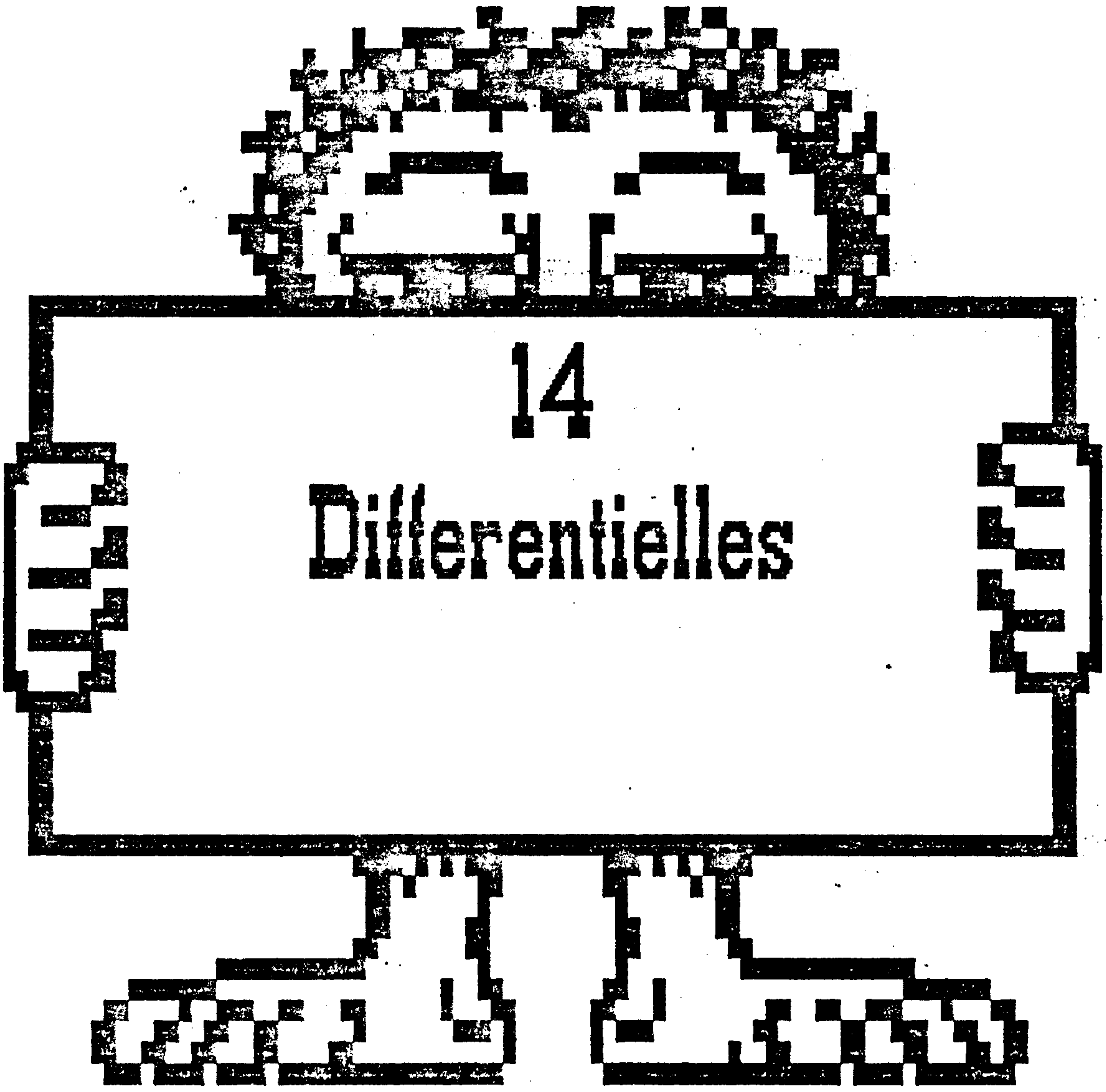
14
Differentielles

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

On appelle équation différentielle du $n^{ème}$ ordre, une équation du type

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU PREMIER ORDRE

$$f(x, y, y') = 0$$

Equations à variables séparées : $y' = f(x).g(y)$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x).g(y)$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x).dx$$

Exercices : résoudre

1. $y' = 2xy$
2. $y' = -\frac{y}{x}$
3. $(x - xy^2)dx + (8y - x^2y)dy = 0 \quad$ où $y_{x=0} = 0$
4. $\cos x + e^y y' = 0$

Equations du type $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

On pose $u = \frac{y}{x}$ et on retombe sur une équation à variables séparées.

Exercices : résoudre

1. $y' = \frac{x + y}{x}$
2. $(x - y).y' = x + y$
3. $y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$
4. $x.\cos\frac{y}{x}.y' = y.\cos\frac{y}{x} - x$
5. $y' = \frac{y}{y - x}$

Equations linéaires homogènes : $y' + y.f(x) = 0$

$y' + y.f(x) = 0$ est une équation à variables séparées, on a donc

$\frac{dy}{y} = -f(x).dx$ qu' on intègre pour obtenir

$\ln y = -k(x) + K$ où $k(x) = \int f(x).dx$ et $K \in \mathbb{R}$

$y = C.e^{-k(x)}$ où $C \in \mathbb{R}$

Equations linéaires non homogènes : $y' + y.f(x) = g(x)$ (1)

Méthode de la variation de la constante :

