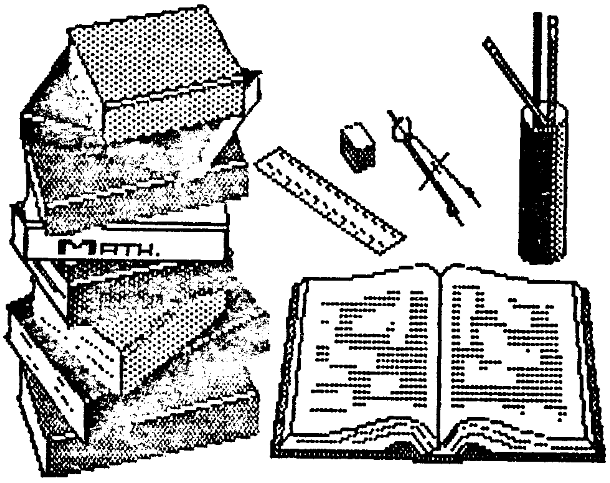


LES DETERMINANTS

12

— LES DETERMINANTS —

Un autre dialogue entre l' algèbre et la géométrie

INTRODUCTION D' ORDRE HISTORIQUE

Les déterminants sont traditionnellement liés aux systèmes de n (n = 2, n = 3, ...) équations linéaires à n inconnues, sur ℝ, sur ℂ ou sur un autre corps.

Dès l' Antiquité, vers - 1500, des mathématiciens babyloniens ont rencontré et créé des problèmes conduisant à des systèmes linéaires et ils ont été à même de les résoudre. On cite un exemple où n = 10. Impressionnant !

Jusqu' à la Renaissance, l' algèbre demeure tributaire de la géométrie. Un nombre réel représente un rapport de segments. Le produit de deux réels exige une aire, le produit de trois réels exige un volume et dès lors comment concevoir ce que nous notons x^4, x^5, x^6, x^7, ... ?

On comprend que la résolution d' équations et de systèmes soit demeurée un tour de force pour les meilleurs mathématiciens.

Une lente progression au travers d' acquis divers dûs notamment aux mathématiciens indiens et arabes, durant un millénaire environ, nous amène à une période de changements radicaux. Un artisan essentiel est **François VIETE** (1540,1603). Celui-ci introduit des lettres pour noter les coefficients et par là, il devient possible d' étudier et d' écrire une infinité d' équations dans une seule expression. C' est un gain en abstraction et en généralité. En se servant des aires, Viète établit des règles du calcul littéral comme la distributivité et la règle des signes. A partir de là, l' algèbre gagne peu à peu son autonomie vis-à-vis de la géométrie. Les nouveaux développements n' exigent plus le recours aux aires et aux volumes. Il devient possible de concevoir un polynôme général. Chez **DESCARTES** (1596, 1650) en 1637, les polynômes s' écrivent à peu près comme pour nous et des théorèmes généraux sur leurs racines apparaissent.

L' algèbre jadis soumise à la géométrie, obtient sa revanche avec la création de la géométrie analytique due à **FERMAT** (1608,1665) et **DESCARTES**. Puisque toute équation polynômiale

$$f(x,y) = 0$$

livre une courbe, on découvre ainsi une véritable machine à produire des courbes nouvelles. Avant cette période, il y avait une collection assez limitée de courbes qui avaient pu être étudiées de manière satisfaisante. **FERMAT** est le premier à observer que les sections planes du cône ou coniques coïncident exactement avec les courbes du second degré (le cas où f est un polynôme de degré deux). Si f est du premier degré, f possède trois coefficients. Si on exige que la courbe d' équation $f(x,y) = 0$ passe par un point donné, les coefficients sont soumis à une équation linéaire homogène. Deux points imposent deux conditions linéaires homogènes et livrent une solution (à un facteur près). C' est assez naturel car par deux points passe une et une seule droite. On manipule de même les polynômes du second degré qui dépendent de six coefficients. On trouve ainsi que par cinq points, passe une et et une seule conique, sauf accident. Accident ? Oui. Par exemple si les cinq points sont alignés, mais les accidents n' arrivent qu' avec les coniques dégénérées, d' où le nom de celles-ci . Mais les coniques ne suffisent plus au bonheur des mathématiciens. Le grand **NEWTON** (1643,1727) s' attaque aux cubiques (f est du troisième degré) et il les classe entre 1670 et 1695 en obtenant 72 types différents, sur base de critères asymptotiques, de points doubles, de points d' inflexion, etc. **James STIRLING** (1692,1770) montredans son livre " Lineae " (1717) qu' une courbe de degré n est déterminée par $\frac{n(n+3)}{2}$ points. Pour n = 1 et 2 on retrouve les valeurs 2 et 5. Une cubique est déterminée par 9 points.

Colin MAC LAURIN (1698,1746), dans " Geometria Organica " s' attaque aux intersections de courbes planes en analysant divers cas spéciaux. Il conclut que deux courbes de degré m et n ont en général m.n points communs.

EULER (1707,1783) échoue dans une tentative de démonstration (1748) mais il cerne bien les difficultés.

C' est **BEZOUT** (1730,1783) qui donne une première démonstration largement satisfaisante en 1764 mais il faudra attendre 1873 pour une mise au point définitive par **HALPHEN** (1844,1889).

MAC LAURIN avait déjà signalé un paradoxe que **CRAMER** (1704,1752) répercute dans son livre de 1750 " Introduction à l' analyse des lignes courbes algébriques". C'est ce qu' on appelle le paradoxe de Cramer : Par 9 points passe une cubique mais deux cubiques se coupent en 9 points. Ces questions incitent les mêmes mathématiciens à une étude générale approfondie des systèmes de n équations linéaires à m inconnues, notamment dans le cas m = n.

Les cas où m = n = 2, 3, 4 sont traités par les déterminants dès 1729, par **MAC LAURIN** mais ils n' apparaissent qu' en 1748 dans son " Treatise of Algebra ". Voyons de quoi il s' agit.

Si on considère le système de 3 équations linéaires à 3 inconnues

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

et qu' on le résout par élimination successive des inconnues (méthode des babyloniens appelée méthode de Gauss) sans prendre trop de précautions avec l' annulation possible de certains coefficients, on trouve

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33} - b_1a_{23}a_{32} - \ldots}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + \ldots}$$

Le dénominateur sera le **déterminant** de la matrice associée au système :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Voilà ce que découvre **MAC LAURIN** et, indépendamment de lui, **CRAMER** dans un livre paru en 1750. Il donne un énoncé de la **règle de Cramer** que nous allons étudier. La théorie est améliorée par **BEZOUT** (1764) et **VANDERMONDE** (1735,1796) en 1772. Celui-ci fournit un premier exposé cohérent de la théorie. Il formule et démontre la fameuse règle de **CRAMER**. **CAUCHY** (1789,1857) achève la mise au point de la théorie classique, invente le nom "déterminant" et introduit le tableau carré. Il prouve que det(A.B) = detA.detB.

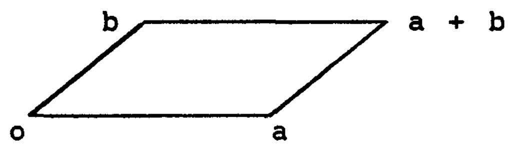
En 250 ans, l' algèbre s' est constituée en discipline autonome, elle a nourri la géométrie par les courbes algébriques (déterminées par un polynôme). La géométrie, par le biais de questions sur les courbes, appelle une théorie générale des systèmes d' équations linéaires, possible grâce aux notations algébriques acquises récemment. Le déterminant est découvert et utilisé. Une nouvelle théorie purement algébrique se constitue. Est-ce la fin de cette histoire en forme de dialogue entre la géométrie et l' algèbre ? Insoutenable " suspense "...

Ce n' est pas la fin. Vers 1870, **KRONECKER** (1823,1891) découvre un lien remarquable entre le déterminant et le plus vieux des sujets de géométrie : aires et volumes. Cette histoire est moins connue car trop récente, mais elle est passionnante et c' est elle qui nous guidera dans notre théorie qui sera à la fois géométrique et algébrique.

AIRE ORIENTEE ET DETERMINANTS

Vers 1870, Kronecker a compris le lien entre aire (volume, etc) et déterminant.

Travaillons dans le plan réel E_0^2 d' origine o. Deux vecteurs a, b déterminent un parallèlogramme qu' on peut noter ($\bar{a},\bar{b}$) en remettant les barres pour se rappeler que a et b ne sont pas des coordonnées de points.



