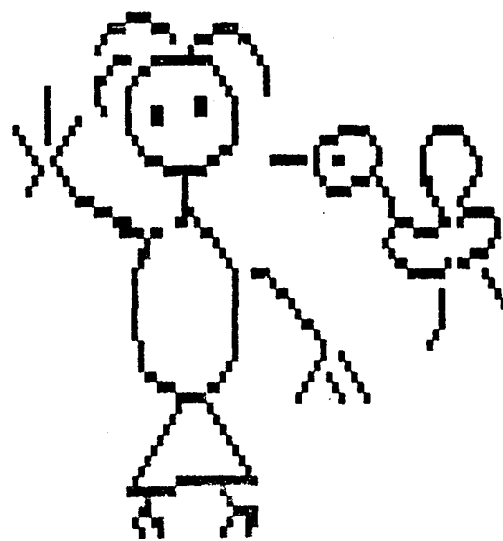


5

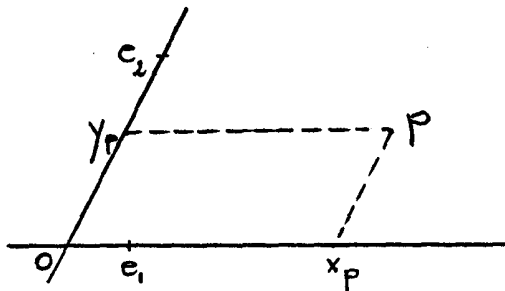
**Coordonnees,  
courbes,  
equations**



- COORDONNEES, COURBES, EQUATIONS -

SYSTEMES DE COORDONNEES

Dans le plan, nous sommes habitués depuis longtemps aux systèmes en

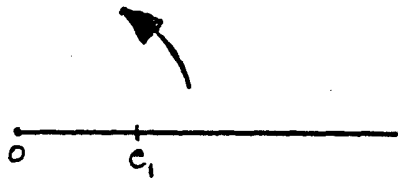


coordonnées cartésiennes, basés sur un repère constitué d'une origine  $o$ , de deux points unités  $e_1, e_2$  non alignés avec  $o$  et les projections d'un point sur les droites  $oe_1, oe_2$  parallèlement à ces mêmes droites.

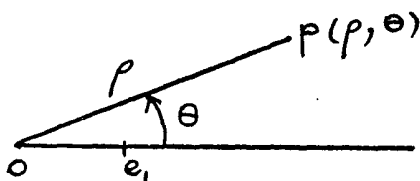
Il existe d'autres moyens de représenter un point du plan ou de l'espace au moyen de nombres réels.

Exemple 1 : Les coordonnées polaires

Nous avons déjà étudié brièvement celles-ci dans le chapitre consacré aux nombres complexes. On fixe un point  $o$  appelé origine ou pôle, un point unité  $e_1 \neq o$  et une orientation du plan. Comme on l'a déjà fait en trigonométrie, le choix d'une orientation revient à distinguer sur la perpendiculaire à  $oe_1$  en  $o$ , un des deux points situés à distance  $|oe_1|$  de  $o$ . Bref, une orientation est automatiquement déterminée si on donne au départ une base orthonormée  $o, e_1, e_2$  et  $c'$  est ainsi qu'on procède en pratique.



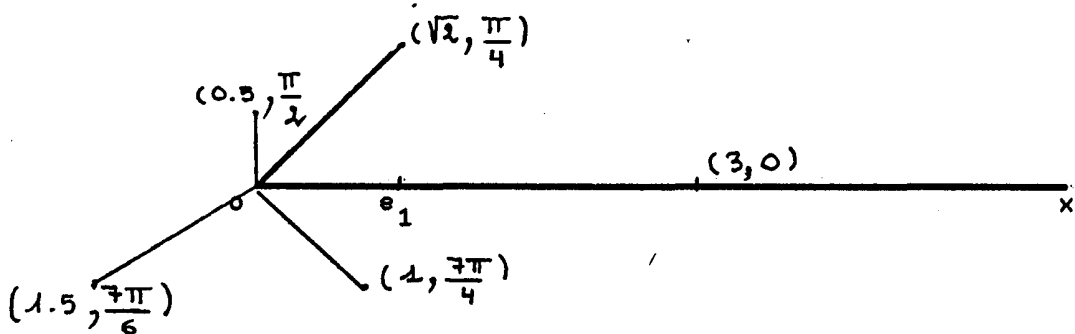
La demi-droite  $[o, e_1]$  est appelé axe polaire et un point  $p$  du plan donne lieu à deux coordonnées polaires qui sont



- 1) la distance  $\rho$  du point  $p$  à  $o$  mesurée avec l'unité  $|oe_1|$
- 2) l'angle orienté  $\theta \in [0, 2\pi[$  que fait le couple de demi-droites  $[oe_1]$  et  $[op]$ .

Nous constatons que tout point  $p \neq o$  possède deux coordonnées  $\rho, \theta$  bien définies. Par contre, pour le point  $o$ , l'angle  $\theta$  n'est pas défini. Ceci explique le nom de pôle affecté à ce point. le pôle est

en revanche le seul point pour lequel  $\theta = 0$ . Voici quelques points et leurs coordonnées polaires :



Le système, de coordonnées polaires possède un avantage : deux points distincts ont des couples de coordonnées  $(\rho, \theta)$  distincts. En revanche, la donnée d'un couple de réels  $(\rho, \theta)$  détermine un point admettant ces nombres pour coordonnées polaires uniquement si  $\rho \geq 0$  et  $\theta \in [0, 2\pi[$ . On évite parfois cet inconvénient par les conventions suivantes :

- a) Si  $\theta \notin [0, 2\pi[$ , on réduit  $\theta$  modulo  $2\pi$  comme on l'a déjà fait en trigonométrie. Ainsi on identifie par exemple  $-\frac{\pi}{2}$ ,  $3\frac{\pi}{2}$ ,  $7\frac{\pi}{2}$ ,  $11\frac{\pi}{2}$ ...
- b) Si  $\rho < 0$ , on représente  $(\rho, \theta)$  par le point de coordonnées  $(-\rho, \theta + \pi)$ . ainsi on identifie  $(-2, \frac{\pi}{3})$  avec  $(2, \frac{4\pi}{3})$ .

Avec ces conventions, tout couple de réels est représenté par un point mais en revanche tout point représente une infinité de couples de réels.

Exemple 2 :

En géographie nous sommes habitués à l'usage de la longitude et de la latitude sur une sphère. La longitude n'étant pas déterminée aux pôles.

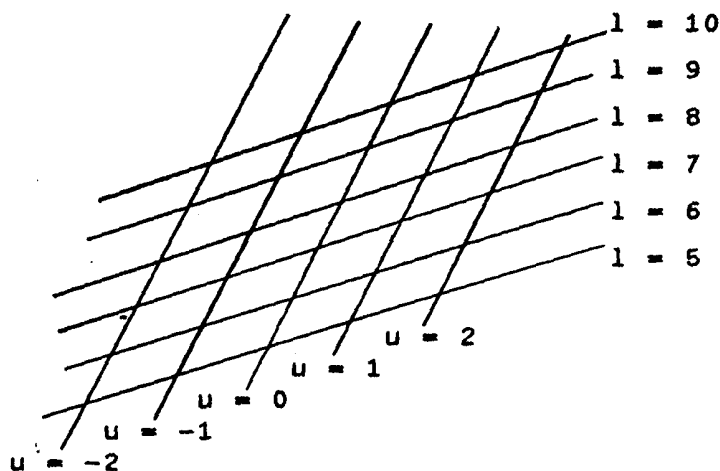
Nous pouvons concevoir d'autres systèmes de coordonnées. Limitons-nous ici au cas du plan. Considérons un faisceau de courbes du plan. Nous entendons par là, une famille de courbes qui dépend d'un paramètre réel  $u$  de telle manière que

- 1)  $u$  prend ses valeurs dans un intervalle de  $\mathbb{R} \cup \{\infty\} = \bar{\mathbb{R}}$  et pour toute valeur de  $u$ , on obtient une courbe  $C_u$  bien déterminée dans le faisceau.

2) Par tout point du plan passe une et une seule courbe  $C_u$  sauf en un nombre fini de points appelés pôles et ceux-ci ont la particularité d'appartenir à toutes les courbes  $C_u$ .

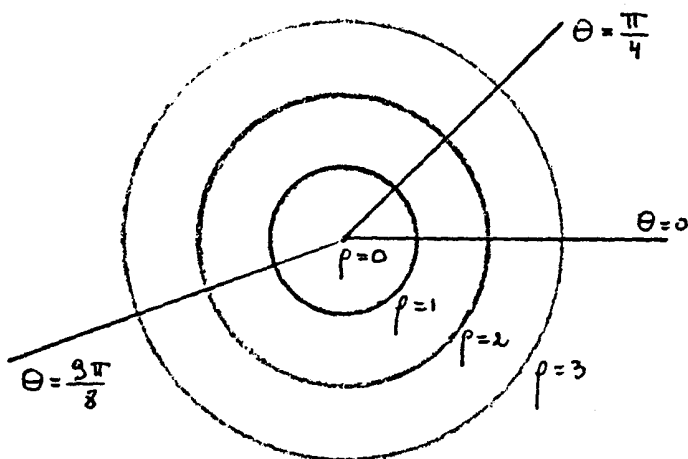
Exemple 3 :

Une direction de droites parallèles, est un faisceau paramétré par  $\mathbb{R}$  qu' on utilise dans les systèmes de coordonnées cartésiennes. Celles-ci mettent deux tels faisceaux en oeuvre.



