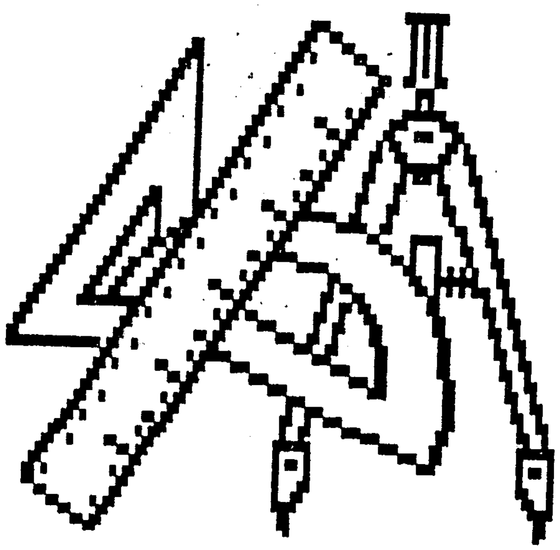
FLASH FLASH FLASH FLASH

3

Lieux geometriques



LES LIEUX GEOMETRIQUES

On appelle lieu géométrique, un **ensemble de points vérifiant une propriété imposée**. On peut imposer celle-ci de différentes manières :

- Un point m du lieu se trouve dans une position particulière par rapport à des éléments fixes. Ceci permet de déterminer une relation $f(x , y) = 0$ que doivent vérifier les coordonnées (x , y) du point m. Cette relation est l' **équation du lieu**. Cette méthode est appelée **méthode de traduction**.
- On part de deux courbes qui se déplacent en fonction d' un paramètre. A chaque valeur du paramètre correspond zéro, une ou plusieurs intersections des deux courbes. Le lieu est alors l' ensemble de ces intersections. Cette méthode est appelée **méthode des génératrices**.

Exercices :

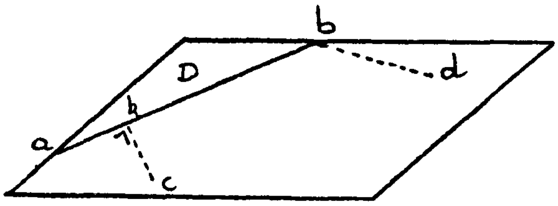
1. Déterminer le lieu des points dont la distance à un point donné est une constante donnée l et ce, dans $\mathbf{E}^1$, $\mathbf{E}^2$, $\mathbf{E}^3$.

2. Déterminer le lieu des points du plan (de l' espace) dont la distance à deux droites sécantes est égale.

3. Déterminer le lieu des points du plan (de l' espace) dont la distance à deux points donnés est une constante donnée l.

4. Déterminer le lieu des points situés à une distance donnée d' une droite D a) dans le plan
   b) dans l' espace
   c) dans un parallélogramme

Cette question peut surprendre dans un parallélogramme ... Dans ce cas, on appelle droite, les segments fermés dont les extrémités appartiennent au parallélogramme. La distance d' un point p à une droite D est alors la mesure du plus court chemin de ce point à la droite. La distance de c à D est alors la distance de c à k. La distance de d à D est la distance de d à b.



5.Déterminer le lieu des points situés à distance donnée l d' un segment [a,b] dans le plan, dans l' espace, dans un parallélogramme($l \in \mathbb{R}_0^+$).

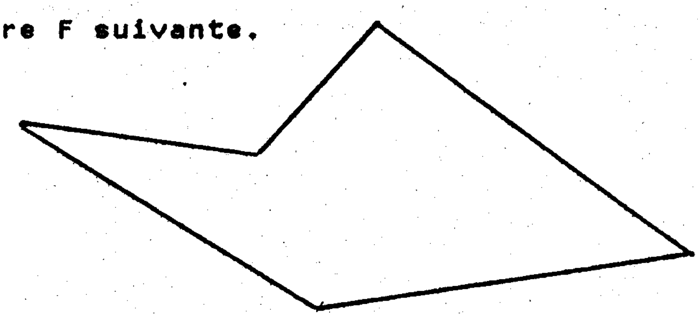
6.Que devient la question n° 2 dans un parallélogramme ?