Soit A($\bar{a},\bar{b}$), l' aire de ($\bar{a},\bar{b}$). On a A($\bar{a},\bar{b}$) = A($\bar{b},\bar{a}$)

La fonction A pourrait-elle être linéaire en $\bar{a}$ et en $\bar{b}$?

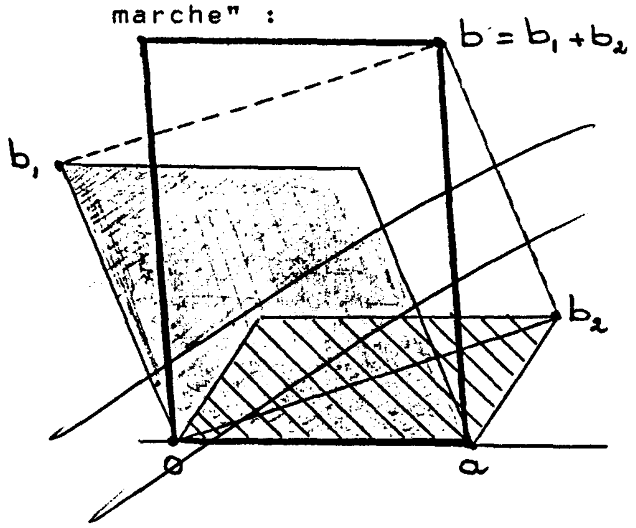
(Il suffit d'examiner le cas de $\bar{b}$, le cas de $\bar{a}$ étant similaire.)

On doit pour cela vérifier que pour tout $\overline{a}$, $\overline{b_1}$, $\overline{b_2}$, $\overline{b} \in E_0^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$A(\overline{a},\overline{b_1 + b_2}) = A(\overline{a},\overline{b_1}) + A(\overline{a},\overline{b_2})$$

et que $$A(\overline{a},\lambda\overline{b}) = \lambda . A(\overline{a},\overline{b})$$

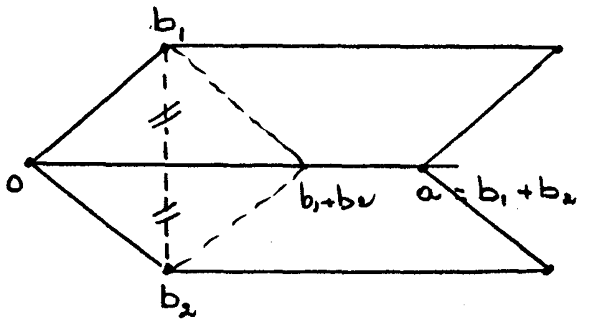
Considérons la première égalité et tentons un essai pour voir si "ça marche" :



Soit $b = b_1 + b_2$ L' altitude de b au-dessus de oa est la somme des altitudes de b_1 et de b_2(par la translation t_{ob_2}).

Dans le cas présenté, on a que $A(\overline{a},\overline{b_1 + b_2}) = A(\overline{a},\overline{b_1}) + A(\overline{a},\overline{b_2})$

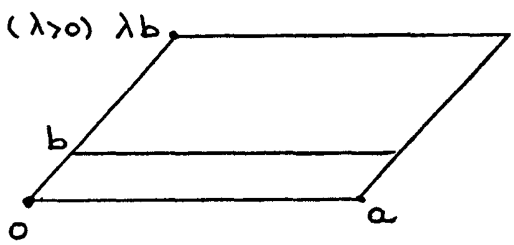
Mais nous avons raisonné sans grandes précautions sur une figure et une autre figure fait s' écrouler notre rêve :



Ici, $A(\overline{a},\overline{b_1 + b_2}) = 0$ mais
$$A(\overline{a},\overline{b_1}) + A(\overline{a},\overline{b_2}) \neq 0$$

On "sent" que l' aire doit être orientée pour que la propriété subsiste.

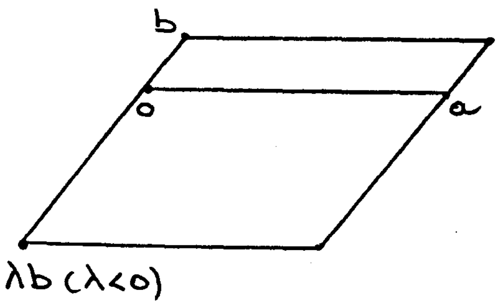
Et $A(\overline{a},\lambda\overline{b})$?



L' altitude de λb au-dessus de oa est λ fois celle de b (Thales). Donc

$$A(\overline{a},\lambda\overline{b}) = \lambda . A(\overline{a},\overline{b})$$

mais ceci suppose $\lambda > 0$ sinon,nous aurions obtenu

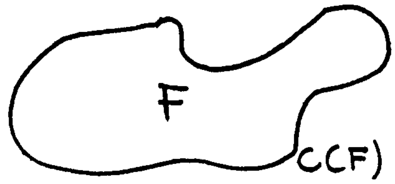


$$A(\overline{a},\lambda\overline{b}) = -\lambda . A(\overline{a},\overline{b})$$

notre but n' est à nouveau pas atteint. La nécessité d' une aire orientée apparaît à nouveau.

Conclusion

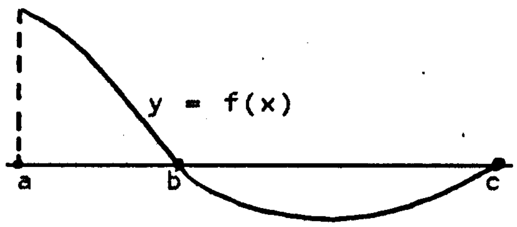
On introduit avantageusement, à côté de l' aire habituelle $A(F)$ d' un figure plane F limitée par une courbe simple $C(F)$, une **aire orientée $A^r(F)$**

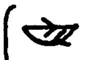


$$A^r(F) = \begin{cases} A(F) \text{ si } C(F) \text{ est orientée positivement (le sens positif étant le sens antihorlogique comme en trigonométrie.)} \\ -A(F) \text{ si } C(F) \text{ est orientée négativement.} \end{cases}$$

Remarques

1. Il faut s' assurer que la conclusion ne conduit pas à de nouveaux ennuis.
2. L' avantage apparaît aussi dans l' **intégrale définie**

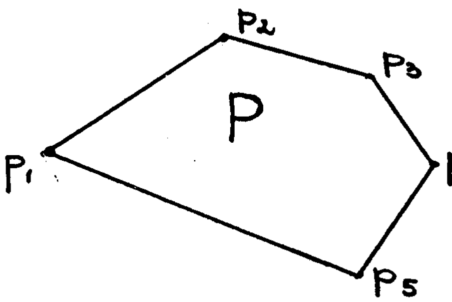


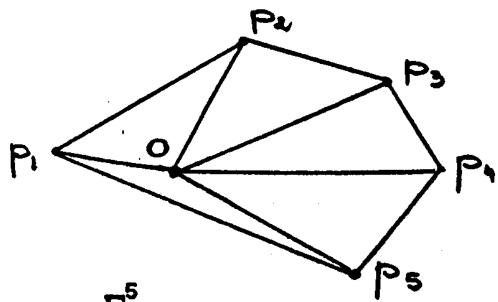
$\int_a^c f = A^r\Big($  $\Big) + A^r\Big($  $\Big)$

$= A\Big($  $\Big) - A\Big($  $\Big)$

L' intégrale est l' aire orientée "sous" la courbe que f soit positive ou négative.

