2

Coup d'oeil sur le calcul integral

Comment décrire une vitesse qui varie de manière continue ?

Comment décrire l' évolution; d' instant en instant, des diverses grandeurs, position, vitesse, accélération qui caractérisent l' état instantané d' un mobile ?

Les mathématiciens ont introduit le concept de quantité infinitésimale pour répondre à de telles questions. Une quantité infinitésimale résulte d' un **passage à la limite**, *c' est la variation d' une grandeur entre deux instants successifs lorsque l' intervalle entre ces instants tend vers zéro.*

La description infinitésimale peut ainsi décomposer le changement en une série infinie de changements infiniment petits alors que , précédemment on ne pouvait le décrire que comme le résultat d' un nombre fini de transitions de grandeurs finies juxtaposées comme les perles d' un collier.

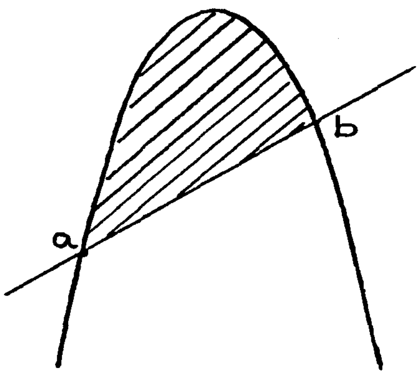
Prigogine - Stengers
La Nouvelle Alliance.

COUP D' OEIL SUR LE CALCUL INTEGRAL

ARCHIMEDE-1er S avant J.C.

Les civilisations antiques se sont toutes préoccupées de problèmes de mesure d' aires et de volumes. Les formules que nous avons étudiées à l' école primaire pour les figures les plus familières ont d' abord été obtenues de manière **empirique**. Avec les mathématiciens grecs des démonstrations perfectionnées furent obtenues.

Avec Archimède, on atteint une rigueur et une maîtrise qu' il faudra plus de deux mille ans pour égaler à nouveau. Il utilise à fond **la méthode d' exhaustion** déjà découverte par **Eudoxe** au 6ème siècle avant J.C.. En voici une illustration.



Considérons un segment de parabole ab dont nous souhaitons trouver l' aire A.

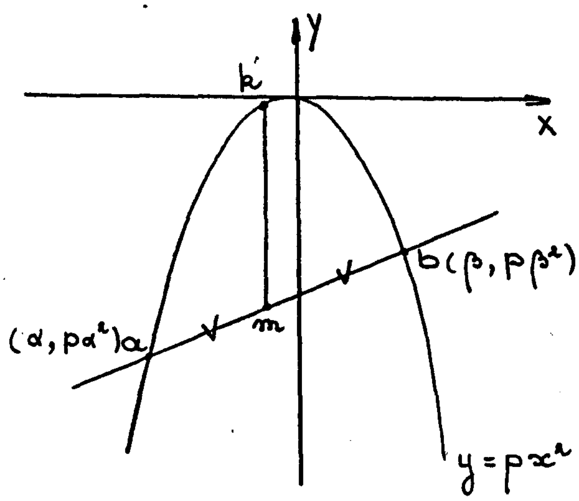
Choisissons nos axes pour que la parabole ait pour équation

$$y = px^2$$

avec $a(\alpha, p\alpha^2)$
$b(\beta, p\beta^2)$

Soit m le milieu de [ab] et k le point de la parabole qui se trouve sur la parallèle à son axe passant par le point m.

$$k\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\ ,\ p.\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right)$$

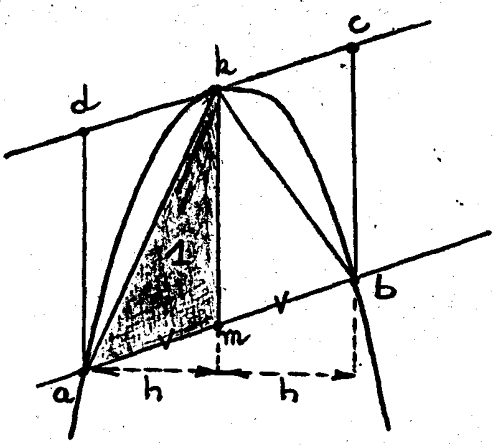


La parabole P possède une propriété remarquable : **La tangente à P en k est parallèle à ab.**

En effet, la dérivée de $y = px^2$ vaut $y' = 2px$. En $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$ elle prend la valeur $y'_{\frac{\alpha+\beta}{2}} = p(\alpha + \beta)$

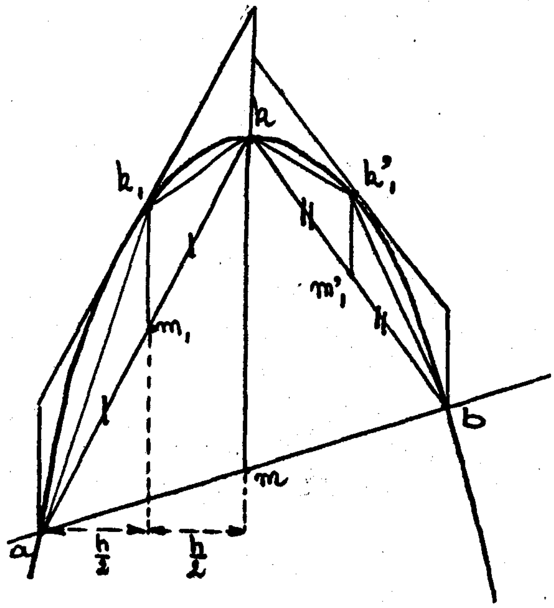
D'autre part, la pente de ab vaut

$$\frac{p\beta^2 - p\alpha^2}{\beta - \alpha} = p(\alpha + \beta).$$



Dès lors, l' aire A est comprise entre l' aire du triangle akb et celle du parallélogramme abcd. Adoptons pour unité d' aire, l' aire du triangle akm. On a aire(akm) = aire(mkb) = aire (adk)= aire(kcb), ces triangles ayant même base et même hauteur. Donc

$$\boxed{2 \leq A \leq 4}$$



On va répéter ce processus en remplaçant ab par ak et par bk.

Soit m_1 le milieu de ak et m'_1 le milieu de kb.

k_1 est le point de la parabole et de la parallèle à son axe menée par m_1.

k'_1 est le point de la parabole et de la parallèle à son axe menée par m'_1.