Exemple 4 :

Les coordonnées polaires mettent également deux faisceaux en évidence. D' une part, les cercles de centre o (y compris le cercle de centre nul) constituent un faisceau paramétré par  $\mathbb{R}^+$ . (Relevons qu'on est amené à considérer un point isolé comme une courbe). D' autre part, les demi-droites fermées d' origine o paramétrées par  $[0, 2\pi[$ . Ici, nous obtenons un pôle en o.



Exemple 5 :

Plaçons-nous dans un système de coordonnées cartésiennes  $(x,y)$ . Considérons deux fonctions  $f$  et  $g$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  en supposant que les

courbes  $f(x,y) = 0$  et  $g(x,y) = 0$  aient un nombre fini de points d'intersection.

Le faisceau de courbes déterminé par  $f$  et  $g$  est paramétré par  $\bar{\mathbb{R}}$  et constitué par les courbes d' équations

$$C_{\mu,\nu} : \mu.f(x,y) + \nu.g(x,y) = 0 \quad \text{où } \mu,\nu \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Pour de débarrasser de l' ennui de traîner deux paramètres, on divise (1) par  $\nu$  ce qui livre

$$\frac{\mu}{\nu}.f(x,y) + g(x,y) = 0$$

En appelant  $u = \frac{\mu}{\nu}$ , on obtient

$$u.f(x,y) + g(x,y) = 0 \quad \text{où } u \in \bar{\mathbb{R}} \quad (2)$$

Il est à noter que si  $\nu = 0$ ,  $u = \infty$ . Notre faisceau (2) est donc constitué de courbes d' équation

$$C_u : u.f(x,y) + g(x,y) = 0 \quad \text{où } u \in \mathbb{R}$$

et de  $C_\infty = f(x,y) = 0$

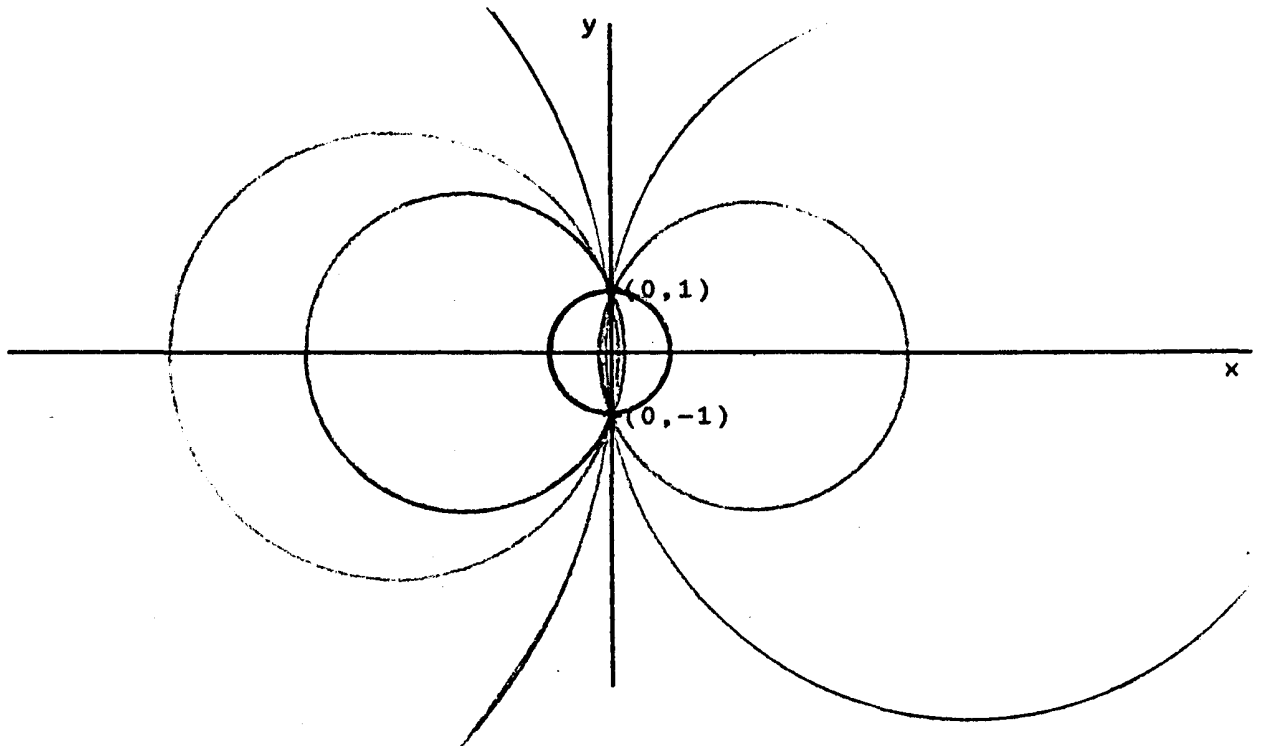
Les pôles du faisceau sont les points d' intersection des courbes d' équation  $f(x,y) = 0$  et  $g(x,y) = 0$ .

Exemples :

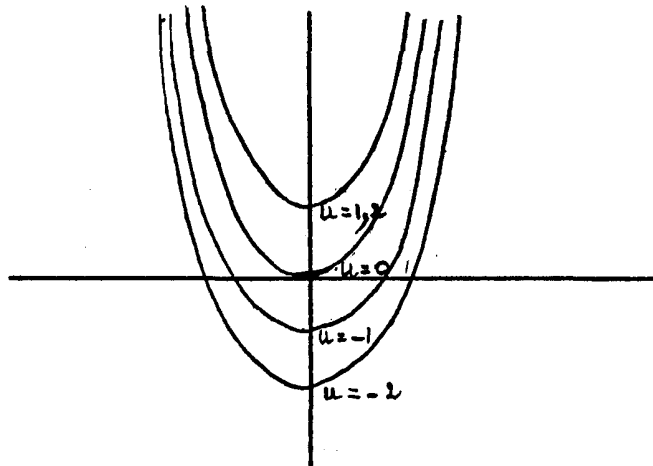
a)  $u.(x^2 + y^2 + 1) + x + y = 0$  livre un faisceau de cercles sans pôle dans un repère orthonormé.

b) Dans une base orthonormée, les cercles passant par  $(0,-1)$  et  $(0,1)$  sont ceux d' équation  $x^2 + y^2 + mx - 1 = 0$ . Si on y adjoint la droite passant par ces deux points, on obtient le faisceau d' équation

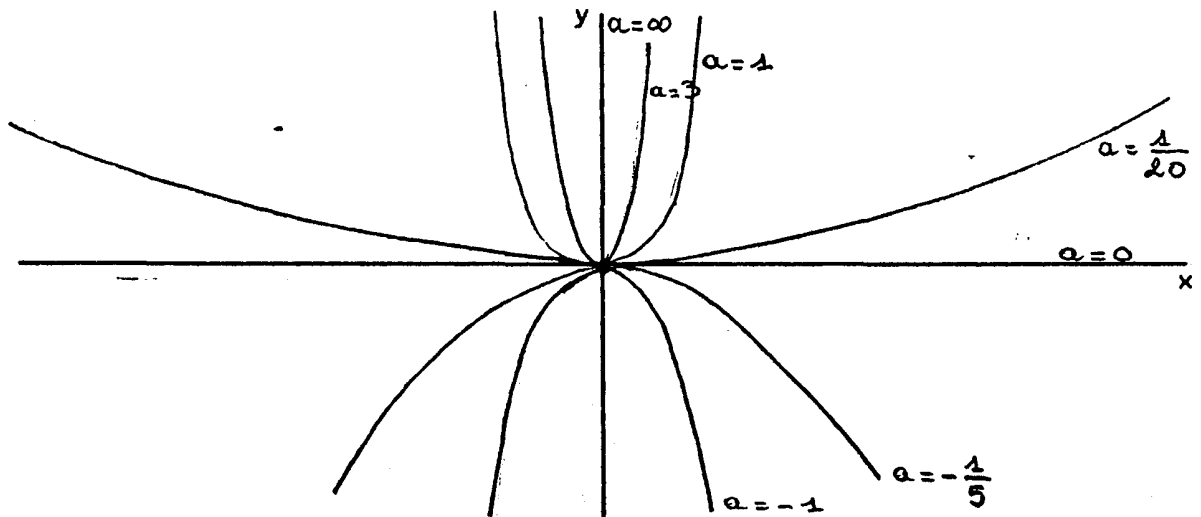
$$(x^2 + y^2 - 1) + ux = 0 \quad \text{où } u \in \bar{\mathbb{R}}$$



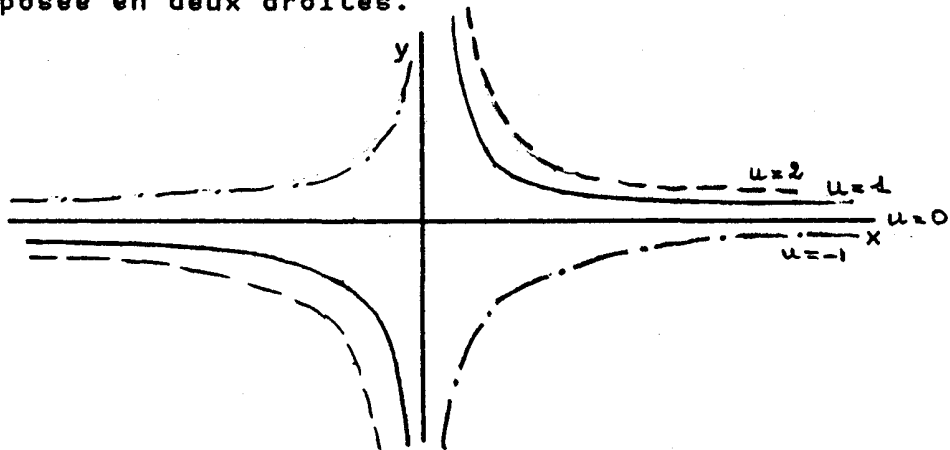
c) Les paraboles d' équation  $y = x^2 + u$  où  $u \in \mathbb{R}$  constituent un faisceau dépourvu de pôle.