3. L' avantage apparaît pour un polygone P dont on recherche l' aire en le "disséquant" :





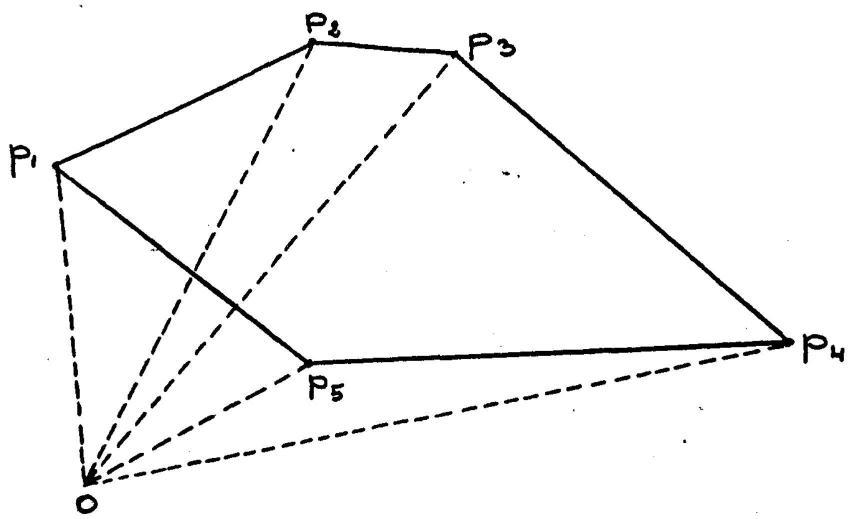
Si o est un point intérieur à P, $A(P) = \sum_{i=1}^{5} A(op_ip_{i+1})$ où $p_6 = p_1$

Avec la notion d' aire orientée, ceci reste valable pout tout point o du plan, celui-ci pouvant être à l' extérieur du triangle :

$$A^r(P) = \sum_{i=1}^{5} A^r(\ op_i p_{i+1})$$

$$= A(op_2p_1) + A(op_3p_2) + A(op_4p_3) - A(op_5p_4) - A(op_1p_5)$$

$$= A(P)$$



Reprenons $A^r(\ \bar{a},\bar{b}\ )$

Nous admettons physiquement que

1°) $A^r(\ \bar{a},\bar{a}\ ) = 0 \qquad \forall\ \bar{a} \in E_0^2$

2°) $A^r(\ \overline{a_1 + a_2},\bar{b}\ ) = A^r(\ \bar{a_1},\bar{b}\ ) + A^r(\ \bar{a_2},\bar{b}\ ) \qquad \forall\ \bar{a_1},\bar{a_2},\ \bar{b} \in E_0^2$

(et de même pour $\bar{b} = \overline{b_1 + b_2}$)

3°) $A^r(\ \lambda.\bar{a},\bar{b}\ ) = \lambda.A^r(\ \bar{a},\bar{b}\ ) \qquad \forall\ \bar{a},\ \bar{b} \in E_0^2,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$

(et de même pour $\lambda.\bar{b}$)

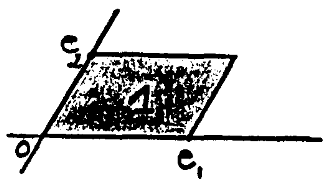
4°) $A^r(\ \bar{a},\bar{b}\ ) \in \mathbb{R} \qquad \forall\ \bar{a},\ \bar{b} \in E_0^2$

Nous avons créé de cette manière une forme bilinéaire sur l'espace vectoriel des vecteurs de E_0^2 : Une forme bilinéaire est une fonction qui associe un nombre réel à deux vecteurs quelconques (propriété (4)), cette fonction étant linéaire par rapport aux deux vecteurs (propriétés (2) et (3)).

Un autre exemple de forme bilinéaire rencontré dès la quatrième, est le produit scalaire de deux vecteurs de E_0^2.

De plus toute forme bilinéaire vérifiant la propriété (1) est appelée forme bilinéaire alternée.

Si on choisit une base dans E_0^2, l' aire d' un parallélogramme peut s' exprimer en termes de coordonnées. En effet,



Soit (e_1, e_2) une base dans E_0^2, l'aire $A^r(\bar e_1,\bar e_2)$ étant prise pour unité de surface

$$A^r(\bar e_1,\bar e_2) = 1$$

Soient deux vecteurs de E_0^2 : $\bar a = a_1\bar e_1 + a_2\bar e_2$

$\bar b = b_1\bar e_1 + b_2\bar e_2$

On a

$$\begin{aligned}
A^r(\bar a,\bar b) &= A^r(a_1\bar e_1 + a_2\bar e_2\ ,\ b_1\bar e_1 + b_2\bar e_2)\\
&= A^r(a_1\bar e_1\ ,\ b_1\bar e_1 + b_2\bar e_2) + A^r(a_2\bar e_2\ ,\ b_1\bar e_1 + b_2\bar e_2)\\
&= A^r(a_1\bar e_1\ ,\ b_1\bar e_1) + A^r(a_1\bar e_1\ ,\ b_2\bar e_2) +\\
&\quad A^r(a_2\bar e_2\ ,\ b_1\bar e_1) + A^r(a_2\bar e_2\ ,\ b_2\bar e_2)\\
&= a_1b_1\underbrace{A^r(\bar e_1,\bar e_1)}_{0} + a_1b_2\underbrace{A^r(\bar e_1,\bar e_2)}_{1} + a_2b_1\underbrace{A^r(\bar e_2,\bar e_1)}_{-1}\\
&\quad + a_2b_2\underbrace{A^r(\bar e_2,\bar e_2)}_{0}\\
&= \boxed{a_1b_2 - a_2b_1}
\end{aligned}$$

qui est par définition le déterminant associé aux vecteurs $\bar a$ et $\bar b$

On a donc

$$\boxed{A(\bar a,\bar b) = A(\bar e_1,\bar e_2)\,.\,|\det(\bar a,\bar b)|}$$

Considérons maintenant la transformation linéaire

$$t : E_0^2 \to E_0^2 : \begin{cases} t(\bar e_1) = a_{11}\bar e_1 + a_{21}\bar e_2 \\ t(\bar e_2) = a_{12}\bar e_1 + a_{22}\bar e_2 \end{cases}$$

La matrice associée à cette transformation linéaire est

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ dont le déterminant vaut } \det(T) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

ainsi que la transformation linéaire

$$h : E_0^2 \to E_0^2 : \begin{cases} h(\overline{e}_1) = b_{11}\overline{e}_1 + b_{21}\overline{e}_2 \\ h(\overline{e}_2) = b_{12}\overline{e}_1 + b_{22}\overline{e}_2 \end{cases}$$

La matrice associée à cette transformation linéaire est

$$H = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \text{ dont le déterminant vaut } \det(H) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}$$

La composée HoT est une transformation linéaire de matrice

$$T.H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}\, b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}\, b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \det(T.H), = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}\, b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}\, b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} + a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{21}b_{12} + a_{12}a_{22}b_{21}b_{22} - a_{11}a_{21}b_{12}b_{11} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{22}b_{11} - a_{12}a_{22}b_{22}b_{21}$$

$$= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{21}b_{12} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{22}b_{11}$$

D' autre part,

$$\det(T).\det(H) = (\ a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\ ).(\ b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}\ )$$

$$= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{21}b_{12} - a_{21}a_{12}b_{11}b_{22} + a_{21}a_{12}b_{21}b_{12}$$

On en déduit la propriété

Si A et B sont deux matrices carrées 2x2, on a

$$\boxed{\det(A.B) = \det(A).\det(B)}$$

La généralisation aux matrices nxn est vraie mais sa démonstration exige des méthodes plus sophistiquées.

De plus, si A est une matrice carrée inversible d' ordre n, on a

$$A.A^{-1} = I \quad \text{où I est la matrice unité d' ordre n}$$

$$\Leftrightarrow \det(A.A^{-1}) = \det(I)$$

$$\Leftrightarrow \det(A).\det(A^{-1}) = 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}}$$

Une dernière propriété des déterminants parmi tant d' autres :

Si t est une transformation linéaire du plan, de matrice T et si H est la matrice d' un changement de base, la matrice de la transformation linéaire dans la nouvelle base vaut :