Cette fois grâce au raisonnement effectué plus tôt, on a

$$2 + 2.\text{aire}(ak_1m_1) + 2.\text{aire}(bk'_1m'_1) \leq A \leq 2 + 4.\text{aire}(ak_1m_1) + 4.\text{aire}(bk'_1m'_1) \qquad (1)$$

Il se fait que aire(ak_1m_1) est facile à estimer. On a

$$m_1 : \left[\frac{1}{2}.(\alpha + \frac{\alpha+\beta}{2}) , \frac{1}{2}.(p\alpha^2 + p.\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2) \right]$$

$$= \left(\frac{3\alpha+\beta}{4} , \frac{p}{8}.(5\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) \right)$$

$$k_1 : \left(\frac{3\alpha+\beta}{4} , p.\left(\frac{3\alpha+\beta}{4}\right)^2 \right)$$

Il s' en suit que

$$|m_1k_1| = \frac{p}{16} . (9\alpha^2 + 6\alpha\beta + \beta^2 - 10\alpha^2 - 4\alpha\beta - 2\beta^2)$$
$$= \frac{p}{16} . (-\alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2) = -\frac{p}{16} .(\alpha - \beta)^2$$

$$|mk| = \frac{p}{4} \cdot (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 2\alpha^2 - 2\beta^2)$$

$$= \frac{p}{4} \cdot (-\alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2) = -\frac{p}{4} \cdot (\alpha - \beta)^2$$

et $|m_1k_1| = \frac{1}{4}.|mk|$

De ce fait

$$\frac{\text{aire}(ak_1m_1)}{\text{aire}(akm)} = \frac{\frac{1}{2}\,.|m_1k_1|.\frac{h}{2}}{\frac{1}{2}\,.|mk|.h} = \frac{\frac{1}{8}\,.|mk|}{|mk|} = \frac{1}{8} \qquad (2)$$

Un raisonnement analogue peut se faire pour aire $(bk'_1m'_1)$.

Comme aire(akm) = 1, (1) et (2) nous livrent

$$\boxed{2 + \frac{1}{2} \le A \le 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$$

En poursuivant le raisonnement, on a

$$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \le A \le 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

......

$$\boxed{2.\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^n}\right) \le A \le 2.\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^n}\right) + \frac{2}{4^n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}_0}$$

Cet encadrement a une longueur égale à $\frac{2}{4^n}$ et tend vers zéro quand n tend vers l' infini.

Donc

$$A = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots + \frac{1}{4^n}\right)$$

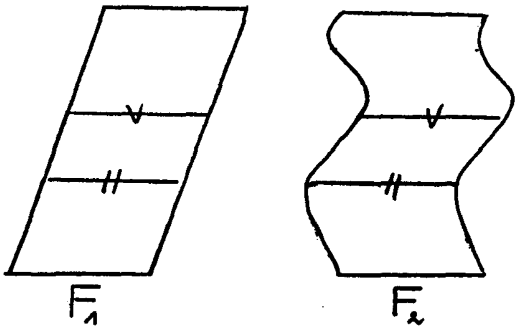
$$= 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{8}{3} \text{ (aire (akm))}$$

Par des méthodes analogues, Archimède parvint le premier à déterminer le volume de la sphère en fonction du rayon.

CAVALIERI - 17ème siècle

Cet élève de **Galilée** introduit une idée nouvelle que nous pouvons formuler comme suit :Considérons deux aires de figures planes F_1 et F_2 disposées de telle manière qu' il y ait une direction de droites Δ avec la propriété que toute droite de Δ coupe F_1 et F_2 en des segments de droite de même longueur. Alors

$$\text{aire}(F_1) = \text{aire}(F_2)$$



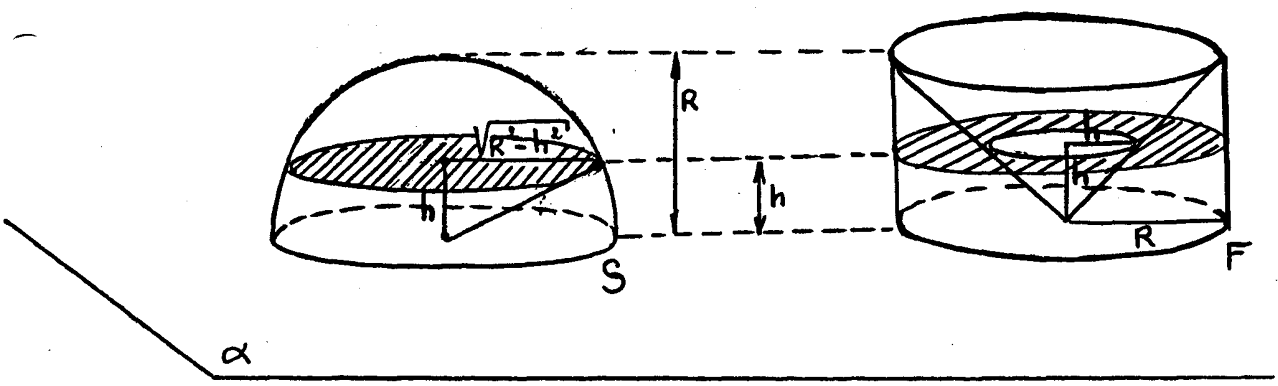
De même si F_1 et F_2 sont des figures spatiales disposées de telle sorte qu' il existe une direction de plans Δ avec la propriété que tout plan de Δ coupe F_1 et F_2 en des figures d' aires égales, alors

$$\text{volume}(F_1) = \text{volume}(F_2).$$

Voici deux applications du principe de Cavaliéri :

Volume d' une sphère de rayon R

On place une demi-sphère $\mathcal{S}$ de rayon R sur un plan α et " à côté ", un cylindre de hauteur R et de base, un cercle de rayon R. On retire de ce cylindre, un cône comme l' indique la figure ci-dessous. On obtient ainsi un solide $\mathcal{F}$.



On coupe ces deux figures par un plan parallèle au plan α à une hauteur h de celui-ci.

La section plane de $\mathcal{S}$ par ce plan livre une surface d' aire

$$\pi.(R^2 - h^2)$$

La section plane de F par ce plan livre une surface d' aire

$$\pi.R^2 - \pi h^2$$

Le principe de Cavaliéri s' applique et

$$\text{Volume}(S) = \text{Volume}(F) = \pi R^2.R - \frac{\pi R^2.R}{3} = \frac{2}{3}\pi R^3$$

