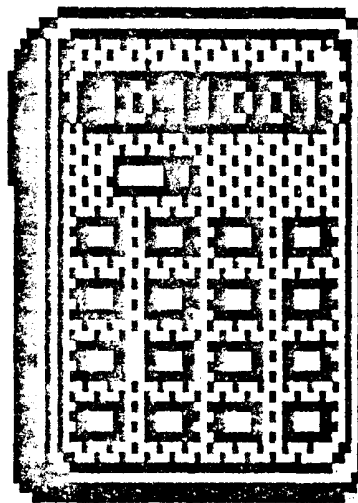


13

**Estimation
des
incertitudes**



I N T R O D U C T I O N

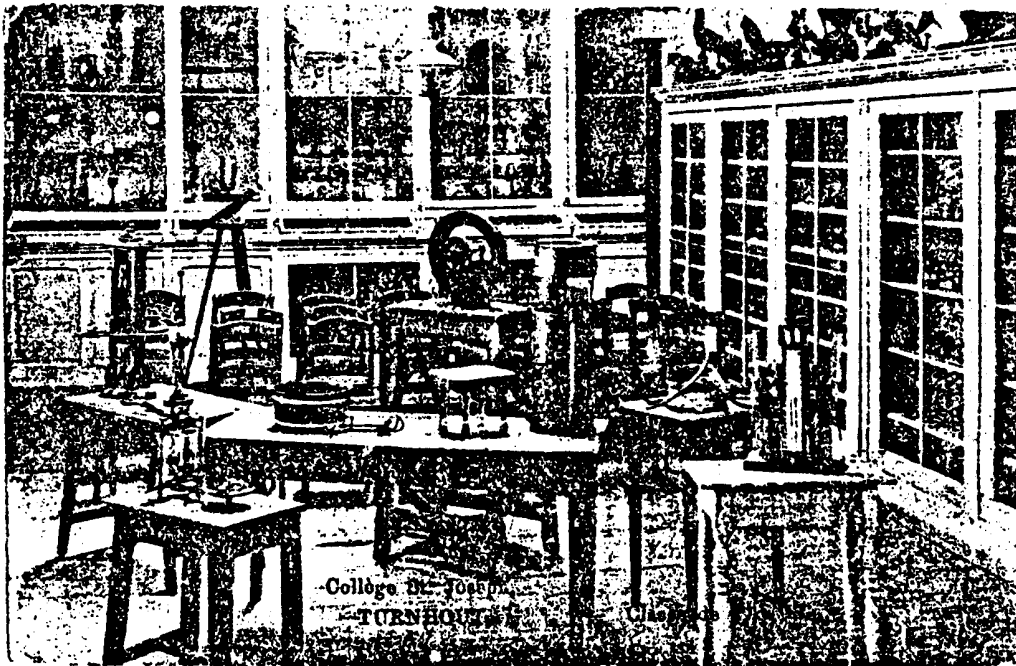
Il apparait que le premier pas dans le processus de la connaissance, c'est le contact avec le monde exterieur: le degre des sensations.

Le second, c'est la synthese des donnees fournies par les sensations, leur mise en ordre et leur elaboration: le degre des concepts, des jugements, des deductions,...

Si, etant arrive a une theorie juste, on se contente d'en faire un sujet de conversation pour la laisser ensuite de cote, sans la mettre en pratique, cette theorie, si belle qu'elle puisse etre, reste sans interet. -

La connaissance commence avec la pratique; quand on a acquis par la pratique des connaissances theoriques, on doit encore retourner a la pratique.

Mao Tse-Toung
"De la pratique"



ESTIMATION DES ERREURS EXPERIMENTALES

1. Introduction

Bien que la physique fasse partie du groupe des "sciences exactes", les instruments de mesure utilisés pour vérifier ses lois ne sont eux jamais exacts.

Les valeurs mesurées sont "approchées": suivant la précision de l'instrument de mesure et celle de l'expérimentateur, la valeur mesurée sera plus ou moins proche de la valeur exacte. Rien ne permet d'affirmer que la valeur mesurée est égale à la valeur exacte.

Tout le principe de l'estimation des erreurs expérimentales consiste à estimer dans quelles limites se trouve la valeur exacte d'une grandeur mesurée. Ces limites définissent un intervalle qui est l'intervalle d'incertitude.

On notera qu'il n'est pas impératif de commettre la plus petite erreur possible, mais il faut que l'erreur de mesure soit suffisamment petite pour qu'elle ne puisse affecter les conclusions tirées de l'expérience.

Les erreurs de mesure peuvent être de trois types:

- les ERREURS GROSSIERES, dont l'origine est la méconnaissance, l'incompréhension ou la malhabileté de l'expérimentateur. Celui-ci a seul la responsabilité d'éviter ce type d'erreurs.