$$T^* = H^{-1}.T.H$$

Le déterminant de T^* vaut donc

$$\det(T^*) = \det(H^{-1}.T.H)$$

$$\Leftrightarrow \det(T^*) = \det(H^{-1}).\det(T).\det(H)$$

$$\Leftrightarrow \det(T^*) = \det(H^{-1}).\det(H).\det(T)$$

$$\Leftrightarrow \det(T^*) = \det(T)$$

On en conclut

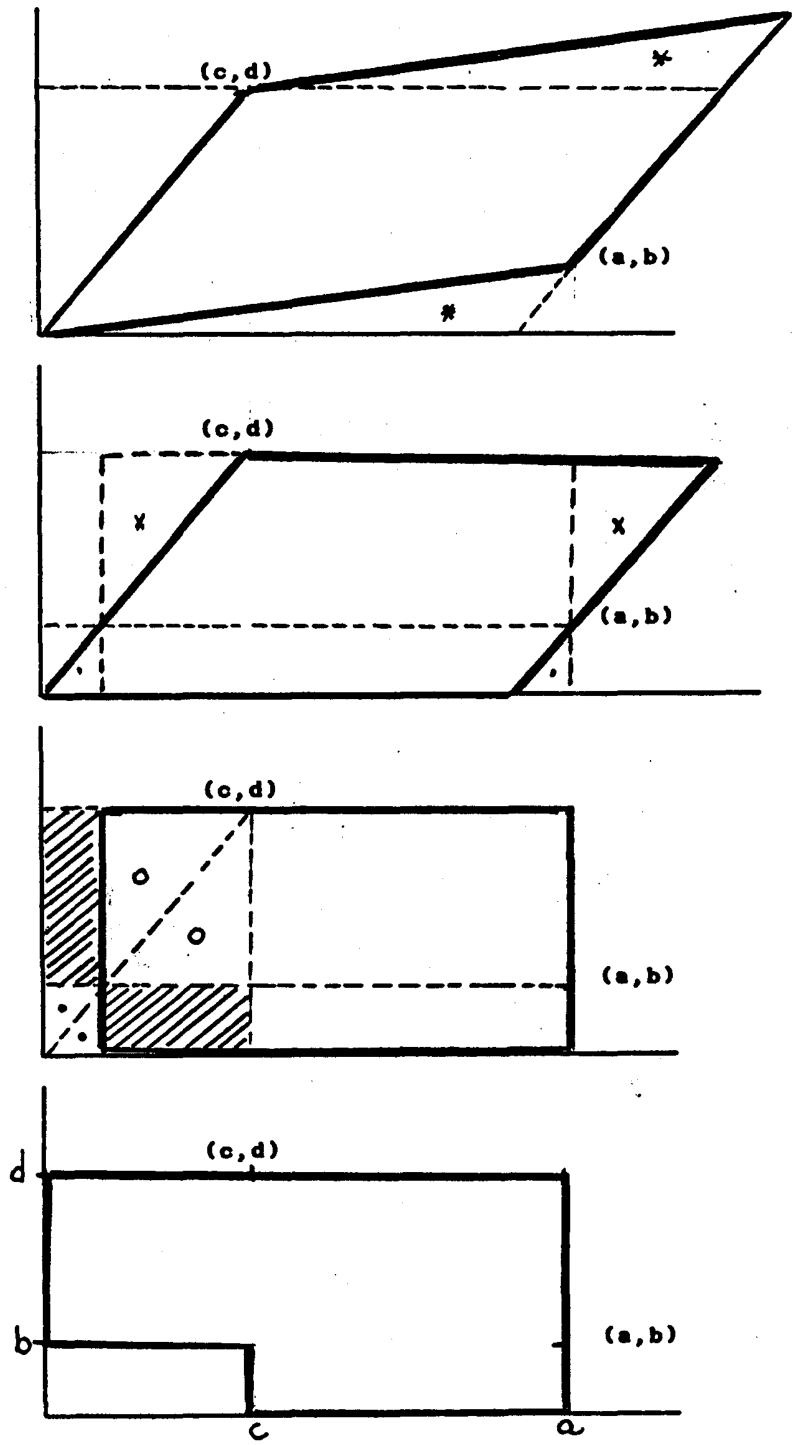
Si T est la matrice d' une transformation linéaire de E_0^2, son déterminant det(T) est un invariant par rapport aux diverses bases de E_0^2.

Ainsi, la signification profonde du déterminant est modifiée de manière radicale. Ce n' est pas vraiment une notion algébrique liée aux matrices mais bien un concept lié aux transformations linéaires. Si T est une transformation linéaire et V un volume (ou une aire), T(V)/V est le déterminant det(T) ou plutôt | det(T) |.

Pour terminer cette introduction respectons ... une minute de silence avec cette **démonstration sans parole**:

Démontrons que l' aire du parallélogramme déterminé par les vecteurs (a,b) et (c,d) vaut

la valeur absolue du déterminant $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = | ad - bc |$



— DETERMINANTS —

PLAN DE TRAVAIL

Définitions et rappels : $a, b, c, d, a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{R}$.

– une matrice carrée est un tableau de nombres qui représente~~nt~~ un opérateur.

– Un déterminant sera un tableau de nombres qui représente un scalaire.

– Addition de deux matrices A et B de mêmes dimensions :

$$A_{mxn} + B_{mxn} = C_{mxn} \text{ où } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, m\}, \; j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

– Multiplication d' une matrice par un réel :

$$r.A_{mxn} = C_{mxn} \text{ où } c_{ij} = r.a_{ij}, \quad r \in \mathbb{R}, \; i \in \{1, 2, \ldots, m\}, \; j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

– Multiplication de deux matrices :

$$A_{mxp} \cdot B_{pxn} = C_{mxn} \text{ où } c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}.b_{kj}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, m\}, \; j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

– Soit une matrice M :

$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, le déterminant associé à cette matrice sera

noté $\det M = M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

– Le déterminant 1x1 : $\det a = a$

– Le déterminant 2x2 : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - b.c \in \mathbb{R}$

– Le mineur de l' élément a_{ij} d' une matrice A, carrée nxn est le déterminant de la matrice obtenue en supprimant dans A la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. Le mineur de l' élément a_{ij} se notera A_{ij}.

Exemple : Le mineur de l' élément a_{12} dans la matrice ci- dessus vaut

$$A_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

– Le cofacteur de l' élément a_{ij} d'une matrice A, carrée nxn vaut

$$(-1)^{i+j} \cdot A_{ij}$$

– Théorème : La somme des produits des éléments d' une rangée (ligne ou colonne) d' une matrice carrée par leur cofacteur est une constante.

La constante obtenue est appelée déterminant de la matrice.

– Règle de Sarrus pour calculer les déterminants 3x3 :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

Exercice : Calculer
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

– Le déterminant d' une matrice carrée est égal au déterminant de la matrice transposée.

– Un déterminant change de signe si on permute deux rangées parallèles.

– Si un déterminant a deux rangées parallèles identiques, il vaut zéro.

– Pour multiplier un déterminant par un réel, on multiplie chaque élément d' une rangée du déterminant par ce réel.

– Si un déterminant a deux rangées parallèles proportionelles, il vaut zéro.

– Somme de deux déterminants :

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & a_{12}+b_2 & a_{13}+b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

– Un déterminant ne change pas de valeur quand on ajoute aux éléments d' une rangée la même combinaison linéaire des éléments de rangées parallèles.

– Le rang d' une matrice est l' ordre du plus grand déterminant non nul que l' on peut extraire de cette matrice. Le rang est en fait le nombre de lignes ou colonnes linéairement indépendantes.

– Si on multiplie les éléments d' une rangée d' un déterminant par les cofacteurs d' une rangée parallèle, le nouveau déterminant obtenu vaut zéro.

– Inverse d' une matrice

Exercices :

1. Calculer la valeur des déterminants suivants $(a, b, n \in \mathbb{R})$

a) $$\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ -b & a+b & a \\ 0 & a.b & a.b \end{vmatrix}$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & n & n(n+1) \\ 1 & n+1 & (n+1)(n+2) \\ 1 & n+2 & (n+2)(n+3) \end{vmatrix}$$

2. Démontrer que $(a, b, c \in \mathbb{R})$

a) $$\begin{vmatrix} 1 & \sin 2a & \cos 2a \\ 1 & \sin 2b & \cos 2b \\ 1 & \sin 2c & \cos 2c \end{vmatrix} = 4.\sin(a-c).\sin(c-b).\sin(b-a)$$

b) $$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a.(b-c).(c-d).(b-a)$$

3. Trouver $k \in \mathbb{R}$ pour que $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & k \\ 1 & 3 & -2 \\ k & -1 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

4. Calculer $(a, b, c \in \mathbb{R})$

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin^2 a & \sin^2 b & \cancel{\cos^2 b}\ \sin^2 c \\ \cos^2 a & \cos^2 b & \cos^2 c \end{vmatrix}$$

c) $$\begin{vmatrix} a - b - c & 2a & 2a \\ 2b & -a + b - c & 2b \\ 2c & 2c & -a - b + c \end{vmatrix}$$

5. Déterminer le rang des matrices suivantes $(m \in \mathbb{R})$

a) $$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \cos m \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \sin m \\ \sqrt{3} & \operatorname{tg} m \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} -m & m^2 \\ m^2 - 1 & -3m \\ m + 1 & m \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix} m & m + 2 \\ m + 1 & 3m \\ m - 1 & 2(m - 1) \end{pmatrix}$$

d) $$\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

6. Calculer si possible M^{-1}, si

$$M = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

7. A quelles conditions A est-elle inversible ? Quand ces conditions sont vérifiées, calculer A^{-1} :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

RESOLUTION DE SYSTEMES LINEAIRES CARRES PAR DETERMINANTS

On considère le système

$$\mathcal{S}\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad \text{où} \quad a_{ij} \text{ et } b_i \in \mathbb{R}$$

$$\text{ou} \quad \mathcal{S} : \quad A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\text{ou} \quad \mathcal{S} : \quad A.X = B \quad \text{avec } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

<u>Premier cas : Le rang de A vaut 3.</u>

<u>Théorème préliminaire</u> : <u>$A.M^t = (\det A).\ I$</u> où

$A = (a_{ij})$, la matrice citée ci-dessus.