7.Déterminer l' ensemble des points équidistants de 3 points alignés.

8.Déterminer le lieu des points équidistants de trois droites, sécantes deux à deux et non concourantes dans $\mathbb{E}_2$.

9.Déterminer l' ensemble des points situés à distance donnée l, à la fois à deux cercles tangents extérieurement, de même rayon dans $\mathbb{E}_2$.

10.Si F est une figure du plan, on appelle mirador de f, un point m tel que pour tout f ∈ F, [m,f] ⊂ F. Trouver le lieu des miradors de la figure F suivante.



11.On donne deux droites sécantes A et B du plan. Déterminer le lieu des points dont la distance à A est inférieure ou égale à la distance à B.

12.Déterminer l'ensemble des points équidistants de deux demi-droites de même origine dans le plan.

13.Déterminer le lieu des points situés à une distance donnée l, d' un carré.

14.Un ours part d' un point p sur la terre. Il parcourt 1 km vers le nord, 1 km vers l' est et ensuite 1 km vers le sud. Il se retrouve en p. Quelle est la couleur de l' ours ?

15. Déterminer dans $\mathbb{E}_2$, le lieu des droites situées à une distance constante, donnée d' un point o.

16. Déterminer dans $\mathbb{E}_2$, le lieu des droites équidistantes de deux points a et b du plan.

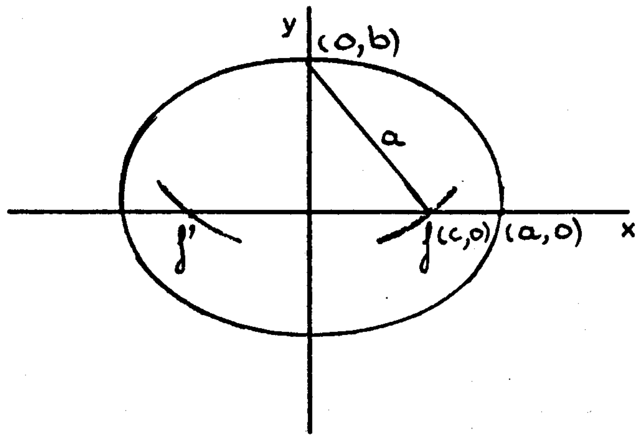
17. Déterminer dans $\mathbb{E}_2$, le lieu des points situés à égale distance d' une droite et d' un cercle, la droite ne traversant pas le cercle.

TOUS LES EXERCICES SUIVANTS SE TRAITENT DANS LE PLAN $\mathbb{E}_2$

18. Rappel du cours de 5ème : Déterminer le lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes f et f', appelés foyers est constante et égale à 2a, $a \in \mathbb{R}_0^+$.

$|ff'| = 2c$, $c < a$ et $a \in \mathbb{R}_0^+$.

Ellipse



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

où $a^2 = b^2 + c^2$

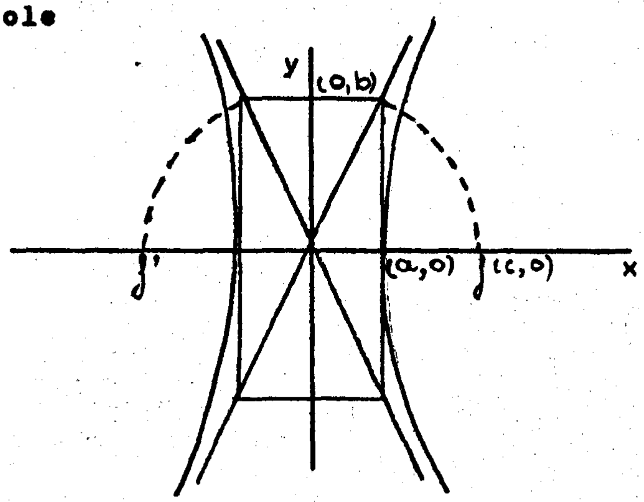
19. Rappel du cours de 5ème : Déterminer le lieu des points dont la différence des distances à deux points fixes f et f', appelés foyers est constante et égale à 2a, $a \in \mathbb{R}_0^+$