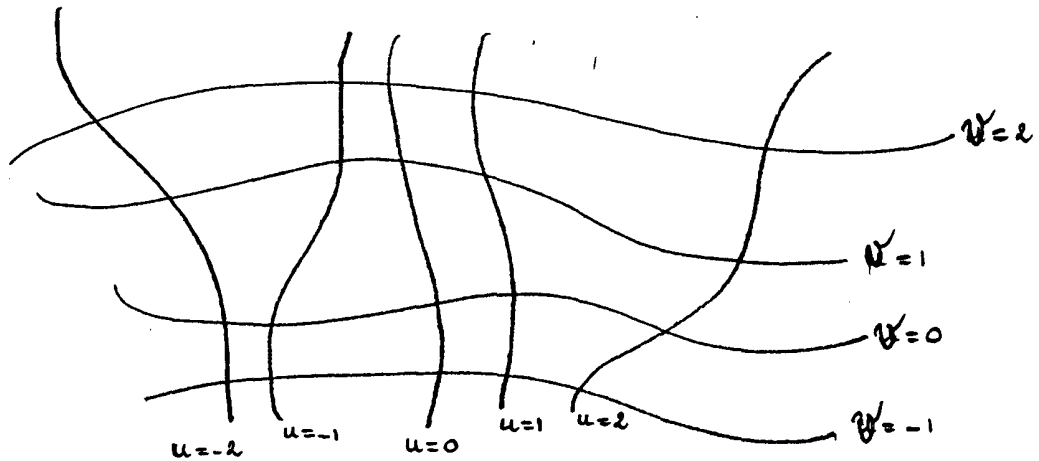
d) Les paraboles d' équation  $y = a \cdot x^2$  auxquelles s' adjoint la droite  $x = 0$  (pour  $u = \infty$ ) livrent un faisceau paramétré par  $\mathbb{R}$ , de pôle o.



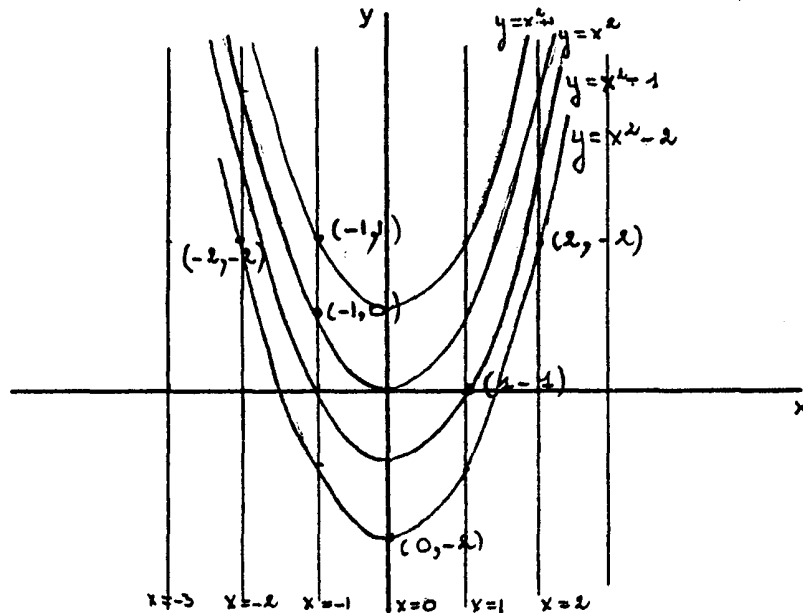
e) Les hyperboles d' équation  $xy = u$  où  $u \in \mathbb{R}$  constituent un faisceau paramétré par  $\mathbb{R}$  et sans pôle. Un des membres du faisceau est la courbe  $xy = 0$  décomposée en deux droites.



Supposons qu'on se donne deux faisceaux de courbes  $F$  et  $F'$  tels que tout membre de  $F$  coupe tout membre de  $F'$  en un et un seul point. Dans ce cas,  $F$  et  $F'$  nous livrent un système de coordonnées curvilignes dans lequel tout point (autre qu'un pôle) est repéré par deux nombres réels. Voici un dessin suggérant la situation générale.



Dans un repère cartésien, la droite  $x = u$  et les paraboles  $y = x^2 + v$  livrent un système de coordonnées :



Supposons qu'on dispose d'une fonction  $f$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow (u(x, y), v(x, y))$$

qui soit bijective. Alors les courbes  $u(x, y) = a$  où  $a$  est fixé dans  $\mathbb{R}$  et  $v(x, y) = b$  où  $b$  est fixé dans  $\mathbb{R}$  livrent un système de coordonnées sans pôle. L'exemple précédent fonctionne sur ce modèle si on pose  $u(x, y) = x$  et  $v(x, y) = y - x^2$ .

Exercices :

1. Voici des familles de courbes dépendant d'un paramètre. Lesquelles sont des faisceaux ? Quels en sont les pôles ? Pour chaque faisceau, dessiner les courbes liées à quelques valeurs particulières du paramètre.

a)  $C_u : u(3x - y + 1) + 2x - 1 = 0 \quad u \in \bar{\mathbb{R}}$

b)  $C_u : u(x^2 + y^2 + x) + 2x = 0 \quad u \in \bar{\mathbb{R}}$

c)  $C_u : u^2x + u(x - y) + x + y + 1 = 0 \quad u \in \mathbb{R}$

a)  $C_u : y = x^u \quad u \in \mathbb{R}$

2. On donne deux faisceaux de courbes  $F$  et  $F'$ . Vérifier s'ils déterminent un système de coordonnées. Déterminer les pôles et quelques courbes du faisceau.

a)  $F \begin{cases} C_u : y = ux^2, u \in \mathbb{R} \\ C_\infty : x = 0 \end{cases}$  et  $F' \begin{cases} C'_v : y = vx, v \in \mathbb{R} \\ C'_\infty : x = 0 \end{cases}$

b)  $F \begin{cases} C_u : y = ux + 1, u \in \mathbb{R} \\ C_\infty : x = 0 \end{cases}$  et  $F' \begin{cases} C'_v : y = vx, v \in \mathbb{R} \\ C'_\infty : x = 0 \end{cases}$

c)  $F \begin{cases} C_u : y = x^2 + y^2 + ux, u \in \mathbb{R} \\ C_\infty : x = 0 \end{cases}$

et  $F' \begin{cases} C'_v : y = x^2 + y^2 + vy, v \in \mathbb{R} \\ C'_\infty : y = 0 \end{cases}$

3. La transformation  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \rightarrow (u(x, y), v(x, y))$  est-elle bijective dans les cas suivants ? Si oui, dessiner le système de coordonnées qu'elle détermine.

a)  $u(x, y) = x^2 + y^2$  et  $v(x, y) = x^2 - y^2$

b)  $u(x, y) = x + y$  et  $v(x, y) = x - y$

c)  $u(x, y) = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha$  et  $v(x, y) = -x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha$

où  $\alpha \in \mathbb{R}$

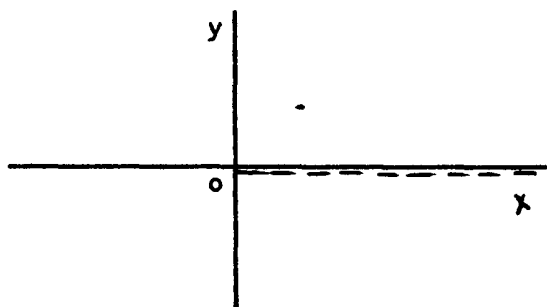


**CHANGEMENTS DE COORDONNÉES**

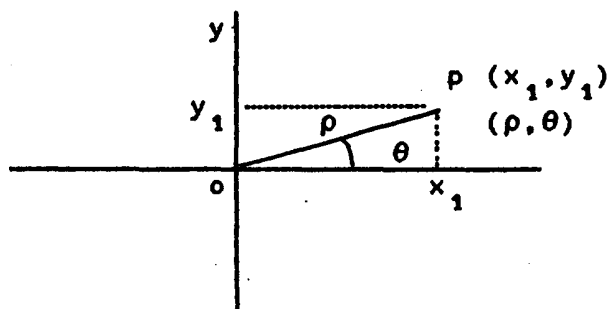
En manipulant les nombres complexes, nous avons vu qu'il peut être utile de passer d'un système de coordonnées à un autre afin de simplifier les calculs ou d'autres considérations. Reprenons quelques aspects de ce thème.

