	.0909	.0467	.0203	.0074
	5	.0018	.0266	.0907	.1636	.2023	.1916	.1468	.0933	.0497	.0222
	6	.0002	.0069	.0374	.0955	.1574	.1916	.1844	.1451	.0949	.0518
	7	.0000	.0014	.0122	.0443	.0974	.1525	.1844	.1797	.1443	.0961
	8	.0000	.0002	.0032	.0166	.0487	.0981	.1489	.1797	.1771	.1442
	9	.0000	.0000	.0007	.0051	.0198	.0514	.0980	.1464	.1771	.1762
	10	.0000	.0000	.0001	.0013	.0066	.0220	.0528	.0976	.1449	.1762
	11	.0000	.0000	.0000	.0003	.0018	.0077	.0233	.0532	.0970	.1442
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0004	.0022	.0083	.0237	.0529	.0961
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0024	.0085	.0233	.0518
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0024	.0082	.0222
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0022	.0074
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0018
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
20	0	.3585	.1216	.0388	.0115	.0032	.0008	.0002	.0000	.0000	.0000
	1	.3774	.2702	.1368	.0576	.0211	.0068	.0020	.0005	.0001	.0000
	2	.1887	.2852	.2293	.1369	.0669	.0278	.0100	.0031	.0008	.0002
	3	.0596	.1901	.2428	.2054	.1339	.0716	.0323	.0123	.0040	.0011
	4	.0133	.0898	.1821	.2182	.1897	.1304	.0738	.0350	.0139	.0046
	5	.0022	.0319	.1028	.1746	.2023	.1789	.1272	.0746	.0365	.0148
	6	.0003	.0089	.0454	.1091	.1686	.1916	.1712	.1244	.0746	.0370
	7	.0000	.0020	.0160	.0545	.1124	.1643	.1844	.1659	.1221	.0739
	8	.0000	.0004	.0046	.0222	.0609	.1144	.1614	.1797	.1623	.1201
	9	.0000	.0001	.0011	.0074	.0271	.0654	.1158	.1597	.1771	.1602
	10	.0000	.0000	.0002	.0020	.0099	.0308	.0686	.1171	.1593	.1762
	11	.0000	.0000	.0000	.0005	.0030	.0120	.0336	.0710	.1185	.1602
	12	.0000	.0000	.0000	.0001	.0008	.0039	.0136	.0355	.0727	.1201
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0010	.0045	.0146	.0366	.0739
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0012	.0049	.0150	.0370
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0013	.0049	.0148
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0013	.0046
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002
	19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	20	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

REPRESENTATION GRAPHIQUE

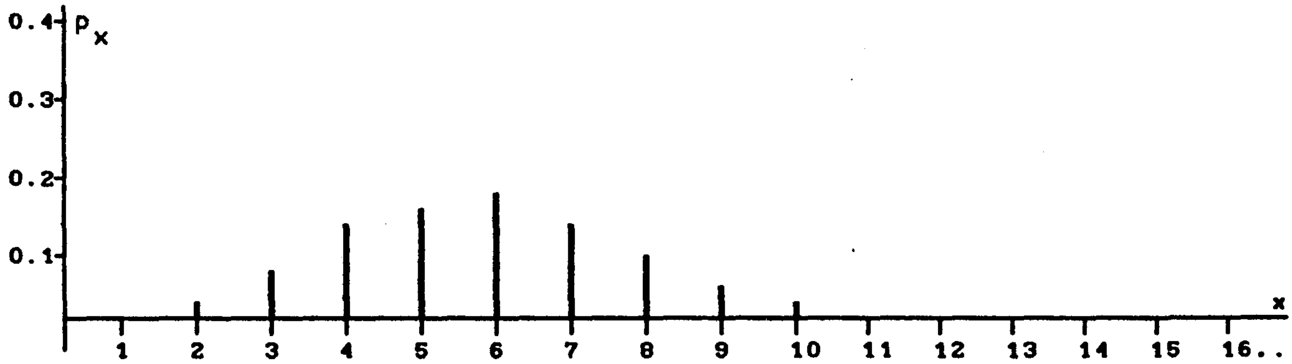
n = 5 et p = 0,3



n = 10 et p = 0,3



n = 20 et p = 0,3



Pour un n donné, la distribution binômiale est symétrique si p = 0,5 et dissymétrique dans les autres cas. Cette dissymétrie s' atténue si n augmente : le diagramme en bâtonnets se déplace vers la droite et tend à prendre la forme en cloche de la loi normale.

La loi binômiale (discontinue) est souvent approchée par la loi normale (continue) si n est " grand ".

ESPERANCE MATHEMATIQUE, VARIANCE ET ECART-TYPE D' UNE B(n,p)

$$\overline{X} = E(X) = \sum_{x=0}^{n} x_x . p_x = \sum_{x=0}^{n} x . \binom{n}{x} . p^x . q^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} x . \binom{n}{x} . p^x . q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} x . \frac{n!}{x! . (n - x)!} . p^x . q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} n . \frac{(n - 1)!}{(x - 1)! . (n - x)!} . p^x . q^{n-x}$$