1) On résout l' équation homogène linéaire

$y' + y.f(x) = 0$ qui livre la solution

$y = C.e^{-k(x)}$ où $C \in \mathbb{R}$

2) On trouve $C(x)$ tel que $y = C(x).e^{-k(x)}$ soit solution de (1) :

$$y = C(x).e^{-k(x)}$$

$$C(x) = y.e^{k(x)}$$

$$C'(x) = y'.e^{k(x)} + y.k'(x).e^{k(x)}$$

$$C'(x) = (\ y' + y.f(x)\ ).e^{k(x)}$$

$$C'(x) = g(x).e^{k(x)}$$

$$= h'(x)$$

$y = (\ h(x) + K\ ).e^{-k(x)}$ où $K \in \mathbb{R}$

Exercices : Résoudre

1. $y' - \frac{2}{x}.y = x^2$
2. $y' + \frac{1 - 2x}{x^2}.y = 1$
3. $y' + y.\mathrm{cotg}x = -\frac{x}{\sin x}$
4. $y' - \frac{2}{x + 1}.y = (x + 1)^3$

Equation de Bernouilli : $y' + y.f(x) = g(x).y^{\alpha}$

On se ramène au cas précédent par le changement de variable $z = y^{1-\alpha}$

Exercices : résoudre

1. $xy' + y = xy^2$
2. $y' = \frac{y}{x} . (y.\ln|x| - 1)$

<u>Equation de Ricatti</u> : $y' + y^2.f(x) + g(x).y + h(x) = 0$ (1)

Soit $y_1(x)$ une solution particulière de (1).

On pose $u(x) = y(x) - y_1(x)$ ou $y(x) = u(x) + y_1(x)$

$$(1) \Leftrightarrow \quad u'(x) + y_1'(x) + f(x).(u^2(x) + y_1^2(x) + 2.u(x).y_1(x)) + g(x).(u(x) + y_1(x)) + h(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad u'(x) + f(x).u^2(x) + 2.u(x).f(x).y_1(x)) + g(x).u(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad u'(x) + u(x)(\ 2.f(x).y_1(x)) + g(x)\ ) = - f(x).u^2(x)$$

cette dernière equation est une équation de Bernouilli où $n = 2$, on pose donc $u = \frac{1}{z}$.

<u>Exemple</u> : $\sin 2x.y' + y^2 = 1$ Une solution particulière est $y_1 = 1$

On pose $y = \frac{1}{z} + 1$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2x.\frac{-z'}{z^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2x.z' - 2z = 1$$

a) $\sin 2x.z' - 2z = 0$

$$\int \frac{dz}{2z} = \int \frac{dx}{\sin 2x} \qquad t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

$$\frac{1}{2}.\ln z = \frac{1}{2}.\ln \operatorname{tg}(x) + C \qquad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

$$z = K.\operatorname{tg}(x) \qquad \text{où } K \in \mathbb{R}$$

b) $K(x) = \frac{z}{\operatorname{tg}(x)}$

$$K'(x) = \frac{\operatorname{tg}(x).z' - \frac{z}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{z'}{\operatorname{tg}x} - \frac{z}{\sin^2 x} = \frac{\sin 2x.z' - 2z}{2\sin^2 x} =$$

$$= \frac{1}{2\sin^2 x}$$

$$K(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{cotg}x + A \qquad \text{où } A \in \mathbb{R}$$

solution : $z = (\ -\frac{1}{2}\operatorname{cotg}x + A\ ).\operatorname{tg}x$ où $A \in \mathbb{R}$

$$= -\frac{1}{2} + A.\operatorname{cotg}x$$

$$y = \frac{1}{-\frac{1}{2} + A.\operatorname{tg}x} + 1$$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU SECOND ORDRE

$$f(x, y, y', y'') = 0$$

Exemple : $a = 9$

$a = v'(t) = \dot{v} \Leftrightarrow v = 7t + v_0$

$a = x''(t) = x \; ; \; v = x'(t) = \dot{x} \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}.t^2 + v_0.t + x_0$

Equations du type $y'' + by = 0$ où $b \in \mathbb{R}$

1) $b = 0$: $y = C_1x + C_2$ où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

2) $b < 0$: $y'' = -by$

$$y = C_1.e^{\sqrt{-b}.x} + C_2.e^{-\sqrt{-b}.x} \qquad \text{où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

3) $b > 0$: $y'' = -by$

$$y = C_1.\sin\sqrt{b}.x + C_2.\cos\sqrt{b}.x \qquad \text{où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Equations du type $y'' + ay' + by = 0$ où $a \in \mathbb{R}_0, b \in \mathbb{R}$

On pose $y = u(x).e^{-\frac{a}{2}.x}$ et on retombe sur une équation du type précédent :

$$y = u(x).e^{-\frac{a}{2}.x}$$

$$y' = e^{-\frac{a}{2}.x}.(u'(x) - \frac{a}{2}.u(x))$$

$$y'' = e^{-\frac{a}{2}.x}(u''(x) - a.u'(x) + \frac{a^2}{4}.u(x))$$

$$y'' + ay' + by = e^{-\frac{a}{2}.x}.(u''(x) + (b - \frac{a^2}{4}).u(x))$$

$$y'' + ay' + by = 0 \Leftrightarrow u''(x) + (b - \frac{a^2}{4}).u(x) = 0$$

Exercice : résoudre

1. $y'' - y' - 2y = 0$ où $y_0 = 0$ et $y'_0 = 1$

Equations du type $y'' + ay' + by = f(x)$ où $a \in \mathbb{R}_0$, $b \in \mathbb{R}$ (1)

On démontre que la solution de cette équation est

$y = y_1 + z$ où y_1 est une solution particulière de (1)

z est la solution de l' équation homogène correspondant à (1).

Exercices : Résoudre

1. $2y'' - y' - y = 4.x.e^{2x}$
2. $y'' + y = \cos x$
3. $y'' + 4y' + 3y = x$
4. $y'' + 9y = (x^2 + 1).e^{3x}$
5. $y'' - 2y' + y = x.e^x$