**Exemple 1: Passage de coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes et vice-versa.**

Quand on parle d'un tel passage, il est toujours sous-entendu que les deux systèmes ont la même origine  $o$ , le même point unité  $e_1$  et que le point unité  $e_2$  du système cartésien est celui dont les coordonnées polaires sont  $(1, \frac{\pi}{2})$ .



————— : système de coordonnées cartésiennes  
 - - - - - : système de coordonnées polaires



Le passage d'un système à un autre s'effectue facilement :  
 Si  $p(x, y)$  et  $p(\rho, \theta)$ , on a

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} & \\ \theta = \arctg \frac{y}{x} & \text{si } x > 0 \\ \theta = \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0 \\ \theta = 3 \cdot \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0 \\ \theta = \pi + \arctg \frac{y}{x} & \text{si } x < 0 \end{array} \right.$$

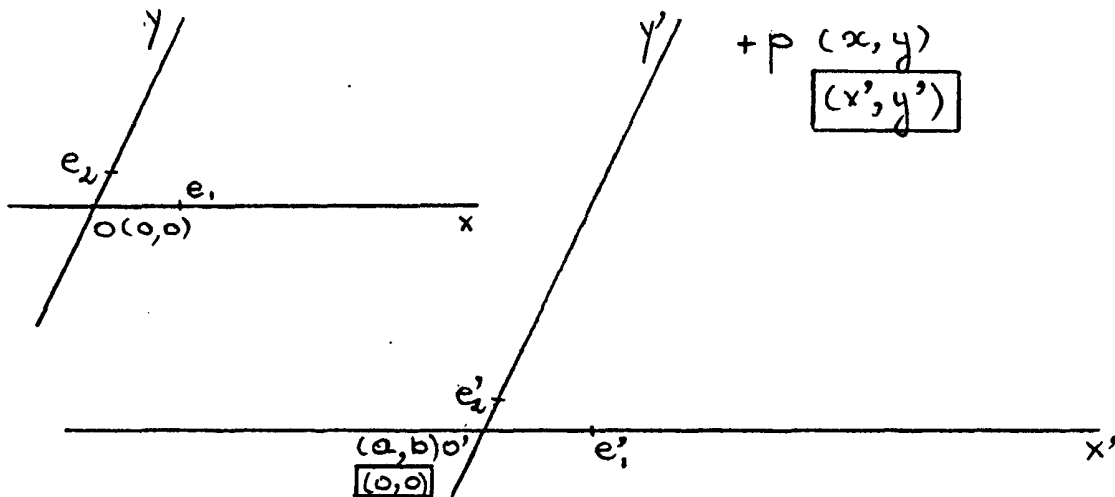
ou

$$\text{ou } \left\{ \begin{array}{l} \rho = \pm \sqrt{x^2 + y^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} + \text{ si } x > 0 \\ - \text{ si } x < 0 \end{array} \right. \\ \theta = \arctg \frac{y}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \\ \quad = \frac{\pi}{2} \quad \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0 \\ \quad = 3 \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0 \end{array} \right.$$

Rappelons que  $\arctg x \in ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ .

Venons-en au passage d'un système cartésien à un autre système cartésien. En fait, ceci est une nouvelle manière d'aborder le vieux thème des transformations linéaires et des affinités. Pour simplifier les calculs, nous décomposons le problème en deux cas particuliers auxquels le cas général se ramène par composition.

Exemple 2: Passage d'un repère cartésien à un autre repère cartésien traduit.



Supposons qu'il existe une translation  $t = t_{o'o'}$ , qui transforme  $o$  en  $o'$ ,  $e_1$  en  $e'_1$  et  $e_2$  en  $e'_2$ . Ces données sont déterminées si on fixe le premier repère et les coordonnées  $(a,b)$  de  $o'$  dans ce premier repère. Quel est le lien entre les coordonnées  $(x,y)$  d'un point  $p$  dans le premier repère et ses coordonnées  $(x',y')$  dans le second repère ?

On a

$$\vec{op} = \vec{oo'} + \vec{o'p}$$

$$\text{ou } x \cdot \vec{oe}_1 + y \cdot \vec{oe}_2 = a \cdot \vec{oe}_1 + b \cdot \vec{oe}_2 + x' \cdot \vec{o'e'_1} + y' \cdot \vec{o'e'_2}$$

mais comme  $\vec{oe}_1 = \vec{o'e'_1}$  et  $\vec{oe}_2 = \vec{o'e'_2}$ , compte tenu de l'indépendance linéaire de  $\vec{oe}_1$  et  $\vec{oe}_2$

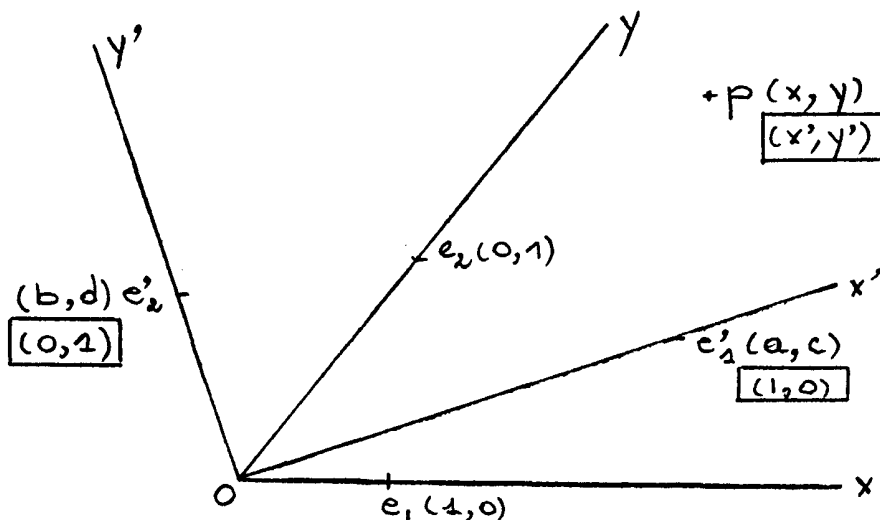
$$\begin{cases} x = a + x' \\ y = b + y' \end{cases} \quad \text{ou} \quad \boxed{\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}}$$

**Exemple 3: Passage d'un repère cartésien à un autre repère cartésien de même origine.**

On donne une origine  $o$ , une base  $e_1, e_2$  et une autre base  $e'_1, e'_2$  qui est fixée par rapport à la première en donnant les coordonnées

$$e'_1 (a, c) \text{ et } e'_2 (b, d)$$

dans le premier repère.



On a  $\vec{op} = x \cdot \vec{oe}_1 + y \cdot \vec{oe}_2$  d'une part et

$$\vec{op} = x' \cdot \vec{oe}'_1 + y' \cdot \vec{oe}'_2$$

$$= x' \cdot [a \cdot \vec{oe}_1 + c \cdot \vec{oe}_2] + y' \cdot [b \cdot \vec{oe}_1 + d \cdot \vec{oe}_2] \text{ d'autre part.}$$

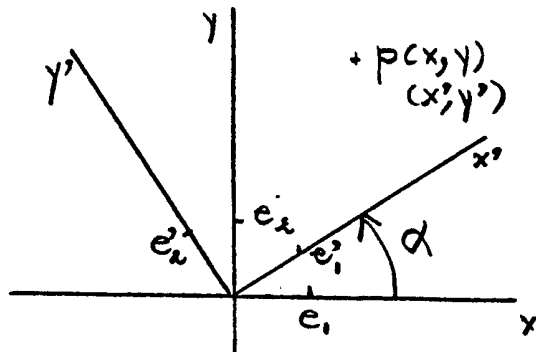
On tire de ces deux relations

$$\begin{cases} x = ax' + by' \\ y = cx' + dy' \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Ces formules correspondent à la transformation linéaire réciproque de la transformation déterminée par la matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

**Exemple 4: Passage par une rotation d'angle  $\alpha$  d'un repère cartésien orthonormé à un autre repère cartésien orthonormé de même origine.**

Ce passage s'effectue très facilement en utilisant les coordonnées polaires comme intermédiaire. Chaque repère orthonormé livre un



système de coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  et  $(\rho', \theta')$  respectivement. On

$$a \begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x' = \rho' \cdot \cos\theta' \\ y' = \rho' \cdot \sin\theta' \end{cases}$$

Le passage de  $(\rho, \theta)$  à  $(\rho', \theta')$

s'effectue très facilement :

$$\begin{cases} \rho' = \rho \\ \theta' = \theta - \alpha \end{cases}$$

Dès lors

$$\begin{cases} x' = \rho' \cdot \cos\theta' = \rho \cdot \cos(\theta - \alpha) \\ y' = \rho' \cdot \sin\theta' = \rho \cdot \sin(\theta - \alpha) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \rho \cdot \cos\theta \cdot \cos\alpha + \rho \cdot \sin\theta \cdot \sin\alpha \\ y' = \rho \cdot \sin\theta \cdot \cos\alpha - \rho \cdot \cos\theta \cdot \sin\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha \\ y' = -x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

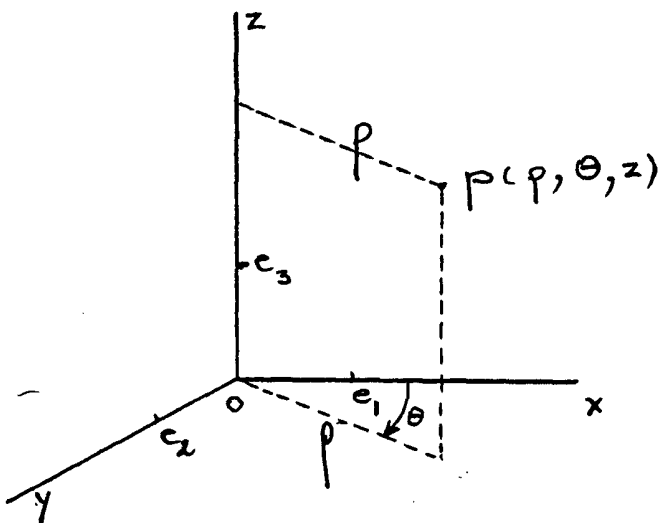
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Résultat que l'on peut obtenir en appliquant les équations obtenues à l'exemple 3.

