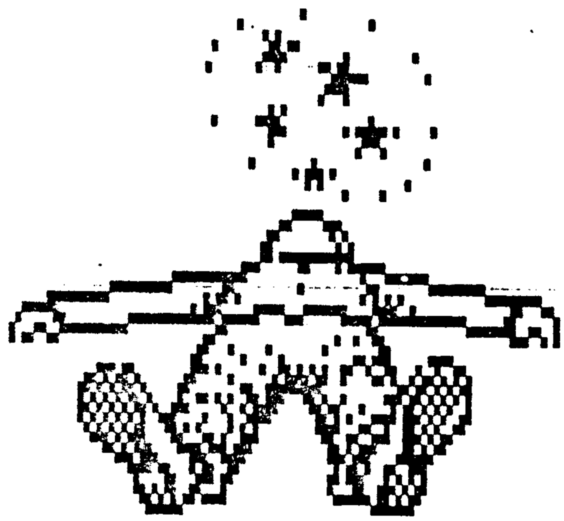
7

Le second degre dans le plan



LE SECOND DEGRE DANS LE PLAN

Exercices de revision

1. Dans le plan muni d' un repère orthonormé, on donne un triangle abc. Sachant que ab : $y + 4x - 34 = 0$

   bc : $4y + 3x - 19 = 0$

   ac : $2y - 5x + 23 = 0$

   On demande

   a) L' équation de la médiane du triangle abc issue du sommet a

   b) L' équation de la hauteur du triangle abc issue du sommet b

   c) L' équation des bissectrices du triangle abc issues du sommet c

   d) L' aire du triangle abc

2. Dans le plan muni d' un repère orthonormé, on demande l' équation du(des) cercle(s) de rayon 2, tangent(s) à l' axe OX et tangent(s) à la droite D : $4x = 3y$.

3. Dans le plan muni d' un repère orthonormé, on demande l' équation du cercle passant par les points (4,1) , (3,5) et (1,3).

4. Dans le plan muni d' un repère orthonormé, on donne :

   $C : ax^2 + ay^2 + a^3x - (6a^2 + 3)y + 7a^3 + 5a = 0$ où $a \in \mathbb{R}_0$

   $D: ax + a - y = 0$

   On demande l' équation du cercle C_1 ayant pour extrémités d' un diamètre les points de $D \cap C$.

   On demande l' angle formé par les cercles C et C_1 c' est à dire l' angle formé par les tangentes aux cercles en leurs points communs.

5. Dans le plan muni d' un repère orthonormé, on donne les points p(4,0) et q(0,3).

   a) Former l' équation ~~des~~ du cercle passant par les milieux des côtés du triangle de sommets o, p, q ; déterminer son centre et son rayon.

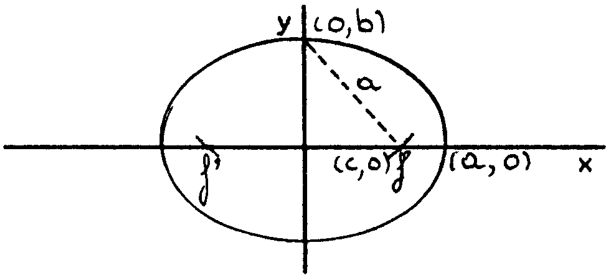
   b) Former l' équation du cercle inscrit au triangle ; déterminer son centre et son rayon et ses points de contact avec les côtés du triangle.

   c) Montrer que les cercles déterminés ci-dessus sont tangents et déterminer leur point de contact.

Ellipse, Hyperbole, Parabole (Rappel du cours de 5ème)

Ellipse : Lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes f, f' (appelés foyers) est une constante égale à 2a.

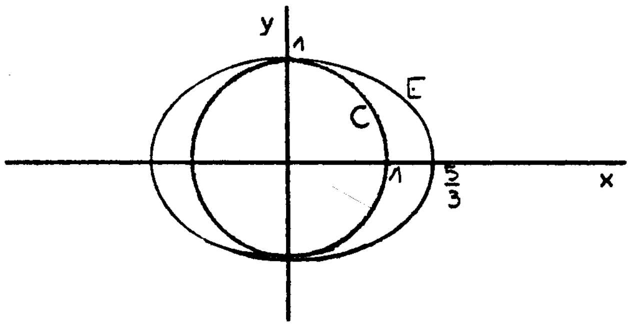
$$|ff'| = 2c < 2a \qquad \text{où } a,\ c \in \mathbb{R}_0^+$$



Equation de l' ellipse rapportée à ses axes de symétrie :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{où } b^2 = a^2 - c^2}$$

L' ellipse peut être obtenue par la transformation d' un cercle par une affinité :



Exemple:

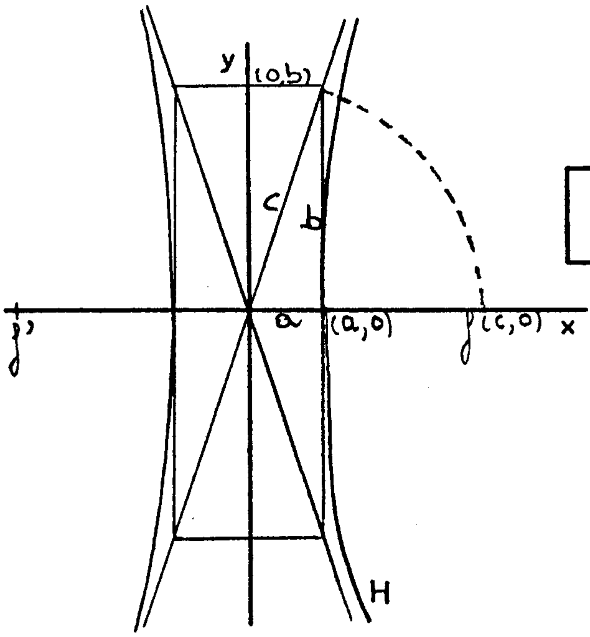
$$t : \begin{cases} x' = \frac{5}{3}x \\ y' = y \end{cases}$$

$$C : x^2 + y^2 = 1$$

$$E = t(C) : \frac{9}{25}x^2 + y^2 = 1$$

Hyperbole : Lieu des points dont la différence des distances à deux points fixes f, f' (appelés foyers) est une constante égale à 2a.

$$|ff'| = 2c > 2a \qquad \text{où } a,\ c \in \mathbb{R}_0^+$$



Equation de l' hyperbole rapportée à ses axes de symétrie :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{où } a^2 + b^2 = c^2}$$

<u>Hyperbole équilatère</u> : Hyperbole dont les asymptotes sont perpendiculaires.