M est la matrice A où on a remplacé chaque élément a_{ij} par son cofacteur noté A_{ij}.

I est la matrice identique d' ordre 3.

Démonstration:

$$A.M^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \det A & 0 & 0 \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix}$$

$$= \det A . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \det A . I$$

C.Q.F.D.

Considérons le système

$$
\begin{aligned}
& A.X = B \\
\Leftrightarrow\quad & A^{-1}.A.X = A^{-1}.B \\
\Leftrightarrow\quad & X = A^{-1}.B
\end{aligned}
$$

(A^{-1} existe car le rang de A vaut 3)

or $\quad A.M^t = (\det A).I$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow\quad & A^{-1}.A.M^t = (\det A).A^{-1}.I \\
\Leftrightarrow\quad & M^t = (\det A).A^{-1} \\
\Leftrightarrow\quad & A^{-1} = \frac{1}{\det A}.M^t
\end{aligned}
$$

$$
\Leftrightarrow\quad X = \frac{1}{\det A}.M^t.B
$$

$$
\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} . \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}
$$

$$
\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} . \begin{pmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32} \\ b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33} \end{pmatrix}
$$

$$
\Leftrightarrow\quad \begin{cases} X = \dfrac{D_x}{\det A} \\[2ex] Y = \dfrac{D_y}{\det A} \\[2ex] Z = \dfrac{D_z}{\det A} \end{cases}
$$

où $D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ qui est le déterminant de la matrice A où on a remplacé la première colonne par B

$D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$ qui est le déterminant de la matrice A où on a remplacé la deuxième colonne par B

$D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$ qui est le déterminant de la matrice A où on a remplacé la troisième colonne par B

Exemple :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \underset{l_3 - l_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$\det A \neq 0$, le rang de la matrice A vaut donc 3.

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{c_2 - c_1 \\ c_3 - c_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{c_3 - c_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{c_2 + c_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\text{solution : } \mathcal{S} : \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = -1 \end{cases}$$

Deuxième cas : Le rang de A vaut 2.

On a $\det A = 0$ et supposons $A_{13} \neq 0$

$$\mathcal{S} \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 & (1) \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 & (2) \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1).A_{13} + (2).A_{23} + (3).A_{33} \\ (2) \\ (3) \end{cases}$$

Ce système est équivalent à $\mathcal{S}$ car $A_{13} \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x.(a_{11}A_{13} + a_{21}A_{23} + a_{31}A_{33}) + y.(a_{12}A_{13} + a_{22}A_{23} + a_{32}A_{33}) \\ \quad + z.(a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}) \\ \quad = b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33} \\ (2) \\ (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x.0 + y.0 + z.0 = D_z \\ (2) \\ (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D_z = 0 \\ (2) \\ (3) \end{cases}$$

Soit $D_z \neq 0$ et dans ce cas, le système est impossible, la solution est vide.

Soit $D_z =\neq 0$ et dans ce cas, le système a une simple infinité de solutions

$$S : \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases}$$

<u>Troisième cas : Le rang de A vaut 1.</u>

On a $\det A = 0$ et $A_{ij} = 0$ ($i,j \in \{ 1, 2, 3 \}$)

Supposons $a_{11} \neq 0$

$$S \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 & (1) \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 & (2) \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) \\ (2).a_{11} - (1).a_{21} \\ (3).a_{11} - (1).a_{31} \end{cases}$$

Ce système est équivalent à $\mathcal{S}$ car $a_{11} \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) \\ y.(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}) + z.(a_{23}a_{11} - a_{13}a_{21}) = b_2a_{11} - b_1a_{21} \\ y.(a_{32}a_{11} - a_{12}a_{31}) + z.(a_{33}a_{11} - a_{13}a_{31}) = b_3a_{11} - b_1a_{31} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) \\ 0 = b_2a_{11} - b_1a_{21} \\ 0 = b_3a_{11} - b_1a_{31} \end{cases}$$

Si $b_2a_{11} - b_1a_{21} \neq 0$ ou $b_3a_{11} - b_1a_{31} \neq 0$, alors le système n' a pas de solution.

Si $b_2a_{11} - b_1a_{21} = 0$ et $b_3a_{11} - b_1a_{31} = 0$, alors le système a une double infinité de solutions : $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \\ z = f(x,y) \end{cases}$

Quatrième cas : Le rang de A vaut 0.

$$S\begin{cases} 0x + 0y + 0z = b_1 \\ 0x + 0y + 0z = b_2 \\ 0x + 0y + 0z = b_3 \end{cases}$$

Si $b_1 \neq 0$ ou $b_2 \neq 0$ ou $b_3 \neq 0$, alors le système n' a pas de solution.

Si $b_1 = 0$ et $b_2 = 0$ et $b_3 = 0$, alors le système a une triple infinité de solutions $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$

Exemple :

$$S : \begin{cases} (a^2 + 2)x + 3ay + 3az = a + 4 \\ 3x + (a^2 + 2a)y + 3az = 5 \\ (a^2 + a + 4)x + (a^2 + 5a)y + (a^2 + 5a)z = 3a + 7 \end{cases} \quad \text{où } a \in \mathbb{R}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a^2 + 2 & 3a & 3a \\ 3 & a^2 + 2a & 3a \\ a^2 + a + 4 & a^2 + 5a & a^2 + 5a \end{vmatrix}$$

$$= _{c_3 - c_2} \begin{vmatrix} a^2 + 2 & 3a & 0 \\ 3 & a^2 + 2a & -a^2 + a \\ a^2 + a + 4 & a^2 + 5a & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a.(a^2 - a).\begin{vmatrix} a^2 + 2 & 3 \\ a^2 + a + 4 & a + 5 \end{vmatrix}$$

$$= a^2.(a - 1).(a^3 + 2a^2 - a - 2)$$

$$= a^2.(a - 1)^2.(a + 2).(a + 1)$$

1. Det A $\neq$ 0 : $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq -2$, $a \neq -1$

$$D_x = \begin{vmatrix} a + 4 & 3a & 3a \\ 5 & a^2 + 2a & 3a \\ 3a + 7 & a^2 + 5a & a^2 + 5a \end{vmatrix}$$

$$= _{c_3 - c_2} \begin{vmatrix} a + 4 & 3a & 0 \\ 5 & a^2 + 2a & a - a^2 \\ 3a + 7 & a^2 + 5a & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a^2.(a-1).\begin{vmatrix} a+4 & 3 \\ 3a+7 & a+5 \end{vmatrix}$$

$$= a^2.(a-1).(a^2-1) = a^2.(a-1)^2.(a+1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a^2+2 & a+4 & 3a \\ 3 & 5 & 3a \\ a^2+a+4 & 3a+7 & a^2+5a \end{vmatrix}$$

$$= l_1 - l_2 \quad \begin{vmatrix} a^2-1 & a-1 & 0 \\ 3 & 5 & 3a \\ a^2+a+4 & 3a+7 & a^2+5a \end{vmatrix}$$

$$= a.(a-1).\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \\ a^2+a+4 & 3a+7 & a+5 \end{vmatrix}$$

$$= c_1 - c_3 \qquad a.(a-1).\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ a^2-1 & 3a+7 & a+5 \end{vmatrix}$$

$$= a.(a-1).(a+1).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ a-1 & 3a+7 & a+5 \end{vmatrix}$$

$$= c_2 - c_1 \qquad a.(a-1).(a+1).\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ a-1 & 2a+8 & a+5 \end{vmatrix}$$

$$= -a(a-1)^2(a+1)$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a^2+2 & 3a & a+4 \\ 3 & a^2+2a & 5 \\ a^2+a+4 & a^2+5a & 3a+7 \end{vmatrix}$$

$$= l_1 - l_2 \qquad a.\begin{vmatrix} a^2-1 & 1-a & a-1 \\ 3 & a+2 & 5 \\ a^2+a+4 & a+5 & 3a+7 \end{vmatrix}$$

$$= c_2 + c_3 \quad a.(a-1)\begin{vmatrix} a+1 & 0 & 1 \\ 3 & a+7 & 5 \\ a^2+a+4 & 4a+12 & 3a+7 \end{vmatrix}$$

$$= \ldots = 2a.(a-1).(a+1).(a^2+a+2)$$

$$\text{solution :}\begin{cases} x = \dfrac{(a-1)^2a^2(a+1)}{a^2(a-1)^2(a+2)(a+1)} = \dfrac{1}{a+2} \\[2ex] y = \dfrac{-a(a-1)^2(a+1)}{a^2(a-1)^2(a+2)(a+1)} = \dfrac{-1}{a(a+2)} \\[2ex] z = \dfrac{2a(a-1)(a+1)(a^2+a+2)}{a^2(a-1)^2(a+2)(a+1)} = \dfrac{2(a^2+a+2)}{a(a-1)(a+2)} \end{cases}$$