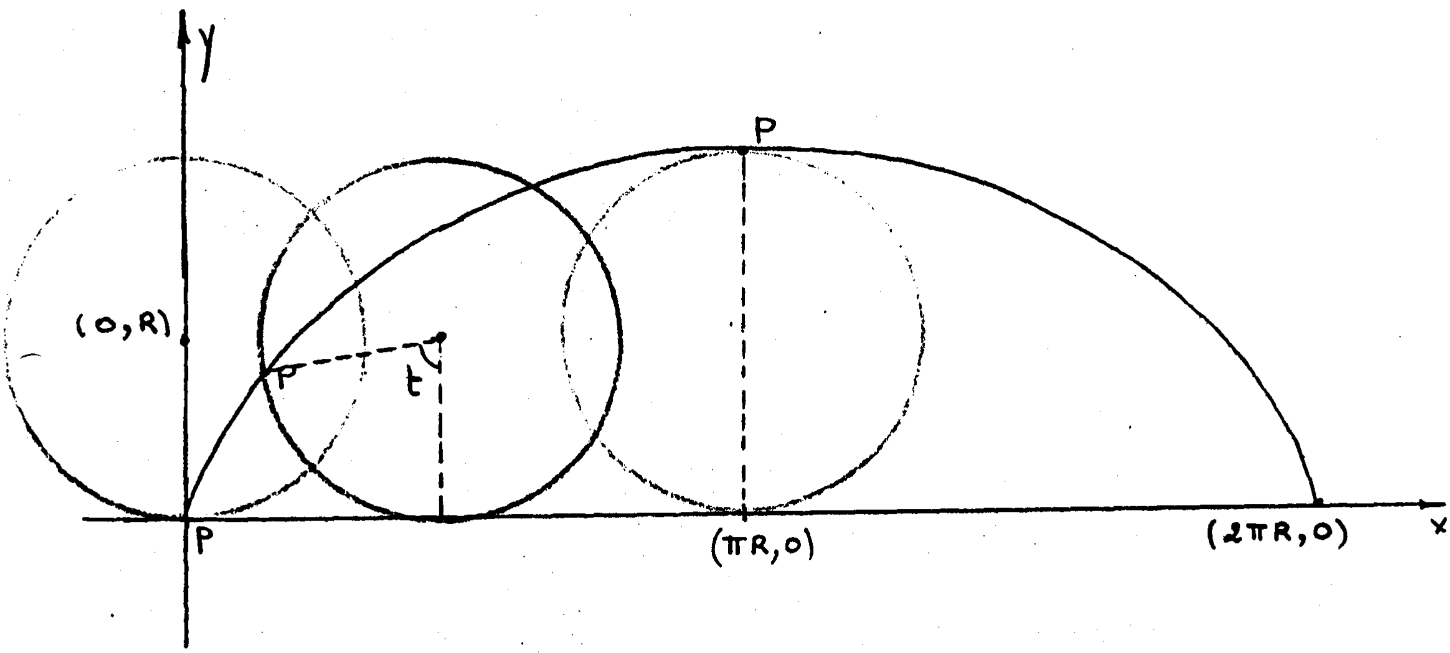
Le volume d' une sphère vaut donc

$$\boxed{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

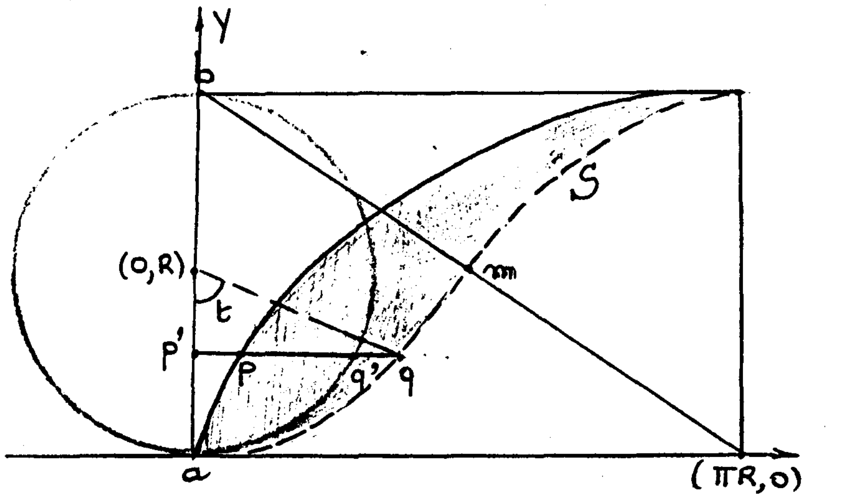
Aire sous l' arche d' une cycloïde

Considérons un cercle de rayon R tangent en un point p à une droite dans le plan. Lorsque le cercle roule sans glisser sur la droite, nous avons vu en 5ème que p décrit une cycloïde d' équation

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$$



Plusieurs mathématiciens célèbres et notamment Galilée avaient tenté en vain de calculer l' aire comprise entre la cycloïde et la droite sur laquelle roule le cercle. En utilisant le principe de Cavaliéri, Roberval obtint la solution du problème en 1637.



On choisit un point p' sur le segment [ab]. La parallèle à l' axe X par p' coupe le cercle en q' et la cycloïde en p. Roberval effectue la translation qui transforme p' en q' et obtient l' image q de p. Lorsque p' varie sur [ab], p décrit la cycloïde et q décrit une courbe S dessinée en pointillés.

On a $p\ (\ Rt - R\sin t\ ,\ R\cancel{t} - R\cos t\ )$

$p'\ (\ 0\ ,\ R\cancel{t} - R\cos t\ )$

$q'\ (\ R\sin t\ ,\ R\cancel{t} - R\cos t\ )$

$q\ (\ Rt\ ,\ R\cancel{t} - R\cos t\ )$

et la courbe S a pour équation

$$y = R\ .\ (\ 1 - \cos \frac{x}{R}\ )$$

Le centre m du rectangle abcd a pour coordonnées ($\frac{\pi R}{2}$,R). Le point m appartient donc à S. De plus la symétrie du plan de centre m est définie par

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x + x'}{2} = \dfrac{\pi R}{2} \\ \dfrac{y + y'}{2} = R \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} x = \pi R - x' \\ y = 2R - y' \end{array}\right.$$

L'image de S par cette symétrie est donc la courbe d' équation

$$2R - y' = R - R \cos \frac{\pi R - x'}{R}$$

ou $$y' = R + R.\cos\ (\pi - \frac{x'}{R})$$

ou $$y' = R\ (\ 1 - \cancel{R}.\cos \frac{x'}{R})$$

La symétrie centrée de centre m conserve S et de ce fait partage le rectangle abcd en deux aires égales à $\frac{1}{2}.\pi R.2R = \pi R^2$.

Par le principe de Cavaliéri, l' aire du demi-cercle, à savoir $\frac{\pi R^2}{2}$ est égale à celle de la région située entre S et la cycloïde. Dès lors, l' aire sous la cycloïde dans le rectangle abcd est égale à

$$\pi R^2 + \frac{\pi R^2}{2} = \frac{3\pi R^2}{2}$$

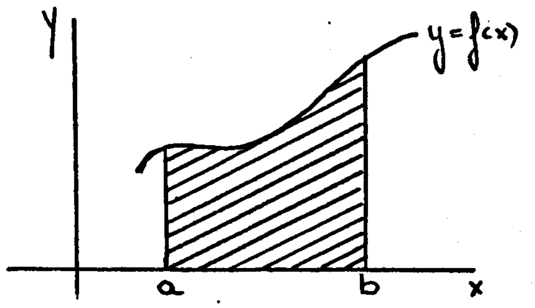
et l' aire sous une arche de la cycloïde vaut

$$\boxed{3\pi R^2}$$

NEWTON et LEIBNITZ – 17ème siècle

Newton et Leibnitz vont élaborer des méthodes beaucoup plus puissantes que celles de leurs devanciers qui ramènent souvent le calcul d'une aire ou d' un volume à un calcul purement mécanique. Leurs idées ont été modifiées et améliorées par plusieurs générations de mathématiciens. Nous en donnons ici une vision contemporaine.

Soit f une fonction définie sur un intervalle fermé $[a,b]$ telle que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$.



On suppose $a \leq b$.