$|ff'| = 2c$, $c \in \mathbb{R}_0^+$

Hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

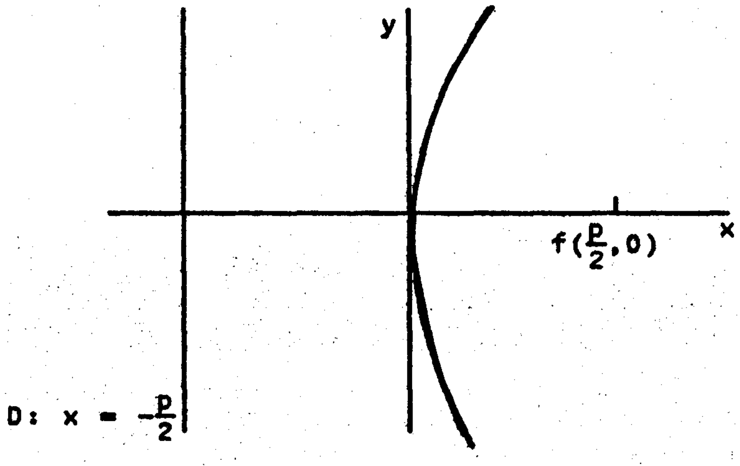
où $a^2 = c^2 - b^2$



20.Rappel du cours de 5ème : Déterminer le lieu des points équidistants d'un point fixe f, appelé foyer et d' une droite fixe D appelée directrice sachant que la distance entre le foyer et la directrice vaut p, $p \in \mathbb{R}_0^+$.

Parabole

$$y^2 = 2px$$



21.Deux droites A et B sont perpendiculaires. On demande le lieu des points tels que la somme des carrés des distances de ces points à chacune des deux droites est une constante donnée.

22.Deux droites A et B sont perpendiculaires. Tout point du plan permet de déterminer un seul rectangle dont il est un sommet et dont les deux côtés passant par ce sommet sont les segments de droites parallèles à A et B, limités à A et B. On demande de déterminer le lieu des points tels que la surface des rectangles ainsi construits soit égale à une constante donnée.

23. Sur un cercle de diamètre fixe [ab] et de centre o, se déplace un point. Déterminer le lieu du sommet d du losange oadc.

24. On donne deux points fixes a et b .Déterminer le lieu des symétriques de b par rapport aux droites passant par a.

25. Dans une base orthonormée, on donne la droite D qui a pour équation $x = a$. Celle-ci coupe l' axe X en un point p. Si Z est une droite mobile passant par o qui coupe D en q, déterminer le lieu des points de rencontre de la parallèle à l' axe X menée par q avec la perpendiculaire à Z menée par p.

26. Sur une droite fixe D, on considère deux points variables a et b tels que $|ab| = k \in \mathbb{R}_0^+$. Si c est un point fixe n' appartenant pas à D, quel est le lieu des points de rencontre de la perpendiculaire à cb en c avec le cercle de centre a et de rayon $|ac|$?

27. Déterminer l'ensemble des points dont la somme des carrés des distances aux quatres côtés d' un carré , de côté de longueur c, est constante et vaut $2a^2$.

28. On donne deux droites fixes se coupant en un point o. Sur la première de ces deux droites, on donne deux points fixes p et q. Sur la deuxième, on a deux points mobiles r et r' tels que $|or| = |or'|$. Si s est l' intersection des droites pr et qr', quel est le lieu de s ?

29. On donne un triangle abc ayant une base bc fixe. Son sommet a se déplace sur une droite fixe D non parallèle à bc. Quel est le lieu du centre de gravité du triangle ?

30. On donne un segment [ab] de longueur 2. En a on élève la droite A perpendiculaire à [ab]. En b on élève la droite B perpendiculaire à [ab]. Par a, on mène la droite mobile C coupant B en c. Par b, on mène la droite mobile D coupant A en d. Sachant que $\overrightarrow{ad}.\overrightarrow{bc} = 4$, Quel est le lieu du point d' intersection des droites ac et bd ?