Dans les axes X,Y : H : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ ou $x^2 - y^2 = a^2$

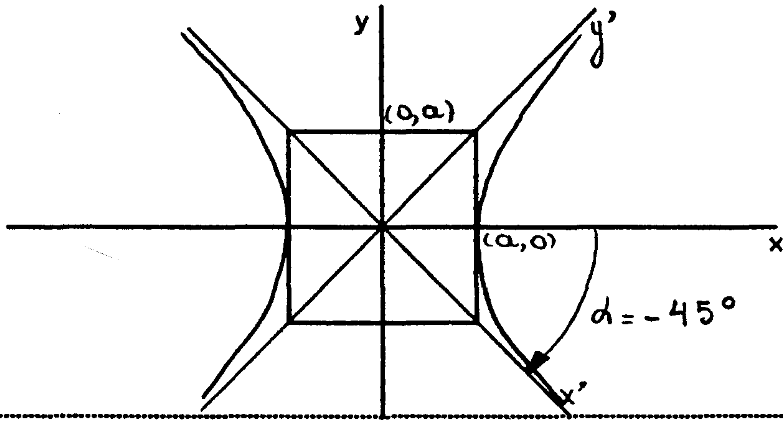
On passe aux axes X',Y' par une rotation de $-45°$ autour de (0,0)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha = -45°$$

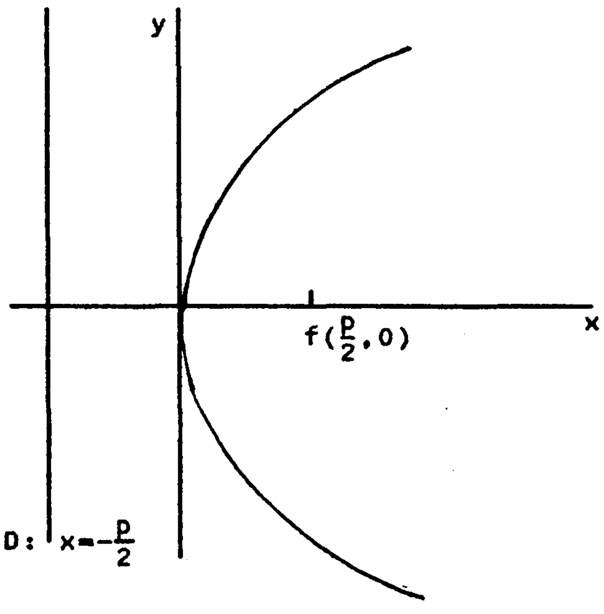
$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} . (x' + y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} . (-x' + y') \end{cases}$$

Dans les axes X',Y' : H : $\frac{1}{2} .(x' + y')^2 - \frac{1}{2} . (-x' + y')^2 = a^2$

ou $\boxed{H : x'.y' = \frac{a^2}{2}}$ Equation de l' hyperbole rapportée à ses asymptotes



<u>Parabole</u> : Lieu des points équidistants d' un point fixe f, appelé foyer et d' une droite fixe D, appelée directrice.



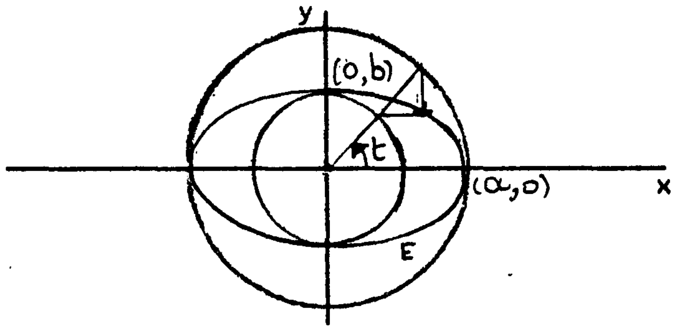
d(f,D) = p

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

Equation de la parabole rapportée à son axe de symétrie et à la tangente en son sommet.

Equations paramétriques - Constructions

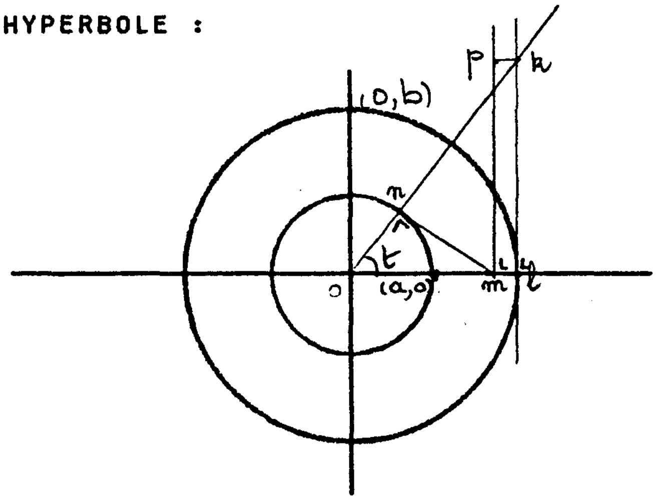
ELLIPSE :



$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a.\cos t \\ y = b.\sin t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