- les ERREURS SYSTEMATIQUES, dues aux instruments mal construits, mal utilisés ou mal stabilisés (non-repetabilité des mesures). Ces erreurs peuvent aussi être provoquées par une mauvaise méthode de travail (non remise à zéro du chronomètre, par exemple).

- les ERREURS FORTUITES, produites par l'imperfection des sens de l'expérimentateur ou par l'imperfection des instruments de mesure.

L'expérimentateur a la possibilité d'agir sur les deux derniers types d'erreurs, soit en modifiant sa méthode de travail, soit en utilisant des instruments plus précis.

2. Definitions de l'erreur et de l'incertitude

Soit G une grandeur physique mesurable et x' sa valeur exacte. L'erreur commise en adoptant la valeur x pour mesure de G est donnée par

$$e = |x - x'|$$

Cette erreur est l'erreur absolue commise sur la mesure et est impossible à connaître. En effet, si on la connaissait, la valeur exacte serait connue et le problème des erreurs n'existerait pas !

La seule chose que l'on puisse faire est essayer de borner cette erreur absolue en définissant un intervalle centre sur e . Les bornes supérieure et inférieure de cet intervalle sont, en valeurs absolues, égales à l'incertitude absolue de la mesure de G , on a

$$- I(G) \leq e \leq + I(G)$$

On notera que l'incertitude absolue doit toujours s'exprimer dans les mêmes unités que celles de la mesure de la grandeur.

La suite de ce chapitre sera consacré aux méthodes d'estimation et de calcul de cette incertitude absolue.

Il est utile de comparer l'incertitude absolue à la valeur mesurée, afin de connaître l'importance de l'erreur commise. Il est, en effet, tout à fait différent de commettre une erreur de 0.01m sur une longueur de 1.00m ou la même erreur sur une longueur de 10.00m.

En fait, il nous faut un " indice de précision " de la mesure. Cet indice est obtenu en divisant l'incertitude absolue par la valeur mesurée: on définit ainsi l'incertitude relative, exprimée le plus souvent en % . Donc

$$I(G) = \frac{I(G)}{\text{mesure de } G} \cdot 100 \%$$

Il doit être évident que plus l'incertitude relative est faible, plus la précision de la mesure est grande.

3. Estimation des incertitudes

On distingue deux types de mesures et le calcul de l'incertitude est different selon le type de mesure rencontree. Il s'agit de :

- MESURES DIRECTES , dans lesquelles la grandeur a mesurer est comparee directement a l'unite de mesure au moyen d'un instrument de mesure appropriee. C'est le cas des mesures de longueur, de masse, de temps,...

- MESURES INDIRECTES , dans lesquelles la mesure de la grandeur est deduite par calculs de deux ou de plusieurs mesures directes. C'est le cas des mesures de poids, de resistivite electrique, ...

3.1 Estimation des incertitudes sur les mesures directes

La meilleure maniere de mesurer une grandeur et d'evaluer l'ordre de grandeur de son incertitude consiste a repeter plusieurs fois l'experience. Encore faut-il pouvoir le faire !

En pratique, on rencontrera trois types de mesures :

- les mesures repetables;
- les mesures uniques faites avec un instrument gradue;
- les mesures uniques faites avec un instrument non gradue.

Examinons chacun de ces cas.

(a) Mesures repetables

Si la mesure est repetable, il faut faire plusieurs fois la mesure. Cette repetition permet d'eliminer certains resultats trop differents des autres et de prendre comme resultat le plus probable, la moyenne des mesures conservees. Ainsi, si une grandeur mesuree n fois a fournit l'ensemble de resultats x₁, x₂, x₃, x₄, ..., x_n, la valeur la plus probable sera la MOYENNE des valeurs mesurees, soit

$$x_m = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

La valeur exacte x de la mesure a une grande probabilite de se trouver entre la plus petite et la plus grande des mesures, a condition d'avoir elimine les mesures manifestement fausses. Donc

$$\min(x_i) < x < \max(x_i)$$

ce qui nous conduit a une premiere estimation de l'incertitude absolue

$$I(G) = \frac{|\max(x_i) - \min(x_i)|}{2} \quad (1)$$

Une meilleure estimation de cette incertitude est obtenue en prenant le plus grand des ecarts par rapport a la moyenne :

$$I(G) = \max \left| x_i - x_m \right| \quad (2)$$

Encore meilleure sera l'estimation obtenue en calculant la moyenne des écarts à la moyenne des mesures :

$$I(G) = \frac{|x_1 - x_m| + |x_2 - x_m| + |x_3 - x_m| + \dots + |x_n - x_m|}{n} \quad (3)$$

Nous illustrerons ce cas par une expérience sur le mouvement rectiligne uniformément accéléré d'une bille d'acier sur un plan incliné.