**Exercices :**

1. Etant donné le cercle d'équation  $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ , (1)
  - a) Faire subir aux axes une translation de manière à ce que l'équation de ce cercle ne contienne plus de terme en  $x$  et en  $y$ .
  - b) Translater le cercle (1) dans le système d'axes initial de manière à ce que l'équation de ce cercle ne contienne plus de terme en  $x$  et en  $y$ .

**Exemple 5 : Une incursion dans l'espace : Les coordonnées sphériques.**



Considérons un repère orthonormé  $o, e_1, e_2, e_3$ .

Si  $p$  est un point, ses coordonnées sphériques  $(\rho, \theta, z)$  sont

- 1) La distance  $\rho$  de  $p$  à l'axe  $oe_3$ .
- 2) L'angle  $\theta \in [0, 2\pi[$  que forment les demi-plans de frontière  $oe_3$  passant respectivement par  $e_1$  et  $p$ .
- 3) L'altitude  $z$ .

**Exercices :**

1. Déterminer  $(x, y, z)$  en fonction de  $(\rho, \theta, z)$
2. Que représentent
  - a)  $\rho = c$  où  $c \in \mathbb{R}$  ?
  - b)  $\theta = c$  où  $c \in \mathbb{R}$  ?
  - c)  $z = c$  où  $c \in \mathbb{R}$  ?

**EQUATIONS DE COURBES**

Supposons qu' une courbe C soit donnée dans le système de coordonnées curvilignes (u,v) par l' équation

$$f(u,v) = 0 \tag{1}$$

et supposons que ce système de coordonnées soit lié à un système de coordonnées cartésiennes (x,y) par les fonctions,

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \tag{2}$$

alors, l' équation de C dans le système cartésien (x,y) est obtenu très facilement en remplaçant dans (1), u et v par les fonctions (2). En effet, p (u,v) est sur C si et seulement si  $f(u,v) = 0$  ce qui revient à dire que  $f[ u(x,y),v(x,y) ] = 0$  et dès lors, p (x,y) est sur C si et seulement si  $f[ u(x,y),v(x,y) ] = 0$ .

Un avantage de cette méthode est que l' équation d' une courbe peut devenir beaucoup plus simple dans un autre système de coordonnées. Voici une série d' exemples illustrant ces idées et dans lesquels on passe toujours des coordonnées cartésiennes aux COORDONNEES POLAIRES par

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta \end{cases}$$

Exemple 1 :

Le cercle d' équation  $x^2 + y^2 = 5$  devient tout simplement  $\rho = \sqrt{5}$  .

Exemple 2 :

La droite d' équation  $ax + by + c = 0$  devient

$$a \cdot \rho \cdot \cos\theta + b \cdot \rho \cdot \sin\theta + c = 0 \tag{1}$$

$$\text{ou } \rho = \frac{-c}{a \cdot \cos\theta + b \cdot \sin\theta} \tag{2}$$

que l' on peut estimer plus compliquée.

Pour passer de (1) à (2) nous avons supposé que  $a \cdot \cos\theta + b \cdot \sin\theta \neq 0$  que se passe-t-il si cette expression est nulle ?

Exemple 3 :

Le cercle d' équation  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  devient

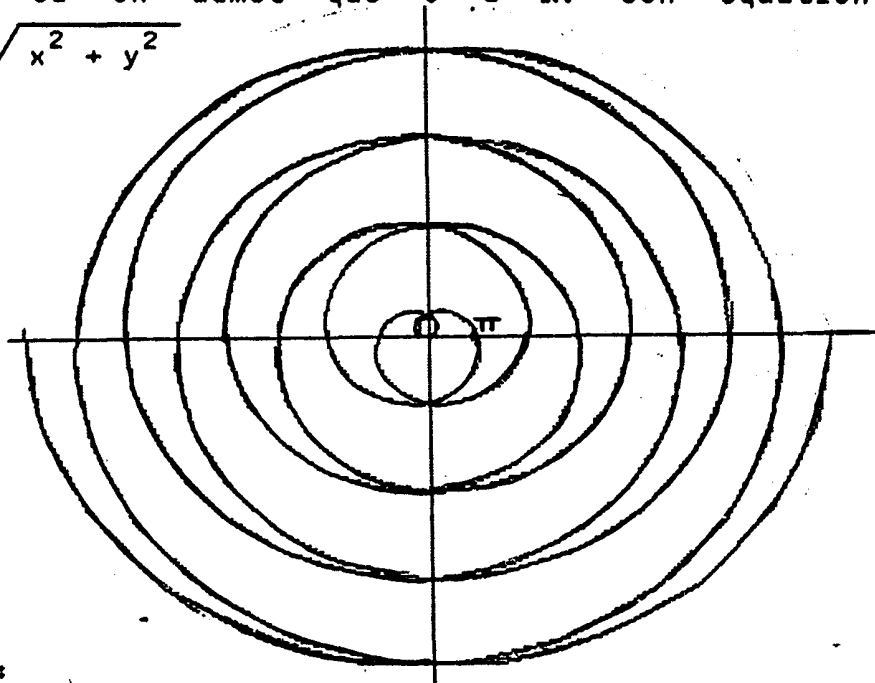
$$\rho^2 + a \cdot \rho \cdot \cos\theta + b \cdot \rho \cdot \sin\theta + c = 0 \tag{1}$$

Si le cercle passe par l' origine,  $c = 0$  et (1) se réduit à

$$\rho = -a \cdot \cos\theta - b \cdot \sin\theta$$

Exemple 4 :

La courbe d'équation  $\rho = \theta$  livre une spirale (spirale d'Archimède) si on admet que  $\theta \in \mathbb{R}$ . Son équation cartésienne est  $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \sqrt{x^2 + y^2}$



Exercices :

1. Voici des courbes données par une équation en coordonnées polaires. Quelle est leur équation cartésienne ? Dessiner ces courbes par un tracé point par point en coordonnées polaires :
  - a)  $\rho = \sin 2\theta$
  - b)  $\rho = \sin 3\theta$
  - c)  $\rho = 1 + \cos\theta$
  - d)  $\rho = 1 + 2\cos\theta$
  - e)  $\rho = 2 \cdot \sin\theta \cdot \cos 2\theta$
  - f)  $\rho = a \cdot \theta$  où  $a \in \mathbb{R}$
2. Reprendre l'exercice 1 en utilisant la dérivée de  $\rho$  en fonction de  $\theta$ . Que signifie le fait que cette dérivée soit positive, négative ou nulle, sur un intervalle ?
3. Déterminer l'équation d'une asymptote d'une courbe lorsque celle-ci est exprimée en coordonnées polaires.
4. Etudier
  - a)  $\rho = \operatorname{tg} \theta$
  - b)  $\rho = \frac{\pi}{\theta}$
  - c)  $\rho = \frac{1}{\sin\theta + \cos\theta}$

d)  $\rho = a \cdot \cos^2 \theta$       où  $a \in \mathbb{R}_0^+$

e)  $\rho = a \cdot \sin^2 \theta$       où  $a \in \mathbb{R}_0^+$

f)  $\rho = \operatorname{tg} \frac{\theta}{4}$

g)  $\rho = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$

h)  $\rho = 2 \cdot \cos 3\theta$

i)  $\rho = \frac{2}{\cos \theta} + 1$

j)  $\rho = \frac{3}{\cos^3 \theta}$

k)  $\rho^2 = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 2\theta}$

5. Un segment de longueur constante  $2d$  se déplace de manière à ce que les extrémités de ce segment décrivent deux droites perpendiculaires A et B. Trouver le lieu décrit par la projection orthogonale de l'intersection de A et de B sur le segment donné. Décrire le lieu.
6. Trouver le lieu des points du plan dont le produit des distances à deux points fixes distants d' une longueur  $2a$ , vaut  $a^2$  ( $a \in \mathbb{R}^+$ ). Décrire le lieu.
7. Ayant tracé un cercle sur le segment  $oa$  comme diamètre, on mène par  $o$  une sécante quelconque  $S$  qui rencontre le cercle en  $b$  et qui rencontre en  $c$  la tangente à celui-ci menée par  $a$ . On porte ensuite sur  $S$  un vecteur  $\vec{om} = \vec{bc}$ . Décrire le lieu du point  $m$  lorsque  $S$  tourne autour de  $o$ . (Cissoïde).
8. Par un point  $a$  pris sur le côté  $ox$  d' un angle droit  $xoy$ , on mène une droite quelconque  $A$  qui rencontre  $oy$  en  $c$ . Décrire le lieu des points de rencontre  $m$  et  $n$  de  $A$  avec le cercle de centre  $c$  et de rayon  $oc$ . (Strophoïde).
9. Dessiner la spirale  $\rho = a \cdot e^{k\theta}$  où  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}_0^+$ ,  $k \in \mathbb{R}_0^+$ .  
Démontrer que si les angles  $\theta$  forment une suite arithmétique, alors les rayons  $\rho$  forment une suite géométrique.
10. Etudier le lieu des points dont le rapport des distances à un point et à une droite fixes vaut une constante  $e \in \mathbb{R}_0^+$ .