HYPERBOLE :



$$H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

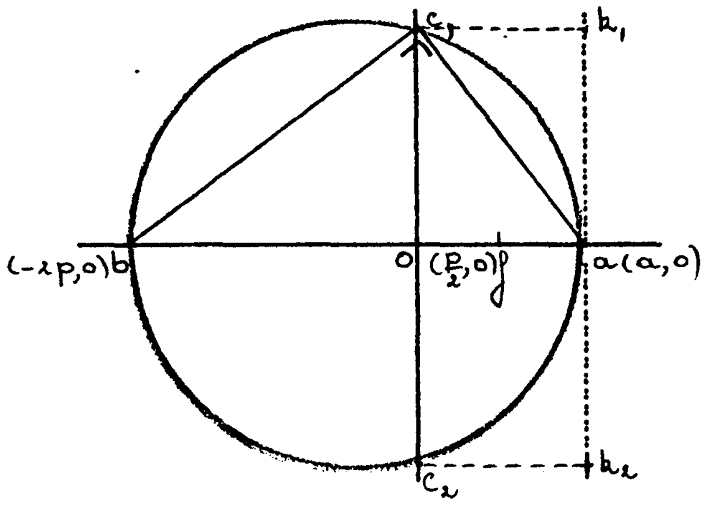
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a.\sec t \\ y = b.\operatorname{tg} t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$p \in H$ en effet

$$\Delta\ okl : \operatorname{tg} t = \frac{|kl|}{|ol|} = \frac{y_p}{b}$$

$$\Delta\ omn : \cos t = \frac{|on|}{|om|} = \frac{a}{x_p}$$

PARABOLE



$$P : y^2 = 2px \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases}$$

Pour obtenir un point de la parabole ayant pour abscisse $x = a$, on construit le cercle de diamètre ab ,
a $(a,0)$ et b $(-2p,0)$
Ce cercle coupe l' axe Y en c_1 et c_2 . On construit les points k_1 et k_2 (voir dessin). Ces derniers points appartiennent à la parabole car

$$\begin{aligned} (y_{k_i})^2 &= |oc_i|^2 \qquad \text{où } i = 1, 2 \\ &= |ob| \cdot |oa| \\ &= 2p.a \end{aligned}$$

- LES SECTIONS PLANES D' UN CÔNE -

Un peu d' histoire

La mathématique de la Grèce Antique se trouva démunie devant trois problèmes qui furent seulement résolus au 19ème siècle en montrant que leurs exigences sont impossibles. Il s' agissait de construire par la règle et le compas :

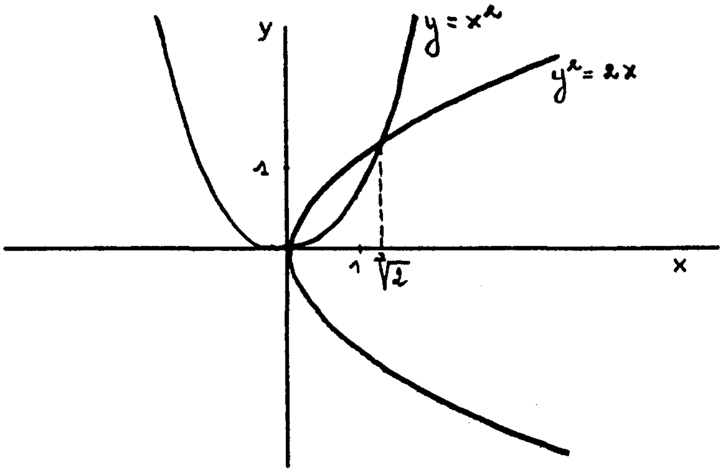
1. un cube dont le volume est double du volume d' un cube donné (problème de la **duplication du cube**) ce qui revient à construire $\sqrt[3]{2}$ à la règle et au compas.
2. un carré dont l' aire est égale à celle d' un cercle donné (problème de la **quadrature du cercle**) ce qui revient à construire $\sqrt{\pi}$ à la règle et au compas.
3. un angle dont la mesure est égale au tiers d'un angle donné (problème de **la trissection de l' angle**)

Si ces problèmes ne furent pas résolus durant l' Antiquité et pour cause puisqu' ils ne peuvent l' être, des constructions utilisant d' autres moyens que la règle et le compas furent l' objet de nombreuses études.

C' est ainsi que **Ménechme** s' aperçut vers 350 avant J.C. que la construction de $\sqrt[3]{2}$ est équivalente à la résolution du système d' équations

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ x^2 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = 2x \\ x^2 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = \sqrt[3]{2} \\ x^2 = y \end{cases}$$

(Ces notations modernes ne lui étaient pas connues), ou encore à la détermination des points d' intersection des courbes d' équation $y^2 = 2x$ et $x^2 = y$ que nous appelons paraboles (terminologie non utilisée par Ménechme).



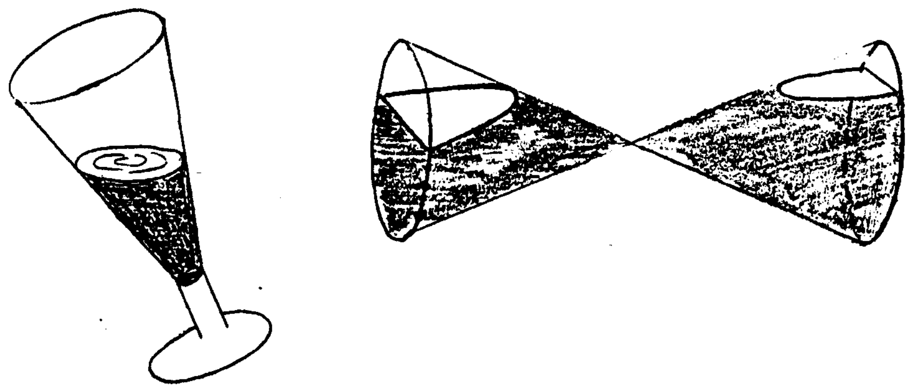
Par des méthodes difficiles à reconstituer ici, Ménechme se rendit compte que ces deux courbes étaient des sections planes d' un cône. Les deux traits caractéristiques de l' étude des courbes qu' on appelle **CONIQUES** étaient ainsi découvertes :

- D' une part, ces courbes sont sections planes d ' un cône
- D' autre part, ces courbes ont pour équation une équation du second degré.

Ces deux aspects ont joué un rôle moteur considérable dans le développement de la géométrie depuis l' Antiquité jusqu' à notre époque et ils méritent tous deux notre attention pour leur importance sur le plan de la culture générale.

Observations :

1. Considérons un récipient de forme conique, comme un verre, contenant un liquide ou du sable. En faisant varier l' inclinaison du récipient, la surface du liquide matérialise une section plane variable d' un cône.