2. Det A = 0 : a = 0

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{A est de rang 1}$$

$$S : \begin{cases} 2x = 4 \\ 3x = 5 \\ 4x = 7 \end{cases} \qquad \text{La solution est vide}$$

3. Det A = 0 : a = 1

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix} \qquad \text{A est de rang 1}$$

$$S : \begin{cases} 3x + 3y + 3z = 5 \\ 3x + 3y + 3z = 5 \\ 6x + 6y + 6z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \\ z = -x - y + \frac{5}{3} \end{cases}$$

4. Det A = 0 : a = -1

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 4 & -4 & -4 \end{vmatrix} \qquad \text{A est de rang 2}$$

$$S : \begin{cases} 3x - 3y - 3z = 3 \\ 3x - 1y - 3z = 5 \\ 4x - 4y - 4z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x \in \mathbb{R} \\ z = x - 2 \end{cases}$$

5. Det A = 0 : a = -2

$$\det A = \begin{vmatrix} 6 & -6 & -6 \\ 3 & -0 & -6 \\ 6 & -6 & -6 \end{vmatrix} \qquad \text{A est de rang 2}$$

$$\mathcal{S} : \begin{cases} 6x - 6y - 6z = 2 \\ 3x \qquad\quad - 6z = 5 \\ 6x - 6y - 6z = 1 \end{cases}$$

Le système n' a pas de solution.

<u>Exercices</u> : Résoudre avec et/ou sans l' aide de déterminants

1. $$\begin{cases} x - 2y + z - u + 2v = 1 \\ 3x + y + 2u = 0 \\ -x + 2z - v = 0 \\ 5x - 3y + 2z + 4v = 2 \\ x + 5y - 2z + 4u - 4v = -2 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} ax + ay + z - u = 1 \\ x + y + az - u = 1 \\ -x - y + z + au = 1 \end{cases} \quad \text{où } a \in \mathbb{R}$$

3. $$\begin{cases} mx - 3y = 1 \\ x + (m + 4)y = 1 \\ (m + 1)(x + y) = m \end{cases} \quad \text{où } m \in \mathbb{R}$$

4. $$\begin{cases} ax + y + bz = 1 \\ x + ay + bz = 1 \\ x + y + abz = b \end{cases} \quad \text{où } a, b \in \mathbb{R}$$

5. $$\begin{cases} ax + y + 2z = a \\ 2x + ay + z = 0 \\ x + 2y + az = -a \end{cases} \quad \text{où } a \in \mathbb{R}$$

6. $$\begin{cases} 4x + (m + 2)y - z = 1 \\ (m - 3)x + 2y - (m - 1)z = 0 \\ 4x + 3y + (m - 2)z = 1 \end{cases} \quad \text{où } m \in \mathbb{R}$$

7. $$\begin{cases} x + y + z + v + t = 0 \\ x - y - z + 2v = 4 \\ y - z - v = 4 \\ 3x + 2y - 4v - 3t = 6 \\ 2z + 3v - 6t = 3 \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} mx + y - z = 1 \\ x + my - z = 1 \\ -x + y + mz = 1 \end{cases} \quad \text{où } m \in \mathbb{R}$$

9. $$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases} \quad \text{où } m \in \mathbb{R}$$

10. $$\begin{cases} x + (m - 1)y + (2m - 3)z = 1 \\ mx + 2(m - 1)y + 2z = 2 \\ (m + 1)x + 3(m - 1)y + (m^2 - 1)z = 3 \end{cases} \quad \text{où } m \in \mathbb{R}$$

11. $$\begin{cases} 2x - 3y + 6z + 4u - v = -8 \\ x + 3z - 4u + v = 5 \\ 3x + y - z + u + v = 4 \\ x + y - z - u - v = 4 \\ x - y + z + u + v = -2 \end{cases}$$

12. $$\begin{cases} mx + (m + 2)y + 2z = 0 \\ (m + 2)y + (m + 2)z = 0 \\ 2x + y + (m - 3)z = 2 \end{cases} \quad \text{où } m \in \mathbb{R}$$

13. $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ x - my + 2z = 1 \end{cases}$ où $m \in \mathbb{R}$

14. $\begin{pmatrix} a-1 & -3 & 0 \\ 2a & a-1 & 3a-1 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2a \\ a-1 \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$

15. $\begin{cases} ax + by = 1 \\ ax + y = b \\ x + by = a \end{cases}$ où $a, b \in \mathbb{R}$

16. $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + z + u = -2 \\ x + z + u = 6 \\ x + y + u = 2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x + y - z + t = 2 \\ x - y + z - 2t = 3 \\ 2x + y - z - t = 1 \end{cases}$

18. $\begin{cases} ax + y + z = a^2 \\ x + ay + z = 3a \\ x + y + az = 2 \end{cases}$ où $a \in \mathbb{R}$

19. $\begin{cases} bx + cy = a \\ cx + ay = b \\ ax + by = c \end{cases}$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$

20. Déterminer A pour que

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} . A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

21. On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}_0$

On veut déterminer la matrice $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$ non nulle telle

que $A.X + X.A = 0$ où $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice nulle.

22. Si $A = \begin{pmatrix} \frac{z-y}{2} & \frac{-x-y}{2} \\ 0 & z-2x \end{pmatrix}$, déterminer x, y et $z \in \mathbb{R}$ pour que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

23. $\begin{cases} x - ay + a^2z = a^3 \\ x - by + b^2z = b^3 \\ x - cy + c^2z = c^3 \end{cases}$ où a, b, c $\in \mathbb{R}$

24. $\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a^2x + b^2y + c^2z = 0 \\ a^3x + b^3y + c^3z = (a - b)(b - c)(c - a) \end{cases}$ où a, b, c $\in \mathbb{R}$

25. $\begin{cases} x + ay + a^3z = 0 \\ x + by + b^3z = 0 \\ x + cy + c^3z = a + b + c \end{cases}$ où a, b, c $\in \mathbb{R}$

26. $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = c \\ x + y + az = b \end{cases}$ où a, b, c $\in \mathbb{R}$

27. $\begin{cases} ax + by + cz = 1 \\ bx + ay + cz = 0 \\ cx + ay + bz = -1 \end{cases}$ où a, b, c $\in \mathbb{R}$

28. $\begin{cases} x - 2y + az = 1 \\ -x + y - bz = -1 \\ y + z = a \end{cases}$ où a, b $\in \mathbb{R}$

29. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$ où a, b, c $\in \mathbb{R}$

a) Sous quelles conditions la matrice A est-elle inversible ?

b) Dans les cas où A^{-1} existe, calculer A^{-1}

c) calculer $\det(A^{-1})$ et vérifier que $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

30. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6} \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{7}{12} \\ \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

31. Si x et y sont des variables, a, b, ω des constantes réelles et t un paramètre réel, éliminer le paramètre t.

a) $\begin{cases} x = a.\cos\omega t \\ y = a.\sin\omega t \end{cases}$

b) $\begin{cases} x.\cos t + y.\sin t = a \\ y.\cos t - x.\sin t = b \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = a.\sec t \\ y = b.\operatorname{tg} t \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = a.\sin^2 t \\ y = a.\sin^2 t.\operatorname{tg} t \end{cases}$

e) $\begin{cases} \cos t + \sin t = x \\ \cos 2t = y \end{cases}$

<u>Cas particulier</u> :<u>LES SYSTEMES LINEAIRES CARRES HOMOGENES</u>

Soit le système homogène

$$\mathcal{S} : \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Ce système admet toujours la solution triviale $x = y = z = 0$. Il s' en suit que

Si $\det A \neq 0$, la seule solution de $\mathcal{S}$ est la solution triviale

$$x = y = z = 0$$

Pour qu' il existe une <u>autre solution que la solution triviale</u>, il faut que

$$\det A = 0$$

et dans ce cas, le système admet une infinité de solutions.