M.R.U.A. sur un plan incliné		
Bille d'acier diamètre: 1.760 ± 0.025 cm inclinaison du rail : 9.0° ± 0.1°		
distance m ± 0.001	temps s	t _i - t _m
0.20	0.650	0.001
	0.652	0.001
	0.654	0.003
	0.651	0.000
	0.650	0.001
	-----	-----
moyennes	0.651	0.001
0.40	0.912	0.003
	0.917	0.002
	0.916	0.001
	0.917	0.002
	0.914	0.001
	-----	-----
	0.915	0.002
0.60	1.118	0.002
	1.124	0.004
	1.120	0.000
	1.121	0.001
	1.119	0.001
	-----	-----
	1.120	0.001
* 0.80	1.295	0.002
1.00	1.443	0.002
1.20	1.580	0.002
1.40	1.715	0.001

*Les temps et leurs incertitudes indiqués à partir de 0.80m sont les valeurs moyennes.

La valeur moyenne de l'accélération est donc $a = 0.954 \text{ m/s}^2 \pm 0.005$.

En conclusion, nous retiendrons que dans le cas de mesures répétées, l'INCERTITUDE ABSOLUE EST EGALE A LA MOYENNE DES ECARTS A LA MOYENNE DES MESURES.

Notons que la majorité des machines à calculer donnent, en mode statistique, la possibilité de calculer facilement ces moyennes.

(b) Mesure unique faite avec un instrument gradué

Dans ce cas, l'INCERTITUDE ABSOLUE EST EGALE A LA MOITIE DE LA VALEUR DE LA PLUS PETITE GRADUATION DE L'INSTRUMENT.

Ainsi, une règle graduée en mm (" précision du mm ") donne une mesure de longueur

$$L = 54.0 \text{ mm} \pm 0.5$$

Pour la même longueur, on obtiendra au pied à coulisse au $1/20^{\text{e}}$ (" précision au 0.05 mm ") la mesure

$$L = 54.000 \text{ mm} \pm 0.025$$

Remarquons le cas du chronomètre à main. Pour un chronomètre au $1/10^{\text{e}}$ de seconde, le principe d'estimation de l'incertitude absolue nous conduirait à prendre 0.05 s comme incertitude absolue. Cependant, l'usage du chronomètre impose deux manipulations successives: le déclenchement et l'arrêt. Aussi le risque d'erreur est-il double. On prendra donc deux fois la valeur de la demi graduation, soit 0.1 s dans notre exemple.

(c) Mesure unique faite avec un instrument non gradué

Ce cas se présente le plus souvent lors des mesures de masses.

L'ORDRE DE GRANDEUR DE L'INCERTITUDE ABSOLUE SERA DU MEME ORDRE QUE LE DERNIER CHIFFRE SIGNIFICATIF DE LA MESURE.

La mesure d'une masse à la balance trebuchet donne par exemple

$$m = 27.540 \text{ g} \text{ par excès}$$

$$\text{et } m = 27.530 \text{ g} \text{ par défaut.}$$

La valeur retenue sera la moyenne, soit

$$m = 27.535 \text{ g} \pm 0.005$$

3.2 Estimation des incertitudes sur les mesures indirectes

.....

Dans ce cas, la grandeur que l'on veut mesurer n'est pas accessible directement à la mesure. Sa valeur est le résultat d'opérations arithmétiques effectuées sur des valeurs de grandeurs mesurées directement et dont les incertitudes sont connues.

Le procédé le plus simple à utiliser est l' "ENCADREMENT". Cette méthode suppose cependant que toutes les grandeurs mesurées sont positives. Lorsque ce n'est pas le cas, un changement d'origine peut souvent sauver la situation (par exemple, passer de degrés Celsius en Kelvin).

Comment procéder ? Supposons qu'une grandeur G est donnée par la loi

$$G = \frac{L \cdot M}{N}$$

Par expérience, on mesure les grandeurs L, M, N :

$$\begin{aligned} L &= a \pm I(L) \\ M &= b \pm I(M) \\ N &= c \pm I(N) \end{aligned}$$

Ces mesures peuvent aussi s'écrire

$$\begin{aligned} a - I(L) &\leq L \leq a + I(L) \\ b - I(M) &\leq M \leq b + I(M) \\ c - I(N) &\leq N \leq c + I(N) \end{aligned}$$

Nous pouvons à présent écrire l'inégalité (ou l'encadrement)

$$\frac{(a - I(L)) \cdot (b - I(M))}{c + I(N)} \leq \frac{L \cdot M}{N} \leq \frac{(a + I(L)) \cdot (b + I(M))}{c - I(N)}$$

Appelons x le premier membre de cette inégalité et y, le second membre. L'inégalité devient

$$x \leq \frac{L \cdot M}{N} \leq y$$

c'est-à-dire $x \leq G \leq y$

On a trouvé ainsi un intervalle [x,y] dans lequel doit se trouver la valeur exacte de la mesure de G. On peut prendre pour valeur la plus probable de G celle qui se trouve au milieu de cet intervalle. Donc

$$\text{mes}(G) = \frac{x + y}{2}$$

L'incertitude absolue a alors pour mesure la distance qui sépare la mesure mes(G) des bornes de l'intervalle, soit

$$I(G) = y - \text{mes}(G)$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$I(G) = \frac{y - x}{2}$$

Finalement, la méthode d'estimation de l'incertitude absolue consiste à CALCULER LES BORNES DE L'INTERVALLE DANS LEQUEL SE TROUVE CERTAINEMENT LA VALEUR EXACTE DE LA GRANDEUR.