Notons

$$I_a^b \, f$$

(I pour intégrale), l'aire de la portion de plan limitée par les droites $x = a$, $x = b$, $y = 0$ et la courbe $y = f(x)$.

Notre expérience de la notion d'aire suggère d' accepter les propriétes suivantes :

1) Si $0 \leq f(x) \leq g(x)$, pour tout $x \in [a,b]$

alors $0 \leq I_a^b \, f \leq I_a^b \, g$

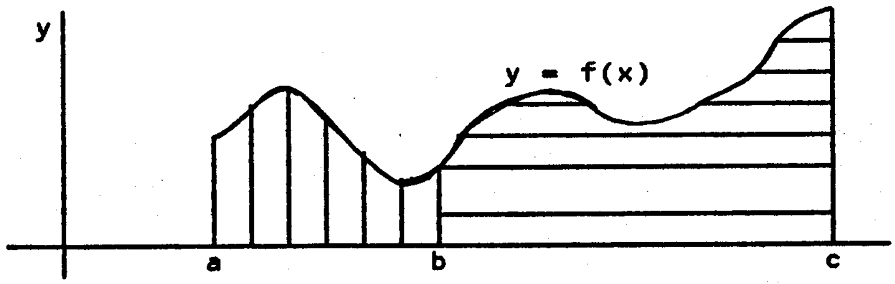
De même

Si $0 < f(x) < g(x)$, pour tout $x \in [a,b]$

alors $0 < I_a^b \, f < I_a^b \, g$

2) Si $a < b < c$ et $0 \leq f(x)$, pour tout $x \in [a,c]$

alors $I_a^c \, f = I_a^b \, f + I_b^c \, f$



Les propriétés (1) et (2) résultent en fait d' une propriété plus générale : Si A et B sont des portions de plan,

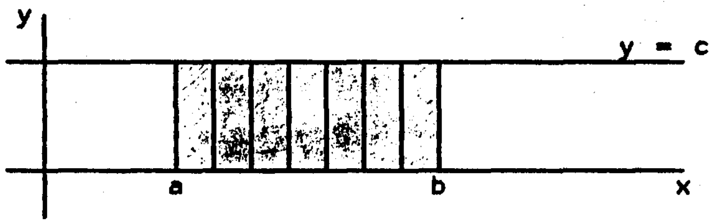
$$\text{aire}(A \cup B) = \text{aire}(A) + \text{aire}(B) - \text{aire}(A \cap B)$$

De plus, si $A \cap B$ est inclus à une droite, alors $\text{aire}(A \cap B) = 0$.

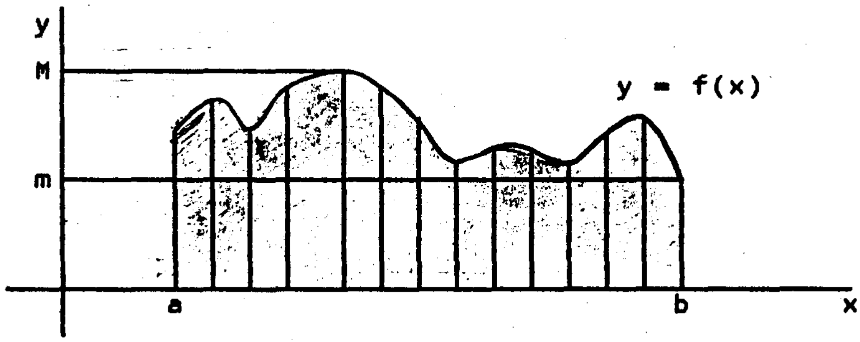
Nous admettrons aussi que l' aire d' un rectangle est égal au produit de la base par la hauteur.

Dès lors, quelques déductions deviennent possibles :

Si f est une fonction constante sur [a,b], égale à c alors $I_a^b f = (b - a).c$

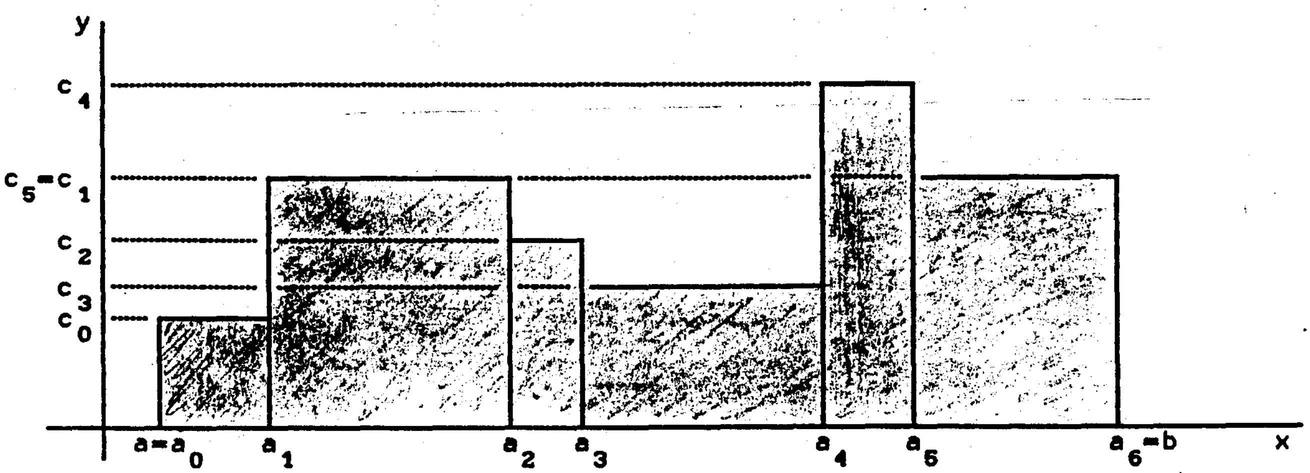


Si f est une fonction quelconque telle que $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a,b]$, alors $m.(b - a) \leq I_a^b f \leq M.(b - a)$.



Ce résultat est encourageant, malheureusement l' encadrement obtenu ne peut s' améliorer. Pour progresser vers un encadrement plus fin de I_a^b f, il convient d' abandonner les fonctions constantes pour les "fonctions constantes par morceaux" ou **fonctions étagées**.