<u>Exemple</u> :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} 2x + 2y - z = 0 \\ 4x + 5y - 2z = 0 \\ 6x - 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \\ 6 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Le système admet donc d' autres solutions que la solution triviale :

$$\mathcal{S} \Leftrightarrow \begin{array}{l} (1) \\ (2)-2.(1) \\ (3)-3.(1) \end{array} \begin{cases} 2x + 2y - z = 0 \\ \quad y = 0 \\ \quad y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 2x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 0 \\ z = 2x \end{cases}$$

Exercices :

1. Résoudre

$$\begin{cases} x + (a-1)y + z = 0 \\ x + y + (a-1)z = 0 \\ (a-2)x - y + 4z = 0 \end{cases} \qquad \text{où } a \in \mathbb{R}$$

2. Les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sont-ils linéairement indépendants ?

a) $\vec{a}\,(2, 3, 4)$
$\vec{b}\,(5, 0, -1)$
$\vec{c}\,(0, 2, 1)$

b) $\vec{a}\,(3, 2, 1)$
$\vec{b}\,(6, 5, 4)$
$\vec{c}\,(4, 5, 6)$

3. Soit le système $2.A.X = \lambda.X$ où

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 5 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles le système admet une solution différente de la solution triviale $x = y = z = 0$ et déterminer pour chacune de ces valeurs l' ensemble des solutions du système.

4. Mêmes questions qu' à la question 3 pour le système :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

– SIMPLIFIER LES TRANSFORMATIONS LINEAIRES – Les vecteurs propres –

La matrice d' une transformation linéaire dépend de la base dans laquelle elle est traitée. L' écriture de cette matrice sera simple si les axes sont conservés par cette transformation linéaire (pourquoi ?). On va donc rechercher les directions invariantes pour une transformation linéaire c' est à dire les droites qui se transforment en elles-mêmes par cette transformation linéaire.

Définitions :

Une direction propre d' une transformation linéaire est une direction invariante par cette transformation linéaire.

Un vecteur propre pour une transformation linéaire t est un vecteur $\vec{v}$ tel que

$$t(\vec{v}) = \lambda.\vec{v} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

λ est appelée valeur propre du vecteur $\vec{v}$.

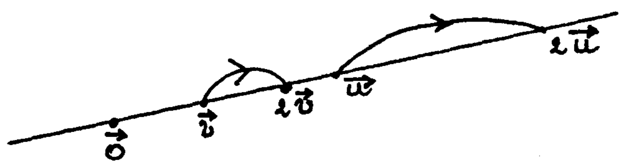
Propriété :

Si $\vec{v}$ est un vecteur propre de valeur propre λ pour une transformation linéaire t, alors tout multiple de $\vec{v}$ est aussi un vecteur propre de cette transformation linéaire de même valeur propre λ.

A chaque direction propre d' une transformation linéaire est donc associée une valeur propre.

En effet : Si $t(\vec{v}) = \lambda.\vec{v}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

alors $t(a\vec{v}) = a.t(\vec{v}) = a.\lambda.\vec{v} = \lambda.(a.\vec{v})$ pour tout $a \in \mathbb{R}$



Exemple :

Dans E^3, on donne la transformation linéaire t :

$$t : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad : \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On se propose de rechercher les valeurs propres, les directions propres de cette transformation linéaire et d' effectuer ensuite un changement de base pour simplifier l' écriture de cette transformation linéaire

On recherche les vecteurs $\vec{v}$ qui sont tels que

$$t(\vec{v}) = \lambda.\vec{v} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ -2 & -4 & -1-\lambda \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Ce système homogène a une solution autre que la solution triviale x = y = z = 0

$$\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ -2 & -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \; l_1+l_2+l_3 \qquad (2-\lambda). \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ -2 & -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \; \begin{matrix} c_1-c_3 \\ c_2-c_3 \end{matrix} \qquad (2-\lambda). \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ \lambda-1 & \lambda+3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \; (2-\lambda).(\lambda-1).(\lambda-3) = 0$$

$\Leftrightarrow \lambda = 2$ ou $\lambda = 1$ ou $\lambda = 3$

Dans ce cas-ci, on a 3 valeurs propres auxquelles correspondent 3 directions propres. Dans E^3, le système (1) correspondant à tout problème du même type,nous livrera toujours une équation du troisième degré qui aura 3, 2, 1 ou 0 solutions.

Recherche des <u>vecteurs propres</u> de <u>valeur propre 2</u> :

$$(1) : \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ -2x - 4y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = 0 \\ x = -2y \end{cases}$$

Direction propre : $D_1 : \begin{cases} z = 0 \\ x = -2y \end{cases}$

Vecteurs propres : $(-2\alpha , \alpha , 0)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

Recherche des <u>vecteurs propres</u> de <u>valeur propre 1</u> :

$$(1) : \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ -2x - 4y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = -z \end{cases}$$

Direction propre : $D_2 : \begin{cases} y = 0 \\ x = -z \end{cases}$

Vecteurs propres : $(\alpha , 0 , -\alpha)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

Recherche des <u>vecteurs propres</u> de <u>valeur propre 3</u> :

$$(1) : \begin{cases} 2y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ -2x - 4y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$$

Direction propre : $D_3 : \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$

Vecteurs propres : $(0 , \alpha , -\alpha)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

On va changer de base de telle manière à ce que les nouveaux vecteurs unités soient des vecteurs propres :

Nouvelle base : $\vec{e}_1$ (−2, 1, 0)
$\vec{e}_2$ (1, 0, −1)
$\vec{e}_3$ (0, 1, −1)

Matrice de changement de base :

$$M : \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M^t : \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \quad \det M = -1, \text{ donc}$$

$$M^{-1} : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice de la transformation linéaire dans la nouvelle base vaut :

$$L^* = M^{-1}.L.M$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Exercices</u> :

1. Simplifier par changement de base, les transformations linéaires suivantes :

$$t_1 : \begin{cases} x' = -\frac{3}{2}x - 2y \\ y' = -\frac{1}{4}x - y \end{cases}$$

$$t_2 : \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 8x + 4y \end{cases}$$

$$t_3 : \begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = x + y \\ z' = -z \end{cases}$$

2. Trouver les vecteurs propres des transformations linéaires suivantes :

$$A_t \ : \ \begin{pmatrix} 1 + \frac{t^2}{2} & -\frac{t^2}{2} & t \\ \frac{t^2}{2} & 1 - \frac{t^2}{2} & t \\ t & -t & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}_0$$

Calculer ensuite $(A_t - I)^3$

Vérifier que $A_t^{-1} = A_{-t}$

— PRODUIT VECTORIEL DE DEUX VECTEURS DE E^3 —

On travaillera dans cette section dans l' espace E^3, muni d' un repère orthonormé d' axes X, Y, Z portant respectivement les vecteurs unitaires $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

Définition :

Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs de E^3 : $\vec{a}\,(x_1, y_1, z_1)$
$\vec{b}\,(x_2, y_2, z_2)$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$= (y_1z_2 - y_2z_1).\vec{e}_1 + (x_2z_1 - x_1z_2).\vec{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{e}_3$$

Propriétés : (à savoir justifier)

1. $\vec{a} \wedge \vec{b} \in V$ (ensemble des vecteurs d' origine o et ayant pour extrémité un point de E^3), contrairement à $\vec{a} \,.\, \vec{b} \in \mathbb{R}$
2. $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} = \vec{0}$ ou $\vec{b} = \vec{0}$ ou $\vec{a} = k.\vec{b}$, $k \in \mathbb{R}$
(vecteurs parallèles)
3. $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\,\vec{b} \wedge \vec{a}$
4. $\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$
5. Pour tout $k \in \mathbb{R}$: $k.(\vec{a} \wedge \vec{b}) = (k\vec{a}) \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge (k\vec{b})$
6. $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est un vecteur perpendiculaire au plan des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

   En effet :

   a) $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \perp \vec{a} \iff (\vec{a} \wedge \vec{b}).\vec{a} = 0$

   $\iff (y_1z_2 - y_2z_1).x_1 + (x_2z_1 - x_1z_2).y_1 + (x_1y_2 - x_2y_1)z_1 = 0$

   $\iff 0 = 0$

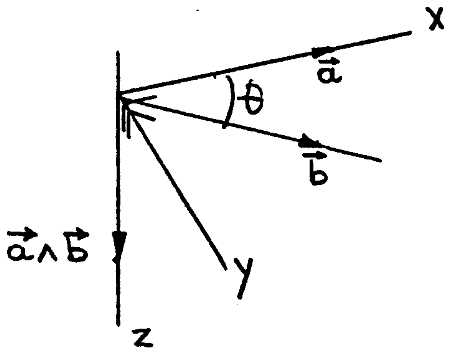
   b) De même on a $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \perp \vec{b}$
7. $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} \neq \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$

   En effet, un contre-exemple suffit :

   Soients $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tels que
   $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \perp \vec{c}$ et $\vec{b}$ non perpendiculaire à $\vec{c}$
   On a $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} \neq \vec{0}$
   et $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{0}$

8. $(\vec{a} \wedge \vec{b}).\vec{c} = (\vec{b} \wedge \vec{c}).\vec{a} = (\vec{c} \wedge \vec{a}).\vec{b}$
etc...etc...