CES BORNES ETANT CONNUES, IL SUFFIT ALORS DE CALCULER

$$\text{mes}(G) = \frac{x + y}{2} \pm \frac{x - y}{2}$$

Prenons pour exemple le calcul du volume d'un parallépipède rectangle dont les dimensions, mesurées au pied à coulisse, sont

$$L = 5.000 \pm 0.025 \text{ mm}$$

$$l = 3.550 \pm 0.025 \text{ mm}$$

$$h = 8.750 \pm 0.025 \text{ mm}$$

Nous avons $V = L.l.h$ et

$$4.975 \times 3.525 \times 8.725 \leq V \leq 5.025 \times 3.575 \times 8.775$$

$$153.0 \leq V \leq 157.6$$

D'où $V = 155.3 \pm 2.3 \text{ mm}^3$

4. Notion de chiffres significatifs

L'utilisation des machines à calculer à 8, 10, 12, ... digits rend importante la notion de chiffre significatif. Dans quelle mesure les chiffres fournis par la machine ont-ils un sens ?

Reprenons l'exemple précédent au moment où le premier calcul intervient. Il s'agit de calculer

$$4.975 \times 3.525 \times 8.775 \quad \text{et} \quad 5.025 \times 3.575 \times 8.775$$

Remarquons tout d'abord que la précision des données est de l'ordre de 0.5 %. En effet, les incertitudes relatives sur L, l et h sont

$$\begin{array}{ccc} I(L) = 0.5 \% & I(l) = 0.7 \% & I(h) = 0.3 \% \\ R & R & R \end{array}$$

Confions à présent les calculs à notre machine à 10 digits. Pour premier résultat, elle nous donne 153.0092343 tandis que pour le second, elle fournit 157.6373906.

Ces résultats ont une précision relative de $0.0000001/153.0092343$ et $0.0000001/157.6373906$, soit respectivement 0.00000007 % et 0.00000006 % !!! Ceci revient à dire qu'en gardant tous les chiffres fournis par la machine, notre résultat serait 10000000 fois plus précis que nos mesures, ce qui est évidemment impossible.

Que faut-il faire pour que les résultats soient compatibles avec les données ? Il faut tenir compte du nombre de chiffres significatifs contenus dans les données.

LE NOMBRE DE CHIFFRES SIGNIFICATIFS D'UN NOMBRE EST LE NOMBRE DE CHIFFRES QU'IL CONTIENT, COMPTES À PARTIR DE LA GAUCHE ET COMPTE NON TENU DES ZÉROS QUI POURRAIENT PRÉCÉDER LE PREMIER CHIFFRE NON NUL.

Ainsi

23	023	0.23	0.0023	ont deux chiffres significatifs;
23.2	0.432	0.00780		ont trois chiffres significatifs;
23.20	0.4321	0.007806		ont quatre chiffres significatifs.

Notons qu'en notations scientifiques, l'expression E *** n'intervient pas pour déterminer le nombre de chiffres significatifs. Ainsi 63 E003 a deux chiffres significatifs.

Nous pouvons à présent énoncer une règle qui permet de se débarrasser des chiffres non-significatifs :

ON RETIENDRA DANS LA RÉPONSE LE MÊME NOMBRE DE CHIFFRES SIGNIFICATIFS (ou, si nécessaire, un de plus) QUE CELUI CONTENU DANS LA DONNÉE AYANT LA PLUS GRANDE INCERTITUDE RELATIVE.

En général, la donnée qui possède le plus petit nombre de chiffres significatifs est la donnée qui a la plus grande incertitude relative et donc la plus petite précision. Notre règle impose donc à la réponse de ne pas avoir une précision relative plus grande que la " plus mauvaise " des données.

Exemples :

- (1) $2.823 + 586.35 = 589.2$ et non 589.173
- (2) $5.35 \times 3.8 = 20$ et non 19.950
- (3) $523.45 / 4.375 = 119.6$ et non 119.6457142

Terminons par une remarque tres importante : si les donnees presentent des incertitudes relatives dont les ordres de grandeur sont tres differents, c'est que les mesures ont ete mal faites. En effet, mesurer les dimensions d'un solide au metre ruban puis mesurer sa masse a la balance de precision ne constitue pas une procedure logique. Il faut que les instruments de mesure utilises aient des precisions comparables.