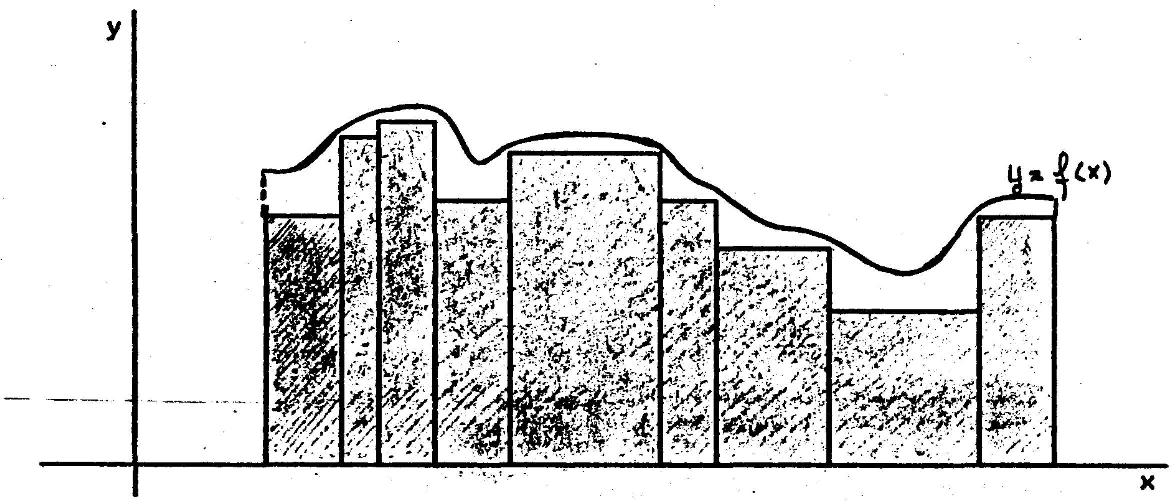
On dit que f est étagée sur [a,b] s'il existe des points $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$ tels que $f(x) = c_i$ est constante pour tout $x \in (a_i, a_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, n-1$.



Pour une telle fonction, on obtient immédiatement

$$I_a^b f = \sum_{i=0}^{n-1} c_i.(a_{i+1} - a_i)$$

Avec de telles fonctions, on peut obtenir des approximations fines de fonctions quelconques.



Soit $0 \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a,b]$, une fontion positive et bornée ($M \in \mathbb{R}$). Désignons par

F^+ l' ensemble des fonctions étagées f^+ telles que $f \leq f^+$ et par

F^- l' ensemble des fonctions étagées f^- telles que $f^- \leq f$.

Soit I^+ l' ensemble des réels $I_a^b f^+$ où $f^+ \in F^+$

I^- l' ensemble des réels $I_a^b f^-$ où $f^- \in F^-$

On a donc

$$\boxed{I^- \leq I_a^b f \leq I^+}$$

Supposons qu' il n' y ait qu' un seul nombre r tel que $I^- \leq r \leq I^+$, alors il faut que

$$\boxed{r = I_a^b f}$$

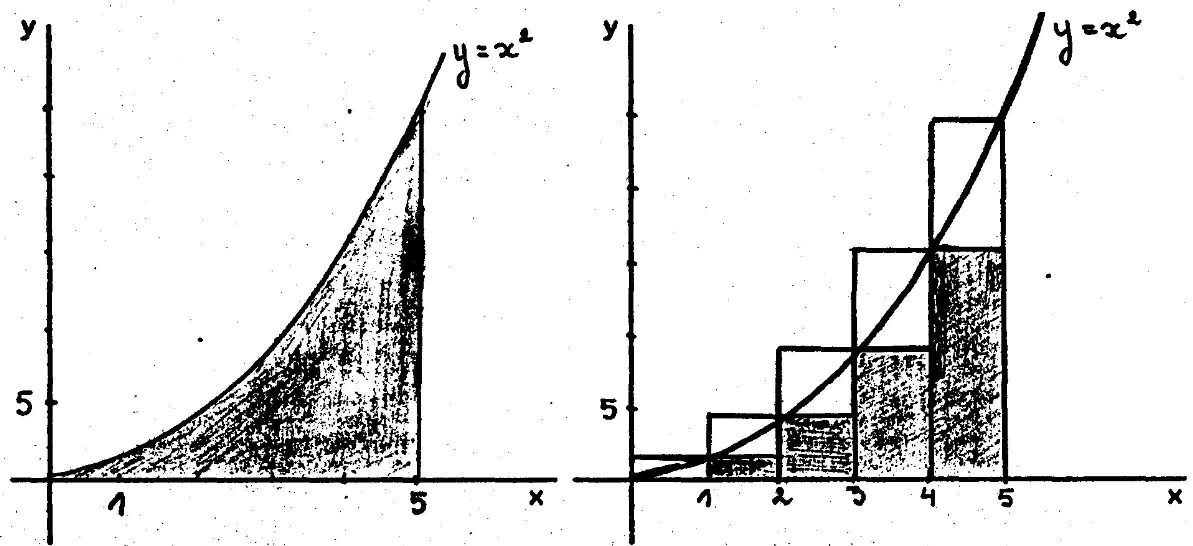
Cette situation se produit pour toute fonction continue, donc pour la plupart des fonctions que nous rencontrons mais la démonstration ne sera ~~pas~~ donnée dans ~~ce~~ cours. Les idées mises en place suffisent déjà à des calculs approchés de grande précision à l' aide d' une calculatrice.

Calcul approché

Pour estimer I_b^a sur base du travail qui précède, on peut " partitionner" [a,b] en n intervalles de longueur $\frac{b-a}{n}$ afin de faciliter les calculs ou l' élaboration d' un algorithme et faire choix de fonctions étagées constantes sur chacun de ces intervalles aussi proches que possible "par le bas" d' une part et "par le haut" d' autre part de f. Si la fonction est croissante (ou décroissante sur [a,b] la tâche se simplifie souvent .

Voici un exemple :

Calculons $I_0^5 x^2$



On peut par exemple partitionner [0,5] en 5 intervalles et choisir les fonctions étagées représentées sur la figure ci-dessus.

Ici, $\frac{b-a}{n} = \frac{5-0}{5} = 1$

On a donc

$$0 + 1 + 4 + 9 + 16 \leq I_0^5 x^2 \leq 1 + 4 + 9 + 16 + 25$$

$$30 \leq I_0^5 x^2 \leq 55$$

Avec une calculatrice, il est aisé de partager [0,5] en 50 intervalles, de travailler avec $\frac{b-a}{n} = \frac{5-0}{50} = 0{,}1$ et d' obtenir

$$\frac{1}{10}.(0 + 0{,}1^2 + 0{,}2^2 \ldots + 4{,}9^2) \leq I_0^5 x^2 \leq \frac{1}{10}.(0{,}1^2 + 0{,}2^2 + \ldots + 5^2) \qquad (1)$$

Remarques :

1.Avant même de procéder à ce calcul, nous pouvons mesurer la précision de l' approximation puisque l' écart entre les deux bornes est de $\frac{5^2}{10} = 2,5$. Si nous voulons une précision de 0,1 par exemple, il faudra subdiviser l' intervalle en n parties avec

$$5^2.\frac{5-0}{n} < 0,1 \quad \text{ou} \quad n > 1250$$

2.Nous voyons qu' il suffit d' augmenter n pour améliorer la précision de l' approximation mais en revanche, cela augmente la durée de nos calculs et les risques d' erreurs dûs aux arrondis. Avec une calculatrice que nous pourions forcer à arrondir toujours par défaut nous ne risquerions rien pour le premier membre de (1) et de même il faudrait une calculatrice arrondissant toujours par excès pour éviter les ennuis avec le second membre de (1).

3.La durée des calculs n' est guère gênante si nous parvenons à élaborer un programme pour réaliser le travail. Restent les erreurs d' arrondi.