$$= n.p. \sum_{x=1}^{n} \binom{n-1}{x-1} . p^{x-1} . q^{n-x}$$

$$= n.p. \sum_{x-1=0}^{n-1} \binom{n-1}{x-1} . p^{x-1} . q^{n-x}$$

$$= n.p.(p + q)^{n-1} = n.p$$

$$\boxed{\overline{X} = E(X) = n.p}$$

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - \overline{X}^2 = E(X^2) - n^2 p^2 \qquad (1)$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{n} x^2 . \binom{n}{x} . p^x . q^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} x^2 . \binom{n}{x} . p^x . q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} (x - 1 + 1) . \frac{n!}{(x - 1)! . (n - x)!} . p^x . q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=2}^{n} \frac{n!}{(x - 2)! . (n - x)!} . p^x . q^{n-x} + \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x - 1)! . (n - x)!} . p^x . q^{n-x}$$

$$= n.(n-1).p^2.\sum_{x-2=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{(x-2)!.(n-x)!}.p^{x-2}.q^{n-x}$$

$$+ n.p.\sum_{x=1}^{n} \binom{n-1}{x-1}.p^{x-1}.q^{n-x}$$

$$= n.(n-1).p^2.(p+q)^{n-2} + n.p.\sum_{x-1=0}^{n-1} \binom{n-1}{x-1}.p^{x-1}.q^{n-x}$$

$$= n.(n-1).p^2 + n.p.(p+q)^{n-1}$$

$$= n.(n-1).p^2 + n.p = n^2.p^2 - n.p^2 + n.p$$

$$= n^2.p^2 + n.p.(1-p) = n^2.p^2 + n.p.q \qquad (2)$$

De (1) et (2), on conclut que

$$\boxed{\sigma^2(X) = n.p.q \text{ et que } \sigma(X) = \sqrt{n.p.q}}$$

Exemple :

Si on jette un dé 180 fois, quelle est l' espérance mathématique et l' écart-type du nombre d' apparitions du nombre 6 ?

$X : B(180, \frac{1}{6})$

$E(X) = n.p = 30$

$\sigma^2(X) = 180.\frac{1}{6}.\frac{5}{6} = 25$ et $\sigma(X) = 5$

AJUSTEMENT A UNE LOI BINOMIALE

Considérons une population d' électeurs dont on ne connaît rien au départ et cherchons à estimer la proportion p des électeurs favorables à un certain candidat.

Pour cela, on tire au hasard 1000 groupes de 9 électeurs et on compte le nombre d' opinions favorables dans chaque groupe.
(Exemple : Si on trouve 4 réponses positives dans 194 groupes, alors la fréquence de ce résultat est de 194/1000 = 0,194)

On opère ainsi pour les 10 résultats possibles et, en utilisant les fréquences comme des probabilités, on trouve une moyenne de 3,007 ce qui conduirait à estimer que si l' on peut considérer que les résultats ont une distribution binômiale, celle-ci serait une

$$B(9,\frac{1}{3}).$$

Il reste à vérifier que les fréquences observées se distribuent bien suivant une loi binômiale, faute de quoi, l' estimation serait fallacieuse : on calcule donc les probabilités théoriques de la loi binômiale pour $n = 9$ et $p = \frac{1}{3}$ et on les rapproche des fréquences obsevées pour voir si elles coïncident.

Les calculs sont résumés dans le tableau suivant :

résultat	groupes	fréquence	probabilité théorique
0	23	0,023	0,026
1	126	0,126	0,117
2	249	0,249	0,234
3	251	0,251	0,273
4	194	0,194	0,205
5	106	0,106	0,102
6	39	0,039	0,034
7	8	0,008	0,007
8	2	0,002	0,001
9	2	0,002	0,000

La bonne concordance entre les fréquences observées et les probabilités théoriques justifie l' hypothèse " $p = \frac{1}{3}$ " .

EXERCICES

1. L' étude statistique de la fabrication industrielle d' une pièce usinée conduit à estimer qu' il existe une probabilité de 0,05 pour qu' une pièce au hasard soit défectueuse.
   Quelle est la probabilité pour que dans un lot de 10 pièces on ait plus de 2 pièces à rejeter ?

2. Un examen présente 10 questions à des étudiants. Pour chacune d' elles 5 réponses sont possibles. Un étudiant répond au hasard. Que peut-il espérer raisonnement comme nombre de réponses correctes ?
   S' il faut 6 réponses correctes pour réussir, quelle est sa probabilité de réussite ?

3. Les brûlures au troisième degré entraînent la mort dans 40 % des cas. Sur 5 brûlés, quelle est la probabilité pour que
   a) aucun des brûlés ne survive ?
   b) 2 brûlés survivent ?
   c) tous survivent ?

4. Une entreprise fabrique des lampes électriques vendues par lots de 10. Les contrôles de fabrication ont permis d' établir que 80 % des lampes durent plus de 1000 heures d' utilisation.
   a) Quel est le nombre moyen de lampes qui dureront plus de 1000 heures ?
   b) Quelle est la probabilité pour que toutes les lampes d' un lot durent plus de 1000 heures ?
   c) Quelle est la probabilité pour que toutes les lampes d' un lot durent moins de 1000 heures ?
   d) Quelle est la probabilité pour qu' au moins 8 lampes d' un lot durent plus de 1000 heures ?
   e) Quelle est la probabilité pour qu' au plus 8 lampes d' un lot durent plus de 1000 heures ?

5. Le pourcentage de succès à un examen est de 40 %. On considère un groupe de 6 amis et on appelle X le nombre de reçus parmi eux.
   Donner la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

6. Deux joueurs jouent à pile ou face Chaque joueur joue 100 fois. Quelle est la probabilité pour que les deux joueurs aient le même nombre de faces après les 100 jets ?