5. Trace d'une courbe experimentale

Nous prendrons pour exemple le trace sur papier millimetre de la courbe $x = f(t)$ du mouvement rectiligne et uniformement accelere, obtenu sur le rail a coussin d'air par la methode de la force tractice.

Masse du chariot : 0.0250 kg \pm 0.0001	
Force tractrice : 0.098 N \pm 0.001	
x (m) \pm 0.002	t (s) \pm 0.01
0.200	0.71
0.300	0.87
0.400	1.00
0.500	1.14
0.600	1.23
0.700	1.34
0.800	1.43
0.900	1.53
1.000	1.61

Dans la mesure du possible, on choisira les unites du graphique de maniere que l'incertitude absolue commise sur chaque grandeur representee soit la plus petite graduation : 1mm pour le papier millimetre.

Dans notre exemple, l'incertitude absolue sur x est de 0.002m. Donc 1mm en ordonnee devrait represente 0.002m. Ceci implique que notre feuille de papier millimetre devrait avoir au moins 50cm de longueur pour pouvoir y represente les valeurs de x comprises entre 0 et 1.000m. C'est impossible pratiquement.

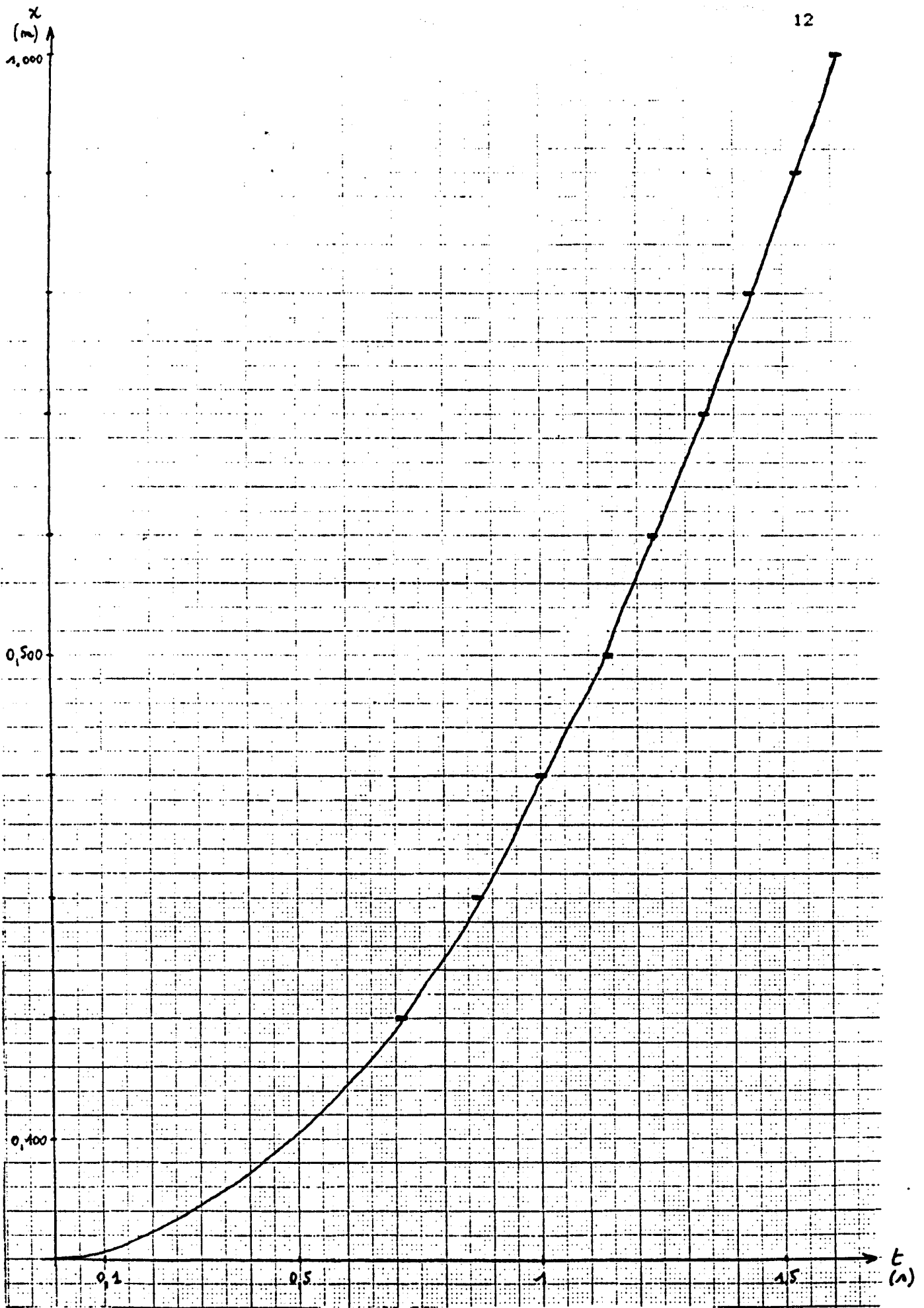
De meme, l'incertitude absolue sur t est de 0.01s et 1mm du papier millimetre devrait correspondre a 0.01s. Dans ce cas, il faut une largeur de papier d'au moins 16.1cm pour pouvoir represente toutes les valeurs de t. Ceci est realisable.