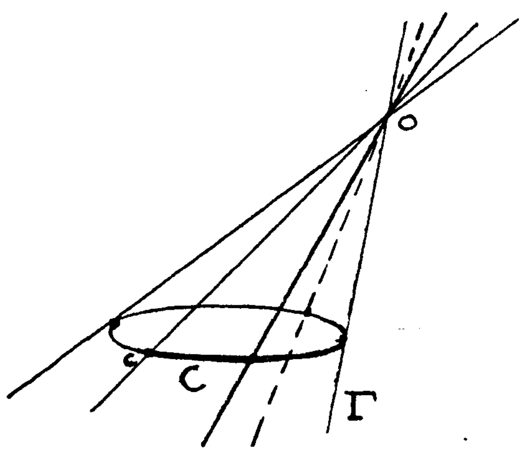


2. Considérons un lampadaire cylindrique et une source lumineuse o placée au centre de celui-ci. Les bords du lampadaire et o déterminent un cône lumineux dont l' intersection avec un mur proche se matérialise par une ombre plus ou moins nette délimitée par une courbe.
3. La photo d' un cercle C livre diverses courbes qui s' assimilent à des sections planes d' un cône de base C, le plan de section étant celui de la plaque photographique et le sommet du cône étant le diaphragme de l' appareil photographique.
4. Le dessin en perspective pose les mêmes problèmes.

Dans ces diverses observations, nous voyons apparaître des courbes fermées qu' on appelle **ellipses**, des courbes à deux branches ouvertes qu ' on appelle **hyperboles** et des courbes à une branche ouverte qu' on appelle **paraboles**. Ces dernières étant un peu plus délicates à réaliser :On fait tourner un plan de section de cône continûment autour d'un axe, la parabole apparaît comme un cas limite séparant les ellipses des hyperboles. Une question surgit : Ces paraboles ont-elles un lien avec celles qu' on a rencontrées en représentant graphiquement le trinôme du second degré ? Nous répondrons à cette question un peu plus tard.

<u>Un début d' explication</u> :

Dans les observations précédentes, nous disposons chaque fois des données suivantes : On se place dans l' espace E^3, on se donne un cercle C dans un plan α et un point o en dehors de α.On considère le **cône** Γ de **base** C et de **sommet** o qui est défini comme la réunion des droites oc où $c \in C$, les droites oc étant les **génératrices** du cône. Le problème qui se pose est l' étude de l' intersection du cône Γ et d' un plan π. Toute figure ainsi obtenue est appelée **section conique** ou , plus brièvement, **conique**.



Le cas où π passe par o se laisse traiter facilement, dans ce cas, la conique peut être constituée :

a) du seul point o : cas où π est parallèle à α ou
cas où $\pi \cap \alpha = D$ avec $D \cap C = \phi$

b) d' une droite : cas où $\pi \cap \alpha = D$ avec D tangente à C

c) de deux droites sécantes en o : cas où $\pi \cap \alpha = D$ avec D sécante à C.

Ces coniques sont dites **dégénérées**.

Traitons le cas plus intéressant où π ne passe pas par o. Soit $C' = \pi \cap \Gamma$ la conique étudiée. C' est dite **non dégénérée** ou **proprement dite**. L' observation physique nous amène à distinguer les trois formes déjà rencontrées (**ellipse, parabole, hyperbole**) définies de manière peu précise jusqu'ici par le nombre de branches et l'ouverture ou non de la courbe. Nous constatons que ces formes dépendent finalement d' un critère très précis et très simple, à savoir le **nombre de génératrices qui ne contiennent aucun point de la conique C'**. Quelles sont les valeurs que ce nombre peut prendre et quelles sont les génératrices ?

Si $c \in C$, on a $oc \cap C' = \phi \Leftrightarrow oc \parallel \pi$.

Soit π' le plan parallèle à π passant par o. On a $oc \parallel \pi \Leftrightarrow oc \subseteq \pi' \Leftrightarrow c \in \pi' \cap C = \pi \cap \alpha$, or $\pi' \cap \alpha$ est une droite ou le vide car $o \in \pi'$ et $o \notin \alpha$ empêchent $\pi' = \alpha$. De plus un droite de α coupe C en 0, 1 ou 2 points ; il y a donc 0, 1 ou 2 points $c \in \pi' \cap C$ et dès lors on a démontré le théorème suivant :

<u>**Théorème**</u> : Etant donné un cône Γ de base circulaire C et de sommet o, si π est un plan ne passant pas par o, le nombre de génératrices de Γ ne coupant pas π est égal à 0, 1 ou 2.

Si nous admettons que les **droites parallèles ont un point à l' infini**, et qu' une droite parallèle à un plan coupe celui-ci en son point à l' infini, nous sommes amenés à dire qu' **une conique possède 0, 1 ou 2 points à l' infini**. On appelle désormais

Ellipse, une conique C' possédant **0 point à l' infini**

Parabole, une conique C' possédant **1 point à l' infini**

Hyperbole, une conique C' possédant **2 points à l' infini**

Une droite du plan de C' passant par un point à l' infini de C' est appelée **droite asymptotique**.

<u>Exercices</u> :

1. Soit E une ellipse du plan π, montrer que toute droite de π coupe E en 0, 1 ou 2 points. Si $p \in E$, montrer qu' il y a une et une seule droite passant par p qui coupe E uniquement en p. Cette droite est appelée tangente à E en p.
2. Soit P une parabole du plan π, et a, son point à l' infini matérialisé dans π par la direction de droites parallèles à la génératrice du cône qui ne rencontre pas P. Montrer que toute droite asymptotique coupe P en un seul point. Si $p \in P$, montrer qu' en

p, il passe exactement deux droites qui coupent P en un seul point. Une de ces droites est asymptotique et l' autre est appelée tangente à P en p. C'est la projection d' une tangente au cercle de base du cône.

3. Soit H une hyperbole du plan π, et a, b ses points à l' infini , Montrer que toute droite asymptotique à H passant par a ou b, coupe H en un seul point à une exception près appelée asymptote de H ou tangente à H en a ou b. Si $p \in H$, montrer qu' il y a exactement trois droites de π passant par p qui coupent H en un seul point. Deux de ces droites sont les droites asymptotiques par p et la troisième est appelée tangente à H en p. C'est la projection d' une tangente au cercle de base du cône.