**MAIS QU' EST-CE QU' UNE COURBE ?**

Une faiblesse majeure subsiste dans nos connaissances mathématiques. Nous avons utilisé depuis longtemps la notion de courbe ... mais qu' est-ce qu' une courbe ? Une analyse sérieuse de cette question dépasse nos capacités actuelles. Nous nous bornons ici à soulever la question et à donner des indications utiles en vue d' une réponse.

Deux grandes visions ou approches sont en concurrence. La vision cinématique ou paramétrique dans laquelle on voit un point décrivant la courbe et la vision statique dans laquelle la courbe est donnée globalement comme ensemble de points.

Ces deux visions ont déjà été étudiées en cinquième. Revoyons quelques exemples d' équations paramétriques.

**Equations paramétriques**

Plaçons-nous dans le plan (ou l' espace, ou sur la sphère, ou ... ) muni d' un système de coordonnées (x,y). On se donne deux fonctions d' une variable réelle à valeurs dans  $\mathbb{R}$  :

$$x : t \rightarrow x(t)$$

$$\text{et } y : t \rightarrow y(t)$$

ou t parcourt un domaine de définition I commun à x et à y.

La courbe définie par ces fonctions ou par les équations paramétriques

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

est l' ensemble des points ( x(t),y(t) ) du plan.

Exemple 1 :

$$\begin{cases} x = R \cdot \cos t \\ y = R \cdot \sin t \end{cases} \quad \text{où } R \in \mathbb{R}_0^+ \text{ et } t \in \mathbb{R}$$

représente le cercle de centre o et de rayon R ( parcouru d' un mouvement uniforme).

Exemple 2 :

$$\begin{cases} x = a \cdot t + b \\ y = c \cdot t + d \end{cases} \quad \text{où } a, b \in \mathbb{R}_0, c, d \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$$

se ramène à  $\frac{x - b}{a} = \frac{y - d}{c}$  c' est à dire une droite.

On voit qu' en éliminant le paramètre entre les équations de  $x = x(t)$  et de  $y = y(t)$  on obtient une équation statique de la courbe livrant celle-ci globalement ... cette opération est parfois ardue et inutile comme nous l' avons vu en cinquième.

Les idées que nous venons d' exposer fonctionnent tout aussi bien dans l' espace :

Exemple 3 :

Hélice circulaire droit

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = a \cdot t \end{cases} \quad \text{où } a \in \mathbb{R}_0, t \in \mathbb{R}$$

Pourquoi exige-t-on  $a \neq 0$  ?

Exemple 4 :

$$\begin{cases} x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \\ y = \frac{2t}{t^2 + 1} \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

décrit une courbe bien connue et dont nous connaissons bien les équations paramétriques ... laquelle ?

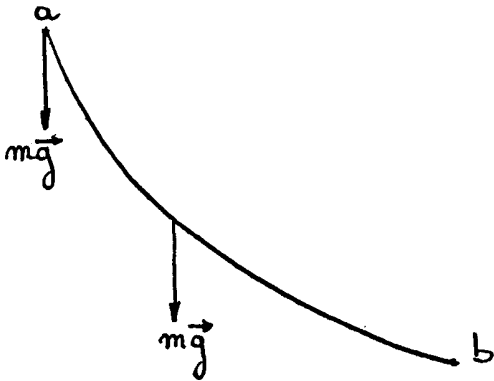
Exemple 5 : LA CYCLOIDE

Nous avons étudié à diverses reprises la cycloïde. Nous ne sommes pas les seuls à aimer cette courbe. D' éminents mathématiciens tels que Roberval, Pascal, Huyghens, Bernouilli et bien d' autres ont tenté de découvrir son équation, l' aire de la surface située en-dessous d' une de ses arches, la longueur d' une de ses arches, ses propriétés mécaniques ...etc ...

Quelques anecdotes existent d' ailleurs à ce propos : Galilée trouvait cette courbe si belle qu' il fit construire un pont sur l' Arno dont les arches sont celles d' une cycloïde. Pascal a résolu la nuit, mentalement, de nombreux problèmes relatifs à la cycloïde lors d' une rage de dents. Il appelait cette courbe une " roulette" ... il n' y a aucun rapprochement à faire entre ce nom et le mal aux dents du brillant Pascal.

Citons quelques propriétés mécaniques de la cycloïde. Nous ne les démontrerons pas, ceci dépassant nos moyens actuels.

La cycloïde est brachystochrone ( brachy = le plus court, chrone = temps ). Cette propriété a été étudiée par Leibnitz, Bernouilli, Newton, ...



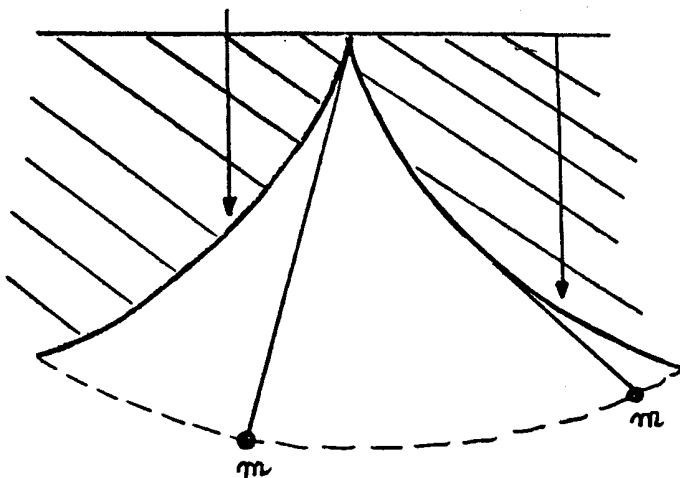
Un point matériel de masse  $m$  subissant l'attraction terrestre minimise le temps qu'il doit mettre pour aller d'un point  $a$  vers un point  $b$  situé à une altitude plus basse que celle de  $a$  s'il glisse le long d'une cycloïde ... le plus "court" chemin entre deux points n'est donc pas toujours le segment de droite reliant ces deux points .

La cycloïde est tautochrone ( tauto = même, chrone = temps). Cette propriété a été démontrée par Huyghens en 1630.



Un pendule est régi par la loi  $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$  si l'angle d'oscillation

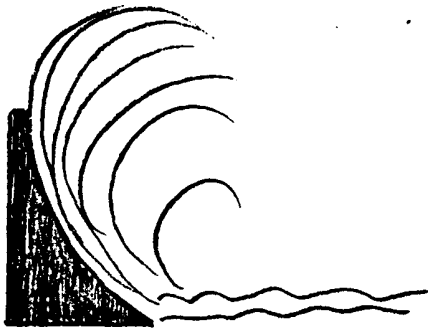
demi-arche d' une cycloïde



$\alpha$  est "petit". Pour un angle  $\alpha$  qui n'est pas proche de 0,  $T$  varie en fonction de  $\alpha$ . Huyghens voulut créer un pendule dont la période  $T$  est indépendante de  $\alpha$ . A cet effet, il désirait compenser l'influence de  $\alpha$  par une modification de  $l$ . Il y parvint grâce au modèle ci-contre.

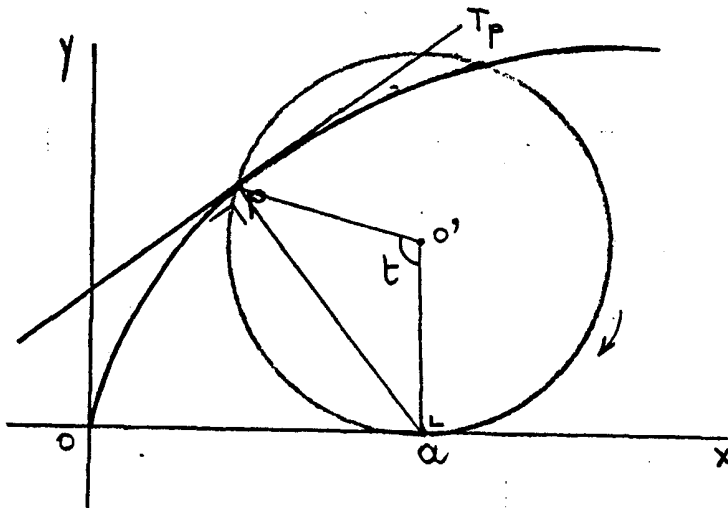
De plus,  $m$  se déplace le long d'une cycloïde.