Nous prendrons donc pour unites :

- en abscisse : 1 cm pour represente 0.1 s
- en ordonnee : 1 cm pour represente 0.040 m.

Avec ces unites sur nos axes, l'intervalle d'incertitude sur x aura une longueur totale de 1mm (0.5 mm de part et d'autre du point experimental) et l'intervalle d'incertitude sur t aura une longueur totale de 2mm (1mm de part et d'autre du point experimental). Ainsi est defini en chaque point experimental, un petit rectangle d'incertitude dans lequel la courbe devra obligatoirement passer.

Lorsque la courbe a tracer est une droite, il existe une methode qui permet de tracer la meilleure droite possible. C'est la METHODE DES MOINDRES CARRES.



6. Trace d'une droite par la methode des moindres carres

La methode des moindres carres consiste a rechercher la droite qui passe AU MIEUX par les points experimentaux, en minimisant les distances entre la droite et les points experimentaux. On appelle cette droite la DROITE DE REGRESSION.

La droite de regression est telle que la SOMME DES CARRES DES DISTANCES DES POINTS EXPERIMENTAUX A LA DROITE EST MINIMALE.

Deux droites de regression sont possibles: regression de y en x et regression de x en y.

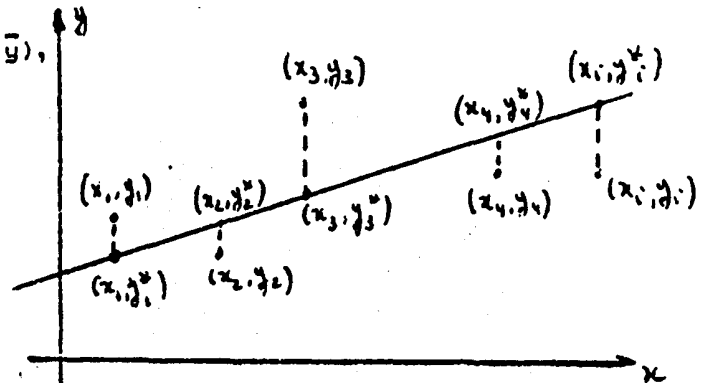
1. Droite de regression de y en x

.....

Cette droite passe par le point (\bar{x}, \bar{y}) ,
 \bar{x} et \bar{y} etant les moyennes :

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$$



D'où l'équation de la droite :

$$y - \bar{y} = a.(x - \bar{x}) \quad (1)$$

dont il faut determiner le coefficient directeur a.

L'équation (1) de la droite nous permet d'écrire, pour chaque point experimental (x_i, y_i)

$$\begin{aligned} y_1^* - \bar{y} &= a.(x_1 - \bar{x}) \\ y_2^* - \bar{y} &= a.(x_2 - \bar{x}) \\ \vdots \\ y_i^* - \bar{y} &= a.(x_i - \bar{x}) \end{aligned} \quad (2)$$

si (x_i^*, y_i^*) sont les coordonnes du point appartenant a la droite de regression et correspondant au point experimental (x_i, y_i) .

La condition de minimum devient :

$$X = \sum (y_i - y_i^*)^2 \quad \text{doit etre minimale.}$$

En utilisant (2), cette condition s'écrit :

$$\begin{aligned} X &= \sum_i (y_i - a.(x_i - \bar{x}) - \bar{y})^2 \\ &= \sum_i \left[y_i^2 + a^2.(x_i - \bar{x})^2 + \bar{y}^2 - 2ay_i.(x_i - \bar{x}) - 2y_i\bar{y} + 2a\bar{y}(x_i - \bar{x}) \right] \end{aligned}$$

Si X est minimale, sa dérivée par rapport au paramètre a doit être nulle.