4. Plaçons- nous sur l' un des gradins dans un stade circulaire. En regardant vers le centre de l' arêne, l' image dans notre oeil des gradins circulaires situés plus bas que nous est une ... ? Et celle du gradin sur lequel nous sommes placés ? Et celle des gradins situés au dessus de nous ?

5. La photo d' une sphère peut-elle être une ellipse, une parabole, une hyperbole ?

COCORICO ! LES THEOREMES BELGES

Les coniques, ellipse, parabole et hyperbole ont quelque chose de déconcertant. On les rencontre comme sections planes du cône d' une part et comme lieux à deux sources (deux foyers ou un foyer et une directrice) d' autre part.

Sommes-nous certains qu' il s' agit des mêmes courbes ? La vue seule ne permet pas de répondre avec certitude à cette question car les exemples ne manquent pas pour se persuader des limites de nos sens. Il suffit par exemple de tracer la courbe d' équation $x^{100} + y^{100} = 1$ pour constater qu' elle se confond pratiquement avec un carré alors qu' il ne ~~n'~~ peut manifestement pas s' agir d' un carré.

Pour en revenir aux coniques, le problème posé ci-dessus fut résolu en ce qui concerne les sections planes d' un cône de révolution par les mathématiciens belges **Dandelin et Quetelet** vers **1830.**

Cas de l' ellipse :

Soit Γ un cône de révolution de sommet o dont l' axe est supposé vertical. Soit π un plan qui coupe Γ suivant une ellipse E.

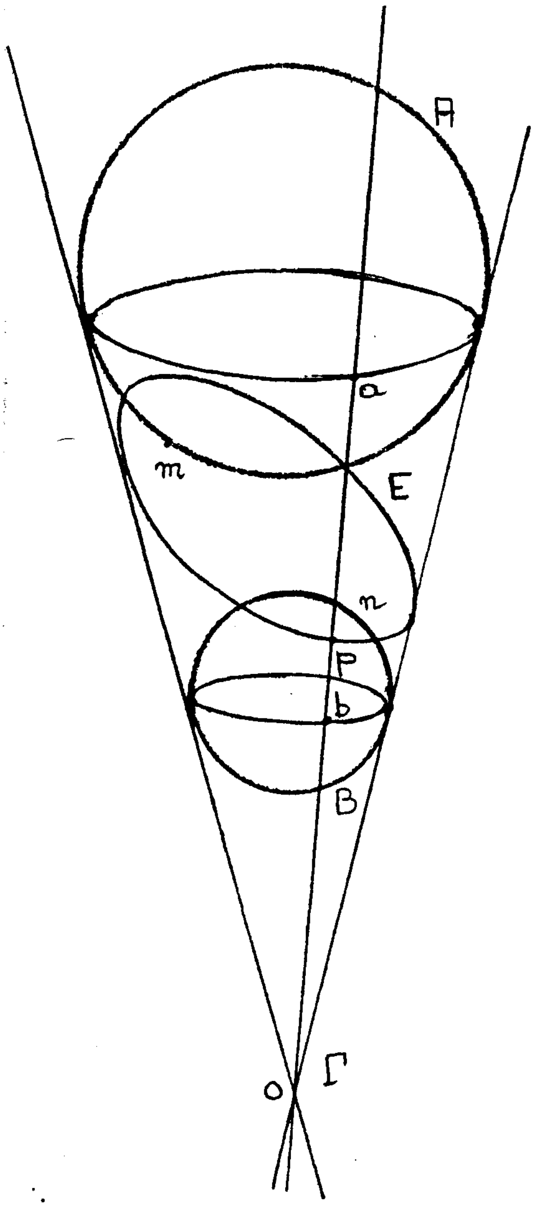
Il existe deux sphères A et B tangentes à Γ et tangentes à π en des points $A \cap \pi = m$ et $B \cap \pi = n$.

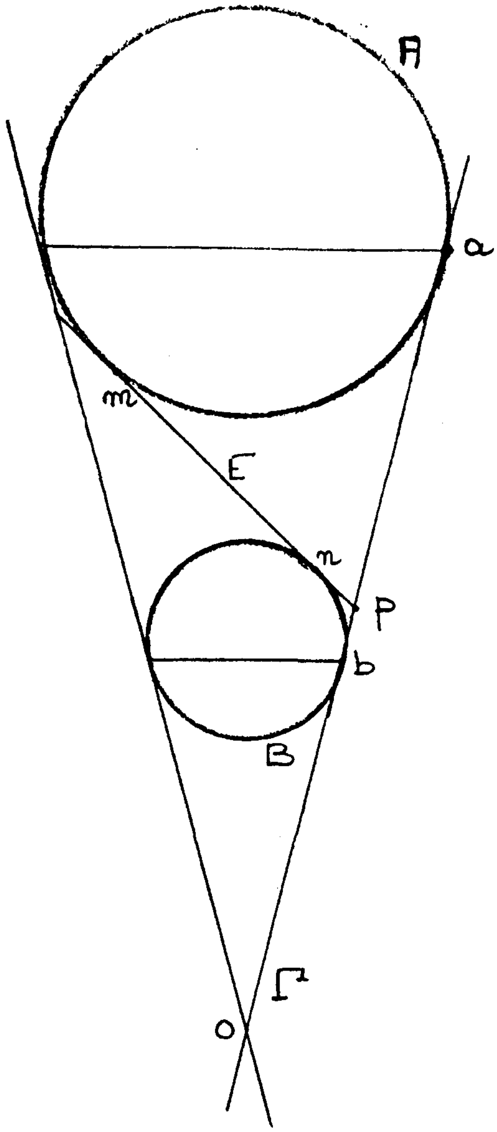
Nous prétendons que m et n sont les foyers de E.

En effet, soit $p \in E$ et op la génératrice de Γ qui est tangente à A en a et à B en b. On a $|pm| = |pa|$ car pm et pa sont des tangentes à la sphère issues d' un même point. On a de même $|pn| = |pb|$.

Il s' en suit que $|pm| + |pn| = |ab|$ qui est une constante indépendante du point choisi sur E.