4.La situation (1) est susceptible d' un traitement rapide, malheureusement pas adapté à un autre type de fonctions. En effet, on peut démontrer par récurrence (voir exercices) que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$$

Alors, $0 + 0,1^2 + 0,2^2 \ldots + 4,9^2 = \frac{1}{100}.(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots 49^2)$

$$= \frac{1}{100}.\frac{49.50.99}{6} = 404,25$$

et $$40,425 \leq I_0^5\, x^2 \leq 42,925$$

Exercices :

1.Trouver des encadrements de largeur inférieure ou égale à 1 pour les aires suivantes: a) $I_1^4\, x^2$

b) $I_0^{10}\, x^3$

c) $I_1^2\, \frac{1}{x}$

d) $I_0^{\frac{\pi}{2}}\, \sin x$

2. Démontrer les formules

a) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n.(n + 1)}{2}$

b) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n.(n + 1).(2n + 1)}{6}$

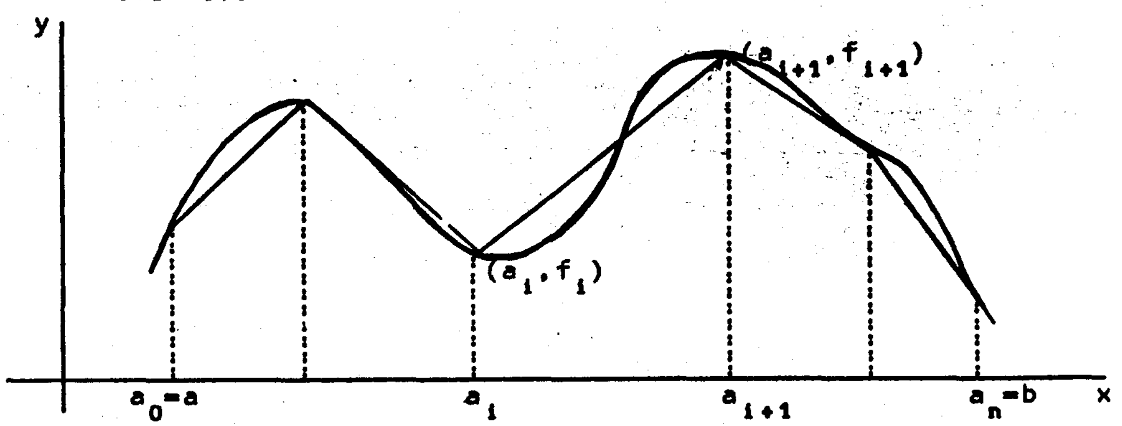
c) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2.(n + 1)^2}{4}$

3. Rédiger sur calculatrice ou ordinateur un programme permettant de calculer $I_a^b\, x^2$ pour une partition de [a,b] en n intervalles, c' est à dire calculer un encadrement de $I_a^b\, x^2$.
4. Soit T un trapèze de bases b_1, b_2 et de hauteur h. Montrer que l' aire de T est égale à $\frac{h.(b_1 + b_2)}{2}$.
5. Encadrer le volume du solide engendré par la rotation de la parabole $y = -x^2 + 1$ autour de l' axe OY et limité par le plan y = 0 dans E^3.

La méthode des trapèzes

Reprenons la fonction f, positive et bornée sur [a,b],et subdivisons [a,b] en n intervalles égaux de longueur $h = \frac{b - a}{n}$ dont les extrémités sont $a = a_0, a_1, a_2, \dots, a_n = b$. Calculons les valeurs de f en ces points, à savoir $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$ où $f_i = f(a_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Intuitivement, on peut approcher f par un polygone reliant le point (a_i, f_i) à (a_{i+1}, f_{i+1}) pour $i = 0, 1, \dots, n - 1$.



Quant à l' aire A déterminée sous la courbe $y = f(x)$, elle est approchée par une somme d' aires de trapèzes. Une telle aire est égale à

$$(a_{i+1} - a_i).\frac{f_i + f_{i+1}}{2} = \frac{h}{2}.(f_i + f_{i+1})$$

L' aire sous le polygone est égale à

$$A' = h.(\frac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1} + \frac{1}{2}f_n)$$

ce qui livre une approximation de A.

Mais quelle est la précision de cette approximation ? Nous ne disposons d' aucune inégalité pour en juger. Supposons que f soit deux fois dérivable sur $[a,b]$. Dans ce cas la théorie permet de prouver (mais cela dépasse nos possibilités actuelles) que l' erreur E commise en remplaçant A par A' est telle que

$$|E| = \frac{(b-a)^3}{12n^3}.|f''(c)| \text{ pour un certain point c de } [a,b].$$

Bien entendu, c n' est pas connu mais si nous pouvons trouver un maximum M tel que pour tout $x \in [a,b]$, $|f''(x)| \leq M$, nous saurions que

$$|E| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^3}.M$$

<u>Exemple</u> :

Pour calculer $I_1^2 \frac{1}{x}$, on calcule $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ qui est décroissante sur $[1,2]$. On a $|f''(x)| \leq 2$ sur $[1,2]$.

Dès lors $|E| \leq \frac{1}{12n^3}.2 = \frac{1}{6n^3}$.

Si nous voulons l' aire avec une précision de 10^{-2}, il suffira de travailler avec la condition $\frac{1}{6n^3} \leq 0{,}01$ ou $n^3 \geq \frac{100}{6}$ ou $n \geq 3$.

Il s' en suit que

$$I_1^2 \frac{1}{x} = \frac{1}{3} . (\frac{1}{2} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}} + \frac{1}{1+\frac{2}{3}} + \frac{1}{2} . \frac{1}{2})$$

$$= \frac{1}{3} . (\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \frac{1}{4})$$

$= 0{,}70$ avec une précision de l' ordre de 10^{-2}.

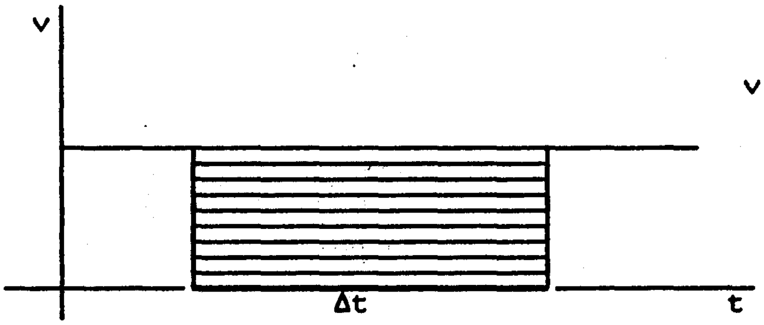
<u>Exercice</u> : Reprendre l' exercice 1 page 12 et déterminer des approximations à 10^{-1} près.

En voiture !

Abandonnons l' idée d' aire pour nous occuper d' un autre type de mesure.

Exemple 1 :

Une voiture se déplace durant deux heures à du 70 km/h. Quelle est la distance parcourue ? Facile ! Chacun sait que la réponse est 140 km mais nous nous préparons à des tâches plus difficiles et un peu de formalisation sera utile.