D'où

$$0 = \sum \left[2a(x_i - \bar{x})^2 - 2y_i(x_i - \bar{x}) + 2\bar{y}(x_i - \bar{x}) \right]$$

$$0 = a \sum_i (x_i - \bar{x})^2 - \sum_i y_i (x_i - \bar{x}) + \sum_i \bar{y} (x_i - \bar{x})$$

Donc

$$a \sum_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i (y_i - \bar{y}) \cdot (x_i - \bar{x})$$

et

$$a = \frac{\sum_i (y_i - \bar{y}) \cdot (x_i - \bar{x})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}$$

L'équation de la droite de régression de y en x est donc :

$$y - \bar{y} = \frac{\sum_i (y_i - \bar{y}) \cdot (x_i - \bar{x})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} \cdot (x - \bar{x}) \quad (3)$$

2. Droite de régression de x en y

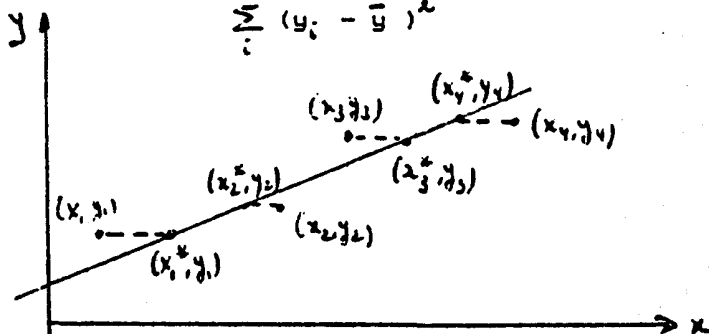
.....

Par un raisonnement semblable, on obtient l'équation de la droite de régression de x en y

$$x - \bar{x} = a' \cdot (y - \bar{y})$$

avec

$$a' = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2} \quad (4)$$



La droite de régression sera parfaite si (3) et (4) représentent la même droite, c-a-d si

$$a = \frac{1}{a'} \quad (5)$$

3. Coefficient de corrélation

.....

Dans le cas idéal, $a = 1/a'$ donc $a \cdot a' = 1$. On peut définir un coefficient qui va donner une indication sur la dispersion des points expérimentaux autour de la droite de régression. Ce coefficient est le **COEFFICIENT DE CORRELATION**

$$\rho = \sqrt{a \cdot a'}$$

On estime que

si $\rho \leq 0.25$ il n'y a pas de corrélation linéaire entre x et y;

si $\rho > 0.75$ il y a PRESQUE certainement correlation lineaire entre x et y;

si $0.25 < \rho < 0.75$ il y a doute.

4. Exemple

.....

L'exemple ci-dessous concerne le MRUA obtenu par la methode de la force tractrice. Les resultats experimentaux ont ete traites par ordinateur. Le programme de regression lineaire REGLIN/BAS figure a la fin de ces notes.

TABLEAU DES RESULTATS

Masse du chariot : 125.00 g I(M) = 0.001 g
Masse tractrice : 50.00 g I(M) = 0.001 g

x (cm) # 0.005	t (s) # 0.01	t ² (s*s)	a (m/s**2)
10	.98	.9604	20.824
20	1.42	2.016	19.837
30	1.75	3.062	19.591
40	2.06	4.243	18.851
50	2.3	5.29	18.903
60	2.53	6.400	18.747
70	2.74	7.507	18.647
80	2.94	8.643	18.510
90	3.12	9.734	18.491
100	3.3	10.89	18.365
a moyenne			18.883 I(a) = .3741

Calcul des droites de regression

donnees :

x	t.t
10	.9604
20	2.016
30	3.062
40	4.243
50	5.29
60	6.4
70	7.507
80	8.643
90	9.734
100	10.89