Une application pratique de la cycloïde : Les digues les plus efficaces ont un profil qui est une demi-arche de cycloïde.



Une dernière anecdote : Comment Galilée présuma-t-il que l'aire sous une arche d'une cycloïde vaut trois fois l'aire du cercle qui l'engendre ? Il construisit les deux en métal et il les pesa !

Une jolie propriété de la cycloïde :



Le dessin ci-contre illustre la propriété

$T_p \perp ap$   
où p est un point de la cycloïde, a le point de contact du cercle (relatif au point p) avec la droite sur laquelle il roule et  $T_p$  la tangente à la cycloïde au point p.

Démonstrons cette propriété. La cycloïde a pour équation

$$\begin{cases} x = R.t - R.\text{sin}t \\ y = R - R.\text{cos}t \end{cases} \quad \text{où } R \text{ est le rayon du cercle considéré}$$

La pente de la tangente au point p vaut donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{R.\text{sin}t}{R.(1 - \text{cos}t)} \quad (1)$$

Que vaut la pente de pa ?

p a pour coordonnées  $( R.t - R.\text{sin}t , R - R.\text{cos}t )$

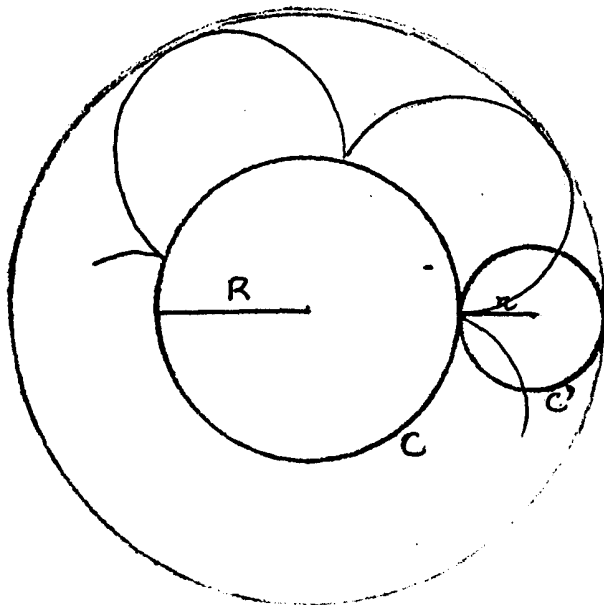
a a pour coordonnées  $( R.t , 0 )$  car l'arc de cercle pa a la même longueur que le segment oa

La pente de  $pa$  vaut donc  $\frac{R - R \cdot \cos t}{R \cdot t - R \cdot \sin t - R \cdot t} = \frac{1 - \cos t}{- \sin t}$  (2)

(1) et (2) montrent que  $pa$  est perpendiculaire à  $T_p$ , et le tour est joué.

Exemple 6: L' épicycloïde (épi = sur )

Pour obtenir une épicycloïde, on fait rouler un cercle de rayon  $r$  sur un cercle fixe de rayon  $R$  et ce, sans glissement.



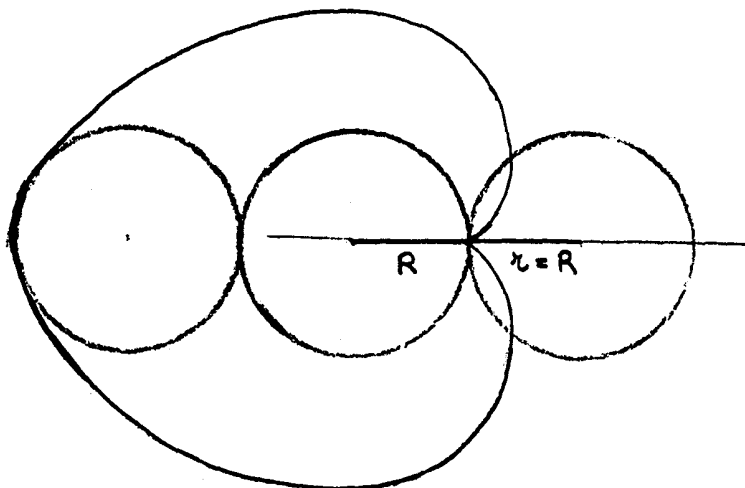
Il y a autant d' épicycloïdes qu' il existe de rapports  $\frac{R}{r} = k$ .

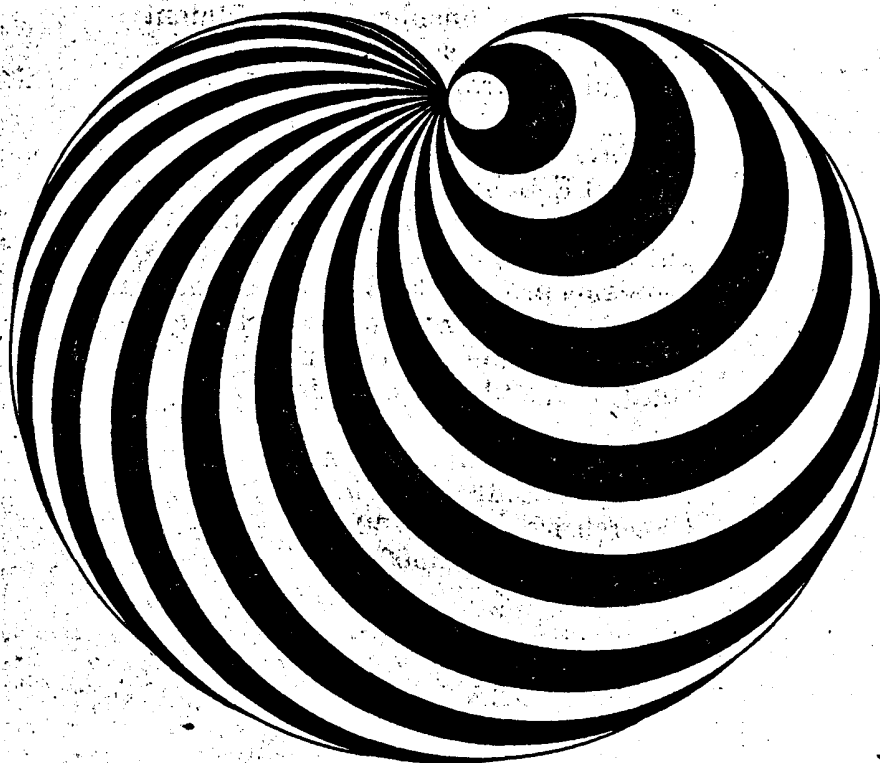
Si  $k \in \mathbb{N}_0$ , l' épicycloïde sera une courbe fermée et ce après une révolution du cercle mobile autour du cercle fixe.

Si  $k \in \mathbb{Q}_0^+$ , l' épicycloïde reviendra à son point de départ après un nombre fini de révolutions du cercle mobile autour du cercle fixe.

Si  $k \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}_0^+$ , l' anneau  $cc'$  sera recouvert de points de l' épicycloïde.

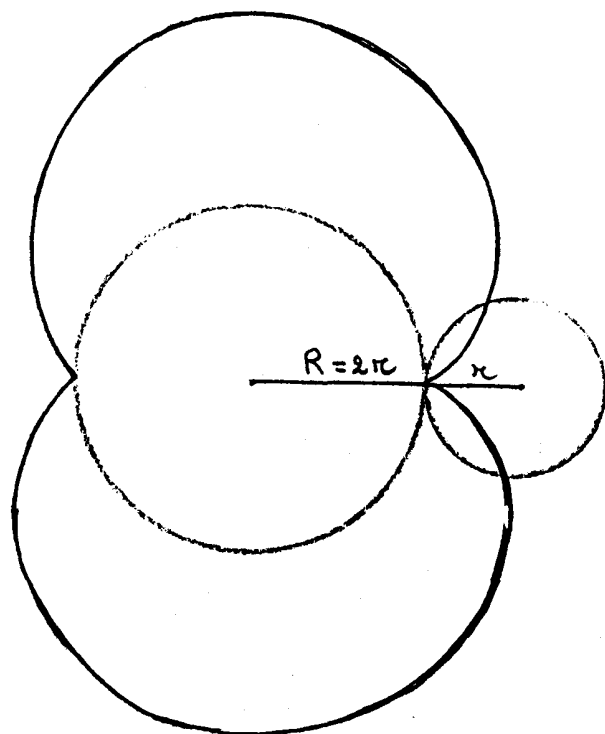
Cas particuliers :  $R = r$  ( La cardioïde )