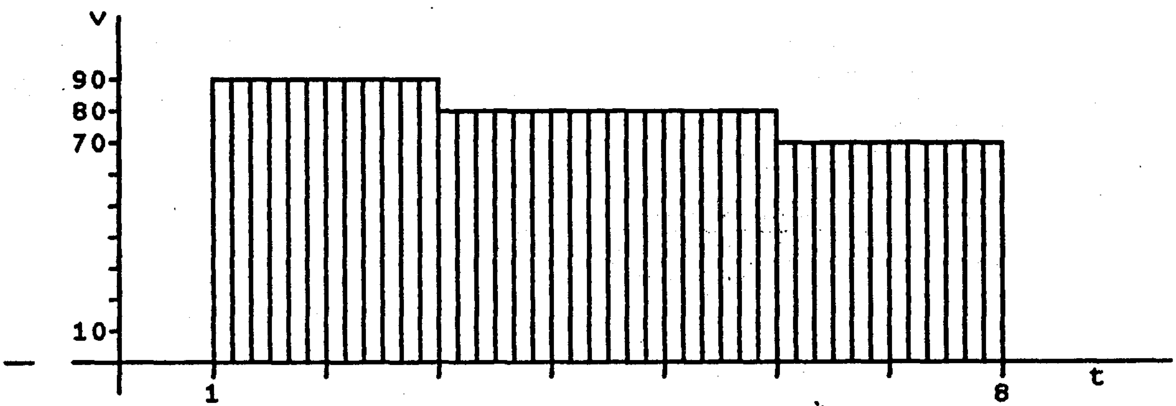


$$\text{vitesse} = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps écoulé}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

d' où $\Delta x = v.\Delta t = 70.2 = 140$ km

Exemple 2 :

Une voiture se déplace durant 2 heures à une vitesse de 90 km/h, durant 3 heures à une vitesse de 80 km/h et enfin durant 2 heures à une vitesse de 70 km/h. Quelle est la distance parcourue par la voiture ?



Bien entendu, il suffit d' additionner la distance parcourue durant les trois intervalles:

premier intervalle : $\Delta x = v.\Delta t = 90.2 = 180$

second intervalle : $\Delta x = v.\Delta t = 80.3 = 240$

troisième intervalle : $\Delta x = v.\Delta t = 70.2 = 140$

$\overline{560}$ km

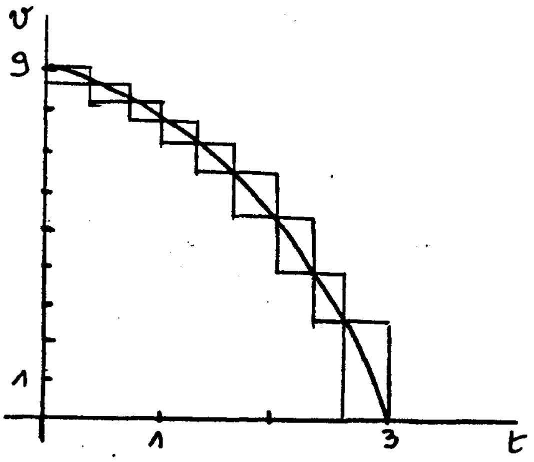
Observons que nous avons calculé $I_1^8\, f$ où f est une fonction étagée.

<u>Exemple 3</u> :

Cette fois, la voiture se déplace durant 3 heures à une vitesse variant comme suit

$$v = f(t) = -t^2 + 9 \quad \text{où} \quad 0 \leq t \leq 3$$

Quelle est la distance parcourue ? Nous ne pouvons obtenir une réponse immédiate par la méthode utilisée dans les exemples précédents



car la vitesse varie continûment. Nous pouvons facilement calculer une approximation de la distance parcourue en partageant l' intervalle de temps en petits morceaux durant lesquels la vitesse sera quasiment constante. Cela revient à remplacer la fonction f par deux fonctions étagées qui encadrent f et à calculer l' intégrale de celles-ci.

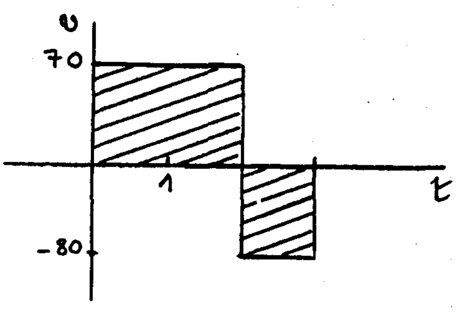
Nous voyons clairement que les méthodes utilisées ont une portée plus générale que les problèmes d' aires qui sont à leur origine et nous sommes prêts à examiner une fonction quelconque f définie sur [a,b] et la notion d' intégrale I_a^b f.

Faut-il nécessairement que f soit positive sur [a,b] ? Non! En voici un exemple :

<u>Exemple 4</u> :

Une voiture se déplace durant deux heures vers le nord à une vitesse de 70 km/h et ensuite vers le sud à une vitesse de 80 km/h. A quelle distance de son point de départ est-elle après ces trois heures de route ?

Ici, on peut considérer que la fonction f est positive sur [0,2] et



négative sur [2,3]. La solution du problème est I_0^3 f = 2.70 + 1.(-80) = 60 km. Si la question avait été, " Quelle distance la voiture a-t-elle parcourue ? ", la solution aurait été d = 2.70 − 1.(-80) = 220 km.

L' INTEGRALE DEFINIE

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur $[a,b]$ avec $a \leq b$, positive et bornée, c' est à dire qu' il existe des réels m et M tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout x appartenant à $[a,b]$.

En particulier, f peut être **étagée** ce qui signifie qu' il existe un partage de $[a,b]$ en intervalles $[a_i, a_{i+1}]$ avec $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$ tels que f prend une valeur constante f_i sur (a_i, a_{i+1}). Pour une fonction étagée, l' **intégrale définie** de f sur $[a,b]$ est le réel

$$I_a^b\, f = \sum_{i=0}^{n-1} f_i.(a_{i+1} - a_i)$$

Revenons au cas général d' une fonction f définie et bornée sur $[a,b]$.

Soit F^- l' ensemble des fonctions étagées f^- telles que $f^-(x) \leq f(x)$, $\forall\, x \in [a,b]$.

Soit F^+ l' ensemble des fonctions étagées f^+ telles que $f^+(x) \geq f(x)$, $\forall\, x \in [a,b]$.

I^- l' ensemble des réels $I_a^b\, f^-$ où $f^- \in F^-$

I^+ l' ensemble des réels $I_a^b\, f^+$ où $f^+ \in F^+$

Les ensembles I^- et I^+ sont non vides du fait que f est bornée. En outre, il existe au moins un réel à savoir $M.(b - a)$ qui est supérieur à tous les éléments de I^-, ce qu' on peut noter $I^- \leq M.(b - a)$. Ainsi, I^- est non vide et borné supérieurement. De même, I^+ est non vide et borné inférieurement par $m.(b - a)$.