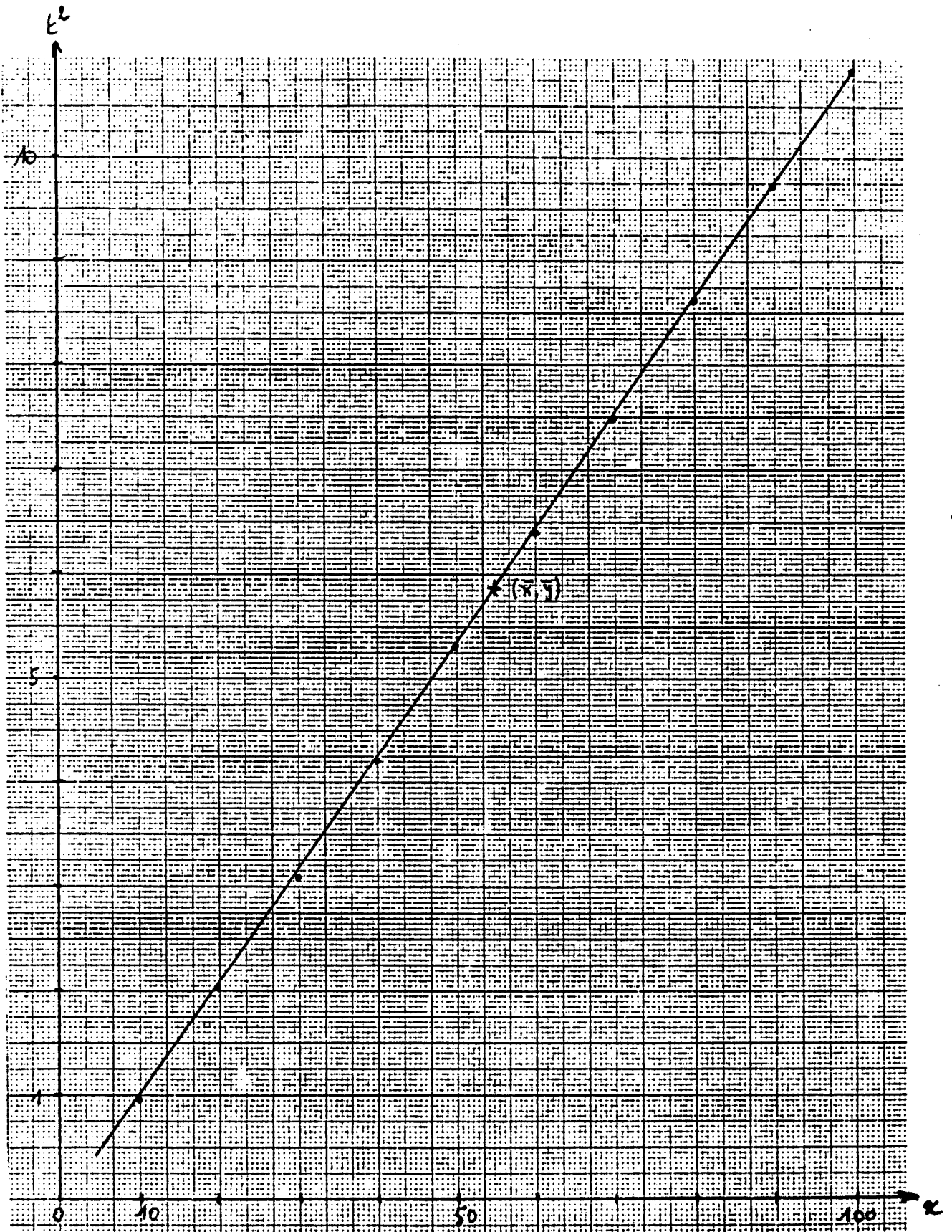
moyenne des x = 55

moyenne des y = 5.87454

coefficient angulaire (droite de y en x): a = .310424

coefficient angulaire (droite de x en y): a' = 9.05503

coefficient de correlation $\rho = .999946$



```

10 ' ===== regression lineaire =====
20 ' ===== prog reglin/bas =====
30 ' ===== Frederickx G. ** 1987 =====
35 '
40 CLS: CLEAR 1000
50 PRINT "entree des donnees": PRINT "===== ": PRINT
60 LINE INPUT "nombre de donnees : "; N$
70 IF N$="@" THEN CLS: END
80 N=VAL(N$)
90 DIM A(N), B(N)
100 LINE INPUT "nom de la grandeur x : "; X$
110 LINE INPUT "nom de la grandeur y : "; Y$
120 CLS
130 FOR I=1 TO N
140 PRINT "entree No "; I
150 PRINT "          x = "; INPUT A(I)
160 PRINT "          y = "; INPUT B(I)
170 NEXT I
180 A=0: B=0
190 FOR I=1 TO N
200 A=A+A(I)
210 B=B+B(I)
220 NEXT I
230 A=A/N: B=B/N
240 LPRINT " Calcul des droites de regression"
250 LPRINT "===== "
260 LPRINT " donnees : "; LPRINT "-----"
270 LPRINT "   "; X$, Y$: LPRINT "-----":
280 FOR I=1 TO N
290 LPRINT "   "; A(I), B(I)
300 NEXT I
310 LPRINT "-----"
320 LPRINT
330 LPRINT " moyenne des x = "; A
340 LPRINT " moyenne des y = "; B
350 LPRINT
360 C=0: D=0: E=0
370 FOR I=1 TO N
380 C=C+((B(I)-B)*(A(I)-A))
390 D=D+((A(I)-A)*(A(I)-A))
400 E=E+((B(I)-B)*(B(I)-B))
410 NEXT I
420 X=C/D
430 Y=C/E
440 LPRINT "coefficient angulaire (droite de y en x): a = "; X
450 LPRINT "coefficient angulaire (droite de x en y): a' = "; Y
460 LPRINT
470 R=0: S=0: T=0
480 FOR I=1 TO N
490 R=R+A(I)*B(I)
500 S=S+A(I)*A(I)
510 T=T+B(I)*B(I)
520 NEXT I
530 R=R-N*A*B
540 S=S-N*A*A
550 T=T-N*B*B
560 T=SQR(S*T)
570 R=R/T
580 LPRINT "coefficient de correlation r = "; R
590 GOTO 40

```