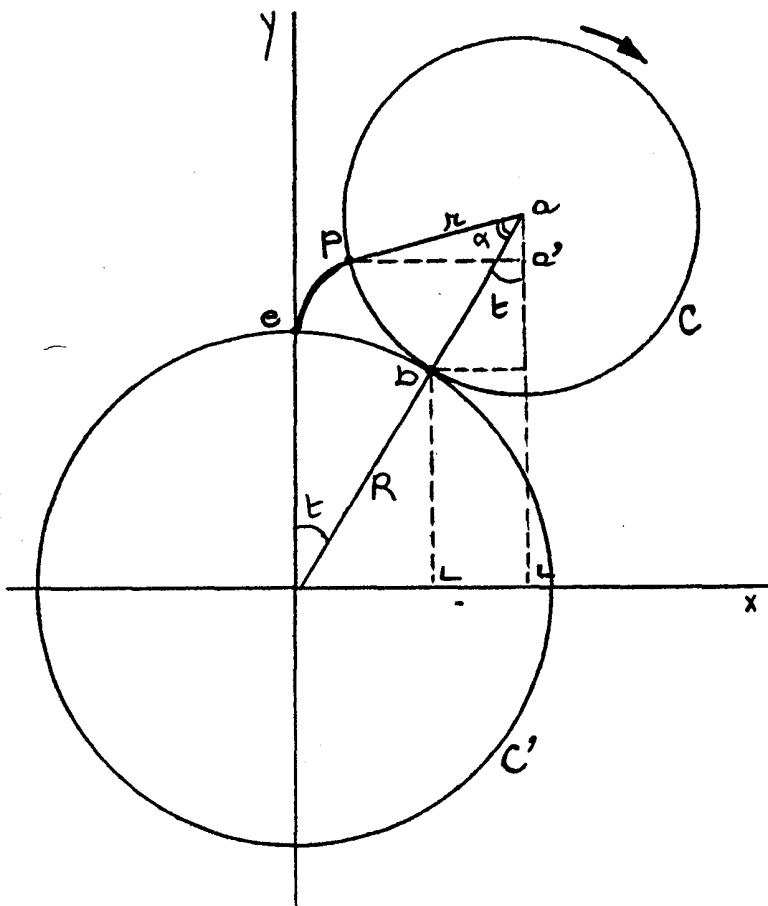
Op-art cardioid

$R = 2r$  ( La néphroïde )



Le matin si vous buvez  
une tasse de café dans une  
tasse cylindrique, vous pouvez  
admirez une demi-néphroïde.

Equation d' une épicycloïde



On suppose qu' en  $t = 0$ , l' épicycloïde débute en e.

C roulant sans glisser sur C', on a

$$| \text{arc}(eb) | = | \text{arc}(pb) |$$

ou  $R.t = r.\alpha$

Les coordonnées de a valent

$$a : [(R + r).\text{sint}, (R + r).\text{cost}]$$

et comme

$$x_p = x_a - |pa'|$$

$$= (R + r).\text{sint} - r.\text{sin}(t + \alpha)$$

$$= (R + r).\text{sint} - r \text{ sin}[(1 + \frac{R}{r})t]$$

et que

$$y_p = (R + r).\text{cost} - r.\text{cos}[(1 + \frac{R}{r})t]$$

Les équations de l'épicycloïde sont

$$\begin{cases} x = (R + r).\text{sint} - r.\text{sin}[ t.(1 + \frac{R}{r}) ] \\ y = (R + r).\text{cost} - r.\text{cos}[ t.(1 + \frac{R}{r}) ] \end{cases}$$

Exercice : Retrouver l' équation de la cardioïde en coordonnées polaires, à savoir  $\rho = a.(1 + \cos\theta)$  à partir de l' équation de l' épicycloïde où  $R = r$ .

exemple 7: **L' hypocycloïde**

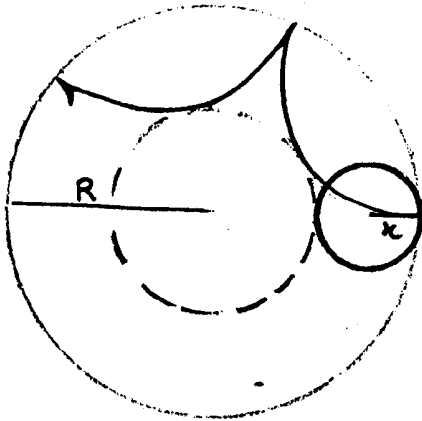
Pour obtenir une hypocycloïde, on considère la trajectoire d' un point d' un cercle de rayon  $r$  sur un cercle fixe de rayon  $R$ , le cercle de rayon  $r$  roulant sans glisser à l' intérieur du cercle de rayon  $R$ .

Le raisonnement que nous avons tenu page 20 sur  $k = \frac{R}{r}$  est toujours valable ici.

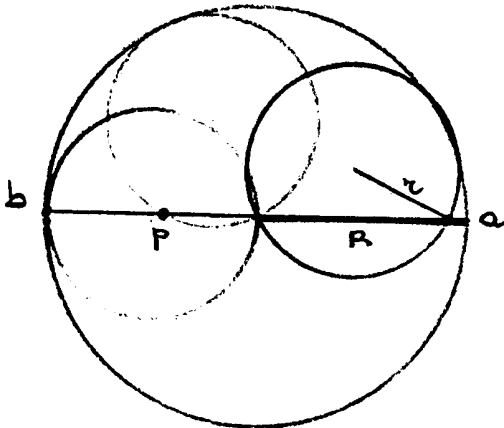
Equation d' une hypocycloïde :

$$\begin{cases} x = (R - r) \cdot \sin t + r \cdot \sin \left[ t \cdot \left(1 - \frac{R}{r}\right) \right] \\ y = (R - r) \cdot \cos t + r \cdot \cos \left[ t \cdot \left(1 - \frac{R}{r}\right) \right] \end{cases}$$

Il suffit en effet de changer  $r$  en  $-r$  dans l' équation de l' épicycloïde.



Cas particuliers :  $R = 2r$  (Théorème de Copernic)

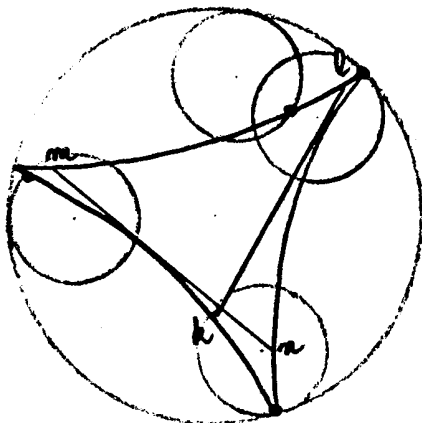


Quelle est la trajectoire de  $p$  ?  
Si on remplace  $R$  par  $2r$  dans l' équation de l' hypocycloïde, on a

$$\begin{cases} x = r \cdot \sin t - r \cdot \sin t = 0 \\ y = \dots \end{cases}$$

La trajectoire de  $p$  est donc le diamètre  $ab$ .

$R = 3r$  : La deltoïde

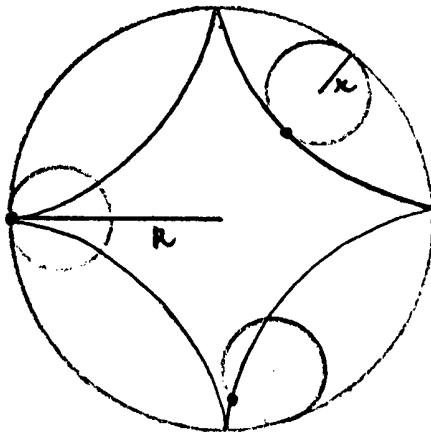


Cette courbe a pour propriété le fait que la longueur des segments des tangentes à la courbe, limités à la courbe, ont tous la même longueur :

$$|mn| = |kl|$$



$R = 4r$  : l'astroïde



### EQUATIONS STATIQUES

Dans le plan coordonné par  $(x,y)$ , se donner l'équation statique d'une courbe revient à se donner l'équation

$$f(x,y) = 0$$

On est amené à poser des conditions sur  $f$ , telles que continuité, dérivabilité qui nous échappent encore quand l'équation n'est pas explicite.

En passant dans l'espace,  $f(x,y,z) = 0$  définit une surface et dès lors une courbe peut se voir comme intersection de surfaces.

### QUELQUES CONSIDERATIONS GEOMETRIQUES

Nous sommes amenés à admettre

1. Qu'une droite est une courbe, de même qu'un cercle et que les graphiques des fonctions élémentaires.
2. Qu'une réunion d'un nombre fini de courbes du plan est une courbe du plan. Si ce nombre est au moins deux, la courbe est dite **décomposée** ou **dégénérée**.

Exemple :  $x^2 - y^2 = 0$  est dégénérée en les droites d'équation  $x = y$  et  $x = -y$

3. Qu'une transformation affine d'une courbe est encore une courbe.
4. Qu'une courbe peut se limiter à un point ou même ou même être vide.

Exercices :

1. Dessiner les courbes suivantes sur base de leurs équations paramétriques en utilisant toutes les notions connues. Tenter d'obtenir une équation statique de ces courbes.

$$a) \begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$b) \begin{cases} x = 2t^2 + 1 \\ y = t^2 - 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$c) \begin{cases} x = 2t^2 + t + 1 \\ y = t^2 - t + 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$d) \begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}^+$$

$$e) \begin{cases} x = a \cdot \sin \omega t \\ y = a \cdot \cos \omega t \end{cases} \quad \omega, t \in \mathbb{R} ; a \in \mathbb{R}_0$$

$$f) \begin{cases} x = \frac{1-t}{1+t} \\ y = \frac{2t+3}{t-2} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

2. Montrer que les courbes suivantes sont dégénérées et déterminer les équations de leurs composantes.

$$a) 2x^2 - y^2 - xy + 5x + y + 2 = 0$$

$$b) 4x^2 + y^2 + 4xy + 2x + y - 1 = 0$$

$$c) x^3 - 8y^3 = 0$$