Une propriété remarquable de $\mathbb{R}$ vue en cinquième est qu' un ensemble non vide $A \subseteq \mathbb{R}$, borné supérieurement possède un supremum (plus petite borne supérieure), A_{sup} et de même un ensemble non vide $A \subseteq \mathbb{R}$, borné inférieurement possède un infimum (plus grande borne inférieure), A_{inf}.

Donc à toute fonction f définie, positive et bornée sur $[a,b]$, nous parvenons à attacher deux réels qui sont

$$I^-_{sup} \text{ et } I^+_{\cancel{sup}\, inf}.$$

Comme $\forall\, x \in [a,b]$, $\forall\, f^- \in F^-$, $\forall\, f^+ \in F^+$, on a $f^- \leq f^+$, il s' en suit que $I^- \leq I^+$ et en particulier $I^-_{sup} \leq I^+_{\cancel{sup}\, inf}$.

On dit que f possède une **intégrale définie** $I_a^b\, f$ sur $[a,b]$ si

$$I^-_{sup} = I^+_{\cancel{sup}\,inf}$$

et alors, dans ce cas, par définition

$$\boxed{I^b_a\, f = I^-_{sup} = I^+_{\cancel{sup}\,inf}}$$

Nous obtenons ainsi une définition de l' intégrale basée sur de simples inégalités. Mais comment savoir si elle existe et comment la calculer ?

INTEGRALE ET DERIVEE

On peut démontrer mais cela dépasse nos forces que toute fonction **continue** sur [a,b] est **bornée** et **possède une intégrale définie** I^b_a f.

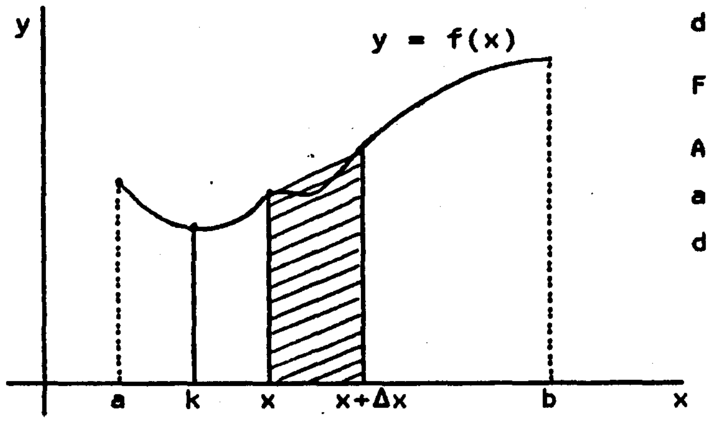
On peut aussi démontrer qu' il existe au moins une fonction F, appelée **primitive de f** telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$ c' est à dire qu' il existe une fonction F admettant f pour dérivée.

La grande découverte de **Leibnitz** et **Newton** fut de réaliser que le calcul de I^b_a f se ramène à celui de F ou encore que

$$\boxed{I^b_a\, f = F(b) - F(a)}$$

qu' on appelle souvent théorème fondamental du calcul différentiel et intégral. Une démonstration rigoureuse de ce théorème est hors de notre portée. Il fallut d' ailleurs 150 ans après Newton pour que les mathématiciens puissent maîtriser entièrement cette démonstration.

Nous pouvons tout de même nous faire une idée de la démarche des pionniers.



Considérons la fonction F définie par

$F(x) = I^x_k\, f$ où $x \in [a,b]$

Après nos travaux avec les aires, il n' est pas difficile de se persuader de ce que

$$I^x_k\, f + I^{k'}_x f = I^{k'}_k f$$

et que si l' on donne un accroissement Δx à x,

$$\begin{aligned} F(x + \Delta x) - F(x) &= I_k^{x+\Delta x} f - I_k^x f \\ &= I_k^x f + I_x^{x+\Delta x} f - I_k^x f \\ &= I_x^{x+\Delta x} f \end{aligned}$$

Dès lors $F'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{I_x^{x+\Delta x} f}{\Delta x}$$

Si Δx est "petit", nous pouvons assimiler la courbe $y = f(x)$ au segment de droite $[f(x), f(x + \Delta x)]$ et dès lors $I_x^{x+\Delta x} f$ s' identifie à l' aire d' un trapèze, à savoir

$$\Delta x \cdot \frac{f(x) + f(x + \Delta x)}{2}$$

On est conduit à

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{I_x^{x+\Delta x} f}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) + f(x + \Delta x)}{2} \\ &= 2.\frac{f(x)}{2} = f(x) \end{aligned}$$

et à l' idée que

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

D' autre part,

$$\boxed{I_a^b f = I_a^k f + I_k^b f = I_k^b f - I_k^a f = F(b) - F(a)}$$

Une autre idée des pionniers est que f ressemble à un fonction étagée sur des intervalles infiniment petits notés dx et que $I_a^b f$ serait une sorte de **somme infinie de rectangles f(x).dx** ce qu' ils notaient par $\int_a^b f(x).dx$ qui est encore la notation courante de l' intégrale. Le signe $\int$ (stylisation de S comme somme) est la notation standard pour le concept d' intégrale.

Dans ces notations, nous avons donc

L' intégrale définie

$$\int_a^b f(x).dx = F(b) - F(a)$$

$$= \Big[F(x) \Big]_a^b$$

où F(x), primitive de f(x) est telle que $F'(x) = f(x),\ x \in [a,b]$

Exercices :

1.Vrai ou faux ?

a) $\int_0^2 \frac{1}{2} u^2 \, du + \int_2^3 \frac{1}{2} u^2 \, du = \int_0^3 \frac{1}{2} u^2 \, du$

b) $\int_0^2 \sqrt{1 + x^2} \, dx + \int_2^3 \sqrt{1 + t^2} \, dt = \int_0^3 \sqrt{1 + u^2} \, du$

c) $\int_0^{10} \sqrt{1 + x^2} \, dx - \int_0^9 \sqrt{1 + x^2} \, dx = \int_9^{10} \sqrt{1 + x^2} \, dx$

d) $\int_0^2 3.\sqrt{1 + x^2} \, dx = 3.\int_0^2 \sqrt{1 + x^2} \, dx$

e) $\int_0^2 x^2.\sqrt{1 + x^2} \, dx = \left(\int_0^2 x^2 \, dx \right).\left(\int_0^2 \sqrt{1 + x^2} \, dx \right)$

f) $\int_0^2 x^2.\sqrt{1 + x^2} \, dx = x^2.\int_0^2 \sqrt{1 + x^2} \, dx$

g) $\int_0^2 \left(\sqrt{1 + t^2} + \sqrt{1 + t^4} \right) dt = \int_0^2 \sqrt{1 + t^2} \, dt + \int_0^2 \sqrt{1 + t^4} \, dt$

2.Calculer l' aire de la portion de plan située entre les courbes suivantes

a) $y = x^2,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 5.$

b) $y = \sin x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{2}.$

c) $y = \frac{1}{x^2},\ y = 0,\ x = 3,\ x = 6.$

d) $y = x^3,\ y = 0,\ x = -7,\ x = 3.$

e) $y = x^2 + x^3\ ,\ y = 0,\ x = -3,\ x = 4.$