31. Quel est le lieu des points dont le rapport des distances à deux points fixes a et b est constant et égal à $k \in \mathbb{R}_0^+$?

32. Etant donnés trois points s, o, p en ligne droite et une droite P passant par p, on prend sur cette dernière deux points x et y tels que | xy | = | yp |. Quel est le lieu des points m communs aux deux droites sx et oy ?

33. Le sommet a d' un triangle est fixe et la base bc de longueur constante glisse sur une droite D. Par un point p fixe de D, on mène la droite pq parallèle à ac. Cette droite coupe ab en q. Quel est le lieu du point q ?

34. On donne un cercle fixe de rayon R et un point fixe p extérieur au cercle. Une droite variable passant par p coupe le cercle en s et t. Quel est le lieu des milieux du segment [st] ?

35. On donne deux droites fixes P et Q se coupant en un point a et un point fixe r extérieur à ces droites. Une droite variable R passant par r coupe P en p. La droite joignant p au milieu de [ar] coupe Q en q. La droite menée par q parallèlement à ar coupe R en s. Déterminer le lieu de s.

36. On donne trois points fixes a, b, c non alignés et une droite D variable parallèle à bc. Si $D \cap ab = \{ b' \}$ et $D \cap ac = \{ c' \}$, déterminer le lieu des points communs à bc' et cb'.

37. On donne deux droites fixes perpendiculaires A et B se coupant en k et un point fixe p extérieur à ces deux droites. Une droite mobile passant par p coupe A et B respectivement en a et b. En a, on élève la perpendiculaire à A et en b on élève la perpendiculaire à B. Celles-ci se coupent en c. On considère la droite passant par c et le milieu de ka ainsi que la perpendiculaire issue de k sur cette droite. Quel est le lieu du point d' intersection de ces deux dernières droites ?

38.Si p et q sont deux points fixes de la base bc du triangle fixe abc et qu'une droite mobile parallèle à bc coupe ab en d et ac en f, quel est l' ensemble des points de rencontre des droites dq et fp ?

39.Dans un triangle abc fixe, on inscrit un parallélogramme variable defg d' angles fixes dont le côté de glisse sur ac. Quel est le lieu des centres de ces parallélogrammes ?

40.On donne D et D', deux droites sécantes et un point p extérieur à ces droites. Par p on mène une droite mobile qui coupe D et D' respectivement en a et b. Par a et b, on mène des parallèles respectivement à D' et D. Quel est l' ensemble des points de rencontre de ces parallèles quand ab tourne autour de p ?

41.On donne deux droites fixes P et Q se coupant en un point o .Sur la première sont situés deux points fixes a et b de telle façon que o soit le milieu de [ab]. Sur la deuxième droite se déplacent les points c et d de telle façon que $\overrightarrow{oc} = k.\overrightarrow{od}$, $k \in \mathbb{R}_0^+$. Déterminer le lieu du point d' intersection de ac et de bd.

42.Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d' axes X et Y, on donne le point p(1,0) et un point variable m(x,y).
On demande : a) de déterminer le lieu de m si la différence des distances de m à p et de m à Y est constante et égale à 1. Construire le lieu.
b) de déterminer le lieu de m si la somme des distances de m à p et de m à Y est constante et égale à 5. Construire le lieu.

43.On donne un triangle rectangle abc fixe avec a pour sommet de l' angle droit. ~~La~~ une perpendiculaire au segment [bc] en un de ses points p coupe ab en q et ac en r. Quel est l' ensemble des points d' intersection de br et cq.

44. On donne la parabole $P : y = (x + 1)^2$ et la famille de droites comprenant l'origine des axes, o. On appelle p_1 et p_2 les éventuels points de rencontre entre P et une des droites. Déterminer le lieu des milieux du segment $[p_1p_2]$.

45. On donne deux points fixes a et b. Deux demi-droites mobiles A et B sont fixées rigidement entre elles de sorte que l'angle qu'elles forment entre elles reste constant. De plus, a appartient à A et b appartient à B. Déterminer le lieu des points d'intersection de A et B.