De ce fait, E est bien une ellipse de foyers m et n.





Cas de l' hyperbole :

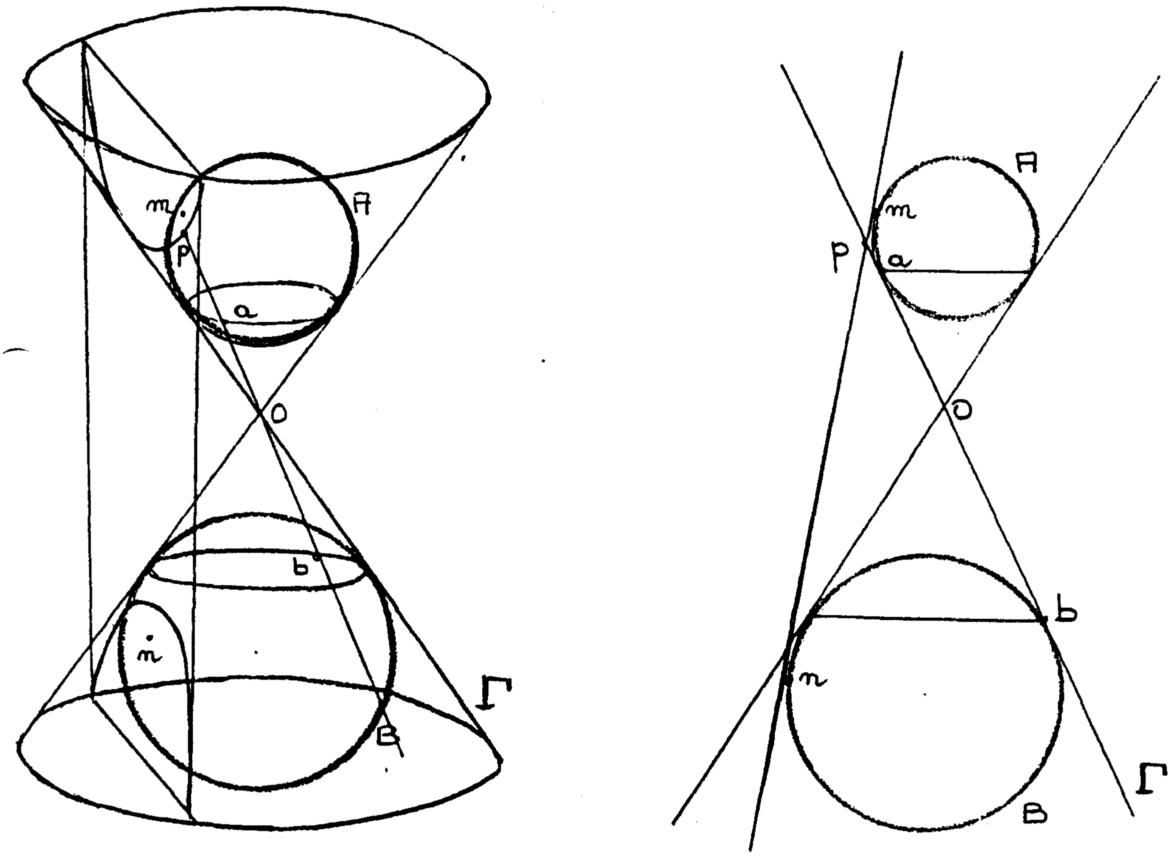
Soit Γ un cône de révolution de sommet o et dont l' axe est supposé vertical. Soit π un plan sécant aux deux nappes du cône.

Il existe deux sphères A et B tangentes à Γ et tangentes à π en des points $A \cap \pi = m$ et $B \cap \pi = n$.

Nous prétendons que m et n sont les foyers de l' hyperbole H obtenue comme intersection de π et de Γ.

En effet, soit $p \in H$ et op la génératrice de Γ qui est tangente à A en a et à B en b. On a $|pm| = |pa|$ et $|pn| = |pb|$. IL s' en suit que $|pn| - |pm| = |ab|$ qui est une constante indépendante du point p choisi sur H.

De ce fait, H est une hyperbole de foyers m et n.



Cas de la parabole :

Soit Γ un cône de révolution de sommet o et dont l' axe est supposé vertical. Soit π un plan sécant parallèle à la génératrice ok. Soit π' le plan perpendiculaire à π passant par l' axe du cône. Soit P l' intersection de π et de Γ. Montrons que P est une parabole.

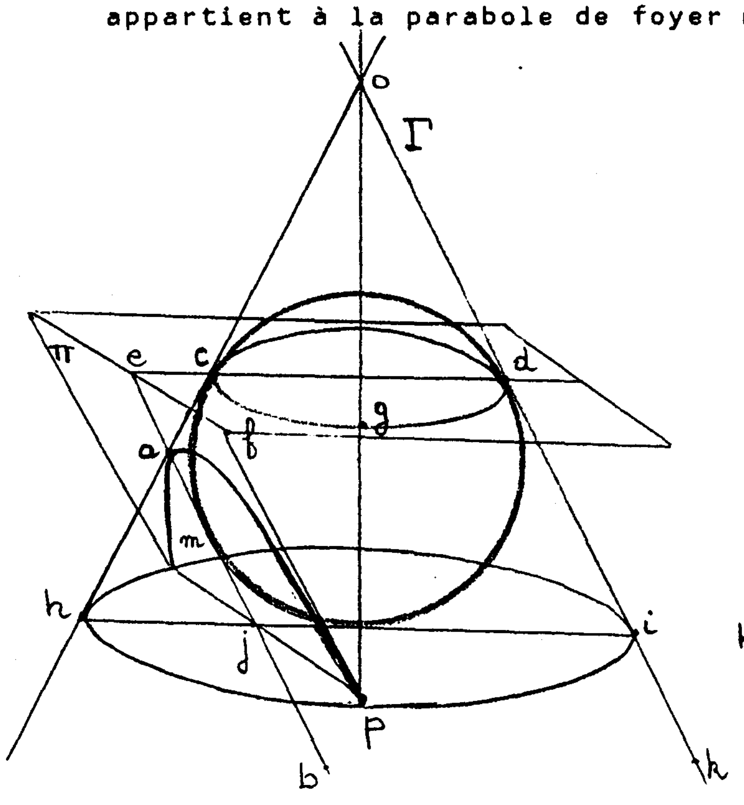
Le plan π coupe π' suivant la droite ab où $a \in \Gamma$. Dans π' on peut tracer le cercle tangent à oa en c, à ok en d et à ab en m. En faisant tourner ce cercle autour de l' axe du cône, on obtient une sphère qui coupe le cône suivant un cercle de diamètre cd et tangent à π en m. Le plan de ce cercle et π se coupent suivant une droite ef ($e \in cd$) perpendiculaire à π'.