Norme de $\vec{a} \wedge \vec{b}$:



On choisit un repère de E^3 de telle manière à ce que

$\vec{a} = k.\vec{e}_1 \quad k \in \mathbb{R}_0$

$\vec{a} \wedge \vec{b} = m.\vec{e}_3 \quad m \in \mathbb{R}_0$

On a alors

$\vec{a}$ (a, 0, 0) où $a = |\vec{a}|$

$\vec{b}$ ($b.\cos\theta$, $b.\sin\theta$, 0) où $b = |\vec{b}|$

$\vec{a} \wedge \vec{b}$ (0, 0 , $a.b.\sin\theta$)

Il s'en suit que

$$\boxed{|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}| . |\vec{b}| . \sin\theta}$$

qui est l' aire du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Orientation de $\vec{a} \wedge \vec{b}$:

La direction de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est la direction perpendiculaire au plan $(\vec{a},\vec{b})$.

Le sens de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est conventionnel . Nous adopterons la convention des physiciens électriciens qui est la convention dextrogyre : Si on " visse " de $\vec{a}$ vers $\vec{b}$, on s' enroule autour de $\vec{a} \wedge \vec{b}$. (Les mécaniciens adoptent la convention contraire appelée levogyre)

Exercices :

1. On donne les points
   a (1, 3, 2), b (0, -1, 1), c (1 ,0 ,1), d (2 ,1 ,k)
   Trouver k pour que $(\overrightarrow{ac} \wedge \overrightarrow{bc})$ soit perpendiculaire à $\overrightarrow{dc}$.
2. On donne les points vecteurs
   $\vec{a}$ (4, 5, 6) et $\vec{b}$ (0, 1, 2)
   Déterminer l'équation de la droite qui passe par le point (2, 1, 0) et qui est perpendiculaire au plan $(\vec{a} , \vec{b})$

3. On donne les points vecteurs
   $\vec{a}$ (4, 5, 2) et $\vec{b}$ (2, -1, 4)
   Quel est l' angle entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$?
4. On donne les plans $\alpha : x - y + z = 0$
   $\beta : x + 3y + z = 2$
   Trouver le vecteur directeur de $\alpha \cap \beta$.
5. On donne les points
   a(4, 5, 1), b(6, 6, 0), c(2, 3, 1), p(0, 0, 0)
   Trouver l' équation de la perpendiculaire abaissée de p sur le plan (abc).
6. On donne le plan $\alpha : 3x - y + 2z = 6$
   et la droite A : $\frac{x - 2}{3} = y = 1 - z$
   Déterminer l' équation de la droite de α qui est perpendiculaire à A
7. On donne les droites

$$A : \begin{cases} 6x - 3y = 5 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$B : \begin{cases} 2x - 2y + z = 1 \\ x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

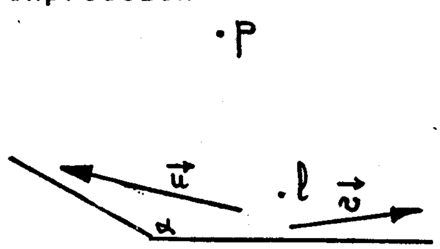
   Déterminer l' équation de la droite qui est perpendiculaire à A et à B.

Distance entre deux droites gauches A et B

a) Distance d' un point $p\ (x_1, y_1, z_1)$ à un plan $\alpha : ax + by + cz + d = 0$

Nous savons que la distance du point p au plan α est donnée par l' expression

$$d = \frac{|\ ax_1 + by_1 + cz_1 + d\ |}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \qquad (1)$$



Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs de α et si $l(x_2, y_2, z_2)$ est un point de α, on a

$$\vec{u} \wedge \vec{v} : (ka, kb, kc) \quad \text{où } k \in \mathbb{R} \qquad (2)$$

$$|\ \vec{u} \wedge \vec{v}\ | = |k| . \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \qquad (2)$$

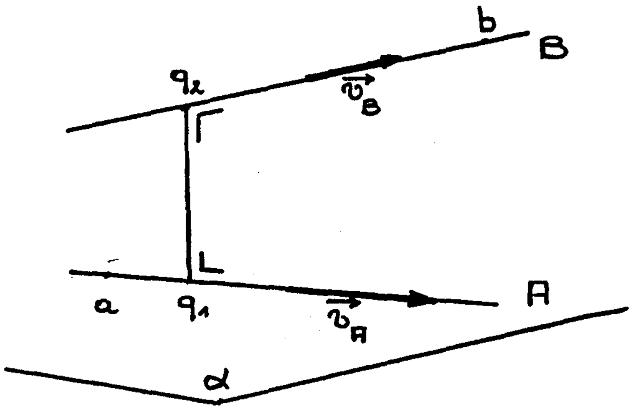
On a $(\vec{u} \wedge \vec{v}).\overrightarrow{1p} = ka(x_1 - x_2) + kb(y_1 - y_2) + kc(z_1 - z_2)$
$= k(ax_1 + by_1 + cz_1 - ax_2 - by_2 - cz_2)$
$= k(ax_1 + by_1 + cz_1 + d)$ (3)

De (1), (2), (3), il résulte que

$$d = \frac{|(\vec{u} \wedge \vec{v}).\overrightarrow{1p}|}{|\vec{u} \wedge \vec{v}|}$$

b) Distance entre deux droites gauches A et B

Soient α le plan qui contient A et qui est parallèle à B,



$\vec{v}_A$ un vecteur directeur de A,
$\vec{v}_B$ un vecteur directeur de B,
a un point quelconque de A et
b un point quelconque de B.
La distance entre A et B se mesure sur la droite D qui est la perpendiculaire commune à A et B.

$$d(A,B) = |q_1q_2|$$

où $q_1 = A \cap D$ et $q_2 = B \cap D$

Comme B est parallèle à α, la distance $|q_1q_2|$ qui est égale a la distance du point q_2 au plan α est aussi égale à la distance d'un point quelconque b de B au plan α :

$$d(A,B) = |q_1q_2| = d(q_2,\alpha) = d(b,\alpha)$$

Appliquons le résultat du point (a) ci-dessus, on obtient

$$d(A,B) = \frac{|(\vec{v}_A \wedge \vec{v}_B) \cdot \overrightarrow{ab}|}{|\vec{v}_A \wedge \vec{v}_B|}$$

étant donné que $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$ sont deux vecteurs directeurs de α et que a est un point de A et donc un point de α.

Exemple : Trouver la distance entre les deux droites gauches

$$A : \begin{cases} 2x - 2y + z = 1 \\ x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$B : \begin{cases} 6x - 3y = 5 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\vec{v}_A = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_B = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 6 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$\vec{v}_A\ (1, 5, 8)$ et $\vec{v}_B\ (-3, -6, 9)$ ou $(1, 2, -3)$

$a\ \left(\frac{2}{5}, 0, \frac{1}{5}\right) \in A$

$b\left(0, -\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right) \in B$

$\overrightarrow{ab}\ \left(-\frac{2}{5}, -\frac{5}{3}, \frac{37}{15}\right)$

$$\vec{v}_A \wedge \vec{v}_B = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \quad \text{ou } \vec{v}_A \wedge \vec{v}_B\ (-31, 11, -3)$$

$$d(A,B) = \frac{\left| \frac{62}{5} - \frac{55}{3} - \frac{37}{5} \right|}{\sqrt{31^2 + 11^2 + 3^2}} = \frac{40}{3 \cdot \sqrt{1091}} \simeq 0.4$$