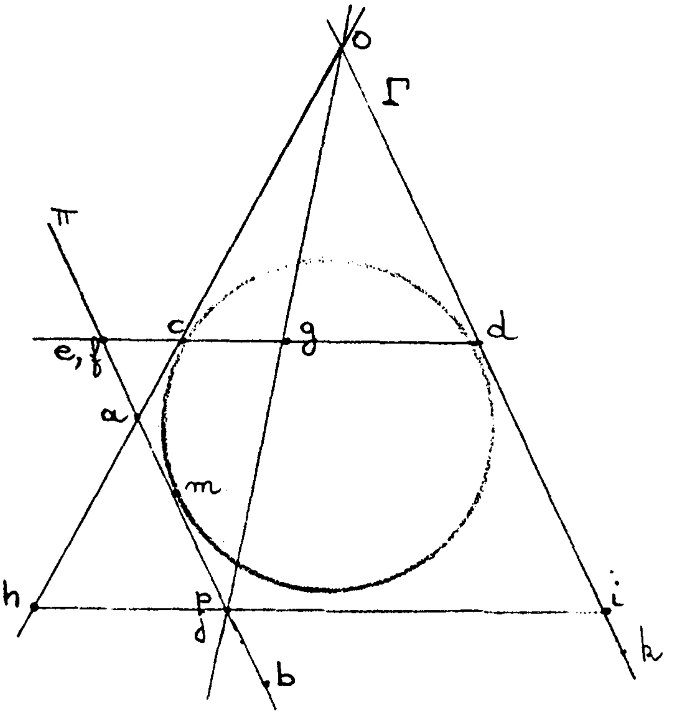
Soit p un point de $\Gamma \cap \pi$. On trace op qui coupe le cercle de diamètre cd en g. Par p, on trace le plan perpendiculaire à l' axe du cône. L' intersection de ce plan avec le cône est un cercle de diamètre hi ($h \in oa$ et $i \in ok$) et son intersection avec π est une droite pj perpendiculaire à π' ($j \in ab$). Comme ef $\parallel$ pj, on a $|ej| = |pf|$ qui est la distance du point p à la droite ef.

Les triangles ocd, aec et ahp sont semblables et comme $|oc| = |od|$, on a $|ac| = |ae|$ et $|ah| = |ap|$. il s' en suit que

$$\frac{|pf|}{|pm|} = \frac{|ej|}{|pm|} = \frac{|ej|}{|pg|} = \frac{|ej|}{|ch|} = 1$$

p est donc à égale distance du point m et de la droite ef et appartient à la parabole de foyer m et de directrice ef.



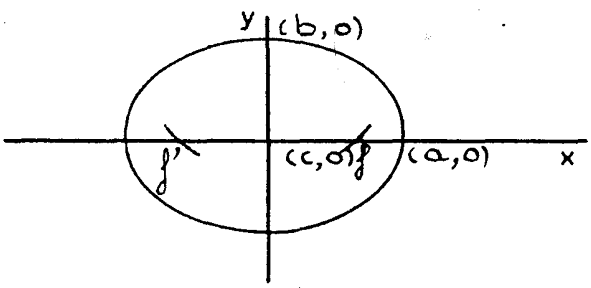


- EXENTRICITE , DIRECTRICE D' UNE CONIQUE -

Cas de l' ellipse :

Definitions :

1) L' exentricité, e, d' une ellipse est égale au rapport de la distance entre les foyers (distance focale) de l' ellipse et de la longueur de son grand axe.

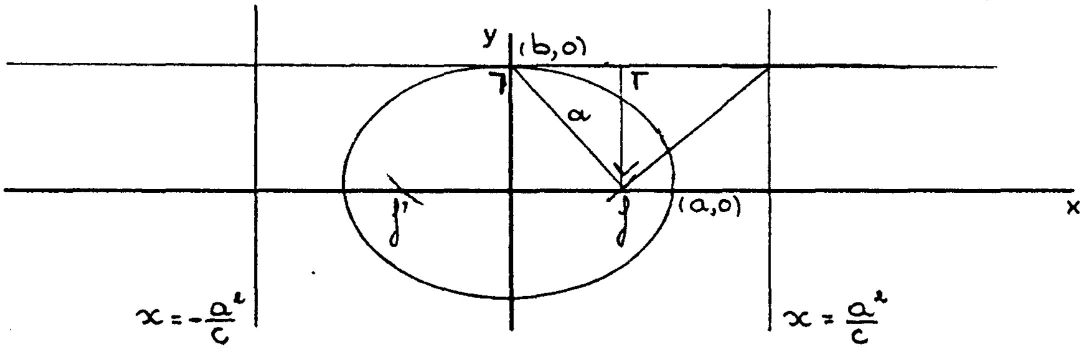


$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ où } \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 \\ |ff'| = 2c \end{cases}$$

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$$

(Si a = b, l' ellipse est un cercle dont l' exentricité est nulle)

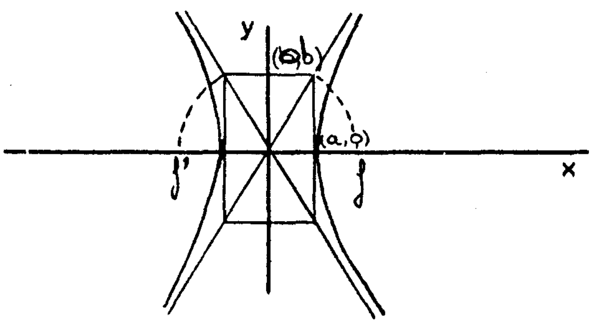
2) Les directrices d' une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, sont les droites d' équation $x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{a^2}{c}$



Cas de l' hyperbole :

Definitions :

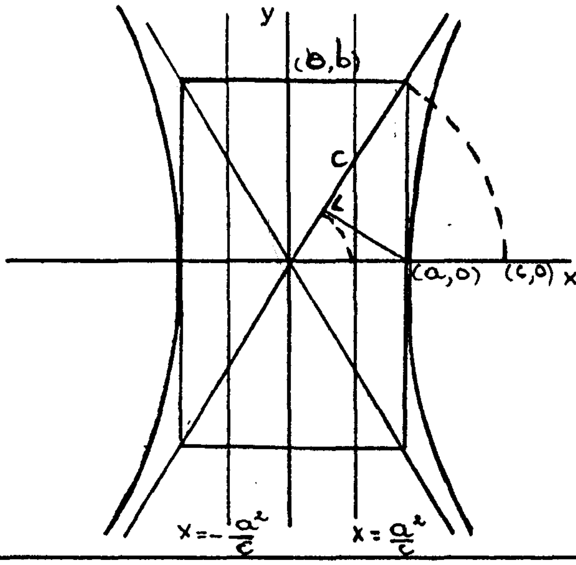
1) L' exentricité, e, d' une hyperbole est égale au rapport de la distance entre les foyers (distance focale) de l' hyperbole et de la distance entre ses sommets.

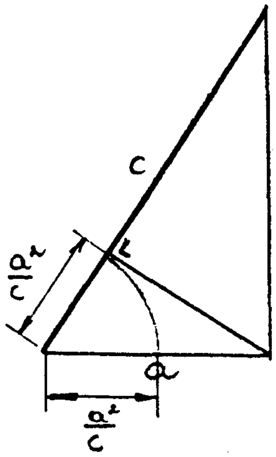


$$H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ où } \begin{cases} c^2 = a^2 + b^2 \\ |ff'| = 2c \end{cases}$$

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1$$

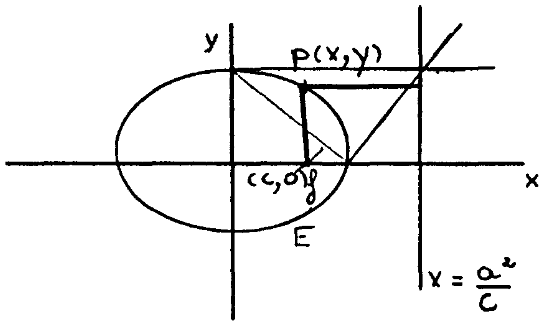
2) Les directrices d' une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, sont les droites d' équation $x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{a^2}{c}$





Théorème : Le rapport de la distance d' un point quelconque d' une ellipse (hyperbole) à un de ses foyers et de la distance du même point à la directrice correspondante est une constante qui vaut l' exentricité de l' ellipse (de l' hyperbole).

Démonstration du théorème pour l' ellipse :



$$p \in E : \frac{|pf|}{d(p,D)} = \frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{\frac{a}{e} - x} \quad (1)$$

or, vu la définition de l' ellipse, on a

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

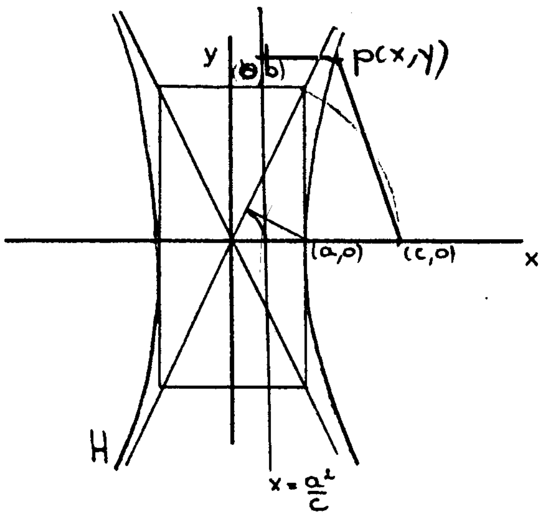
$$\Leftrightarrow \quad (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a.\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad -xc + a^2 = a.\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -xe + a$$

(1) devient $\frac{|pf|}{d(p,D)} = \frac{a - xe}{\frac{a}{e} - x} = e$

Démonstration du théorème pour l' hyperbole :



$p \in H$ et $x_p > 0$:

$$\frac{|pf|}{d(p,D)} = \frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{x - \frac{a}{e}} \quad (1)$$

or, vu la définition de l' hyperbole, on a

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 + 4a.\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

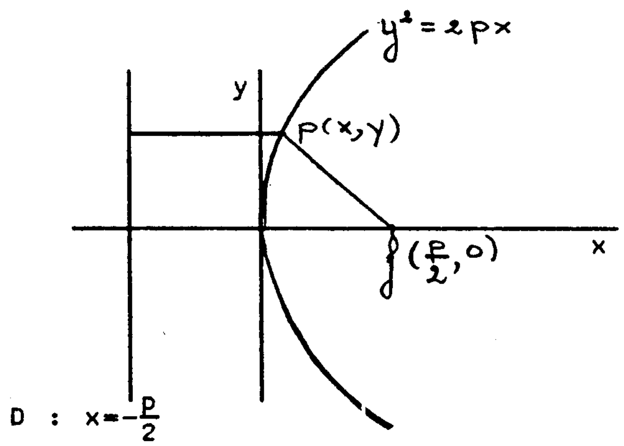
$$\Leftrightarrow \quad xc - a^2 = a.\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = xe - a$$

(1) devient $\dfrac{|pf|}{d(p,D)} = \dfrac{xe - a}{x - \frac{a}{e}} = e$

(Même démonstration pour $x_p < 0$)

Cas de la parabole :



Le rapport des distances d' un point de la parabole à son foyer et à sa directrice est une constante égale à 1.

On obtient donc une **nouvelle définition d' une conique** :

> **Une conique est le lieu des points dont le rapport des distances à un point fixe (foyer) et à une droite fixe (directrice) vaut une constante $e \in \mathbb{R}^+$ appelée exentricité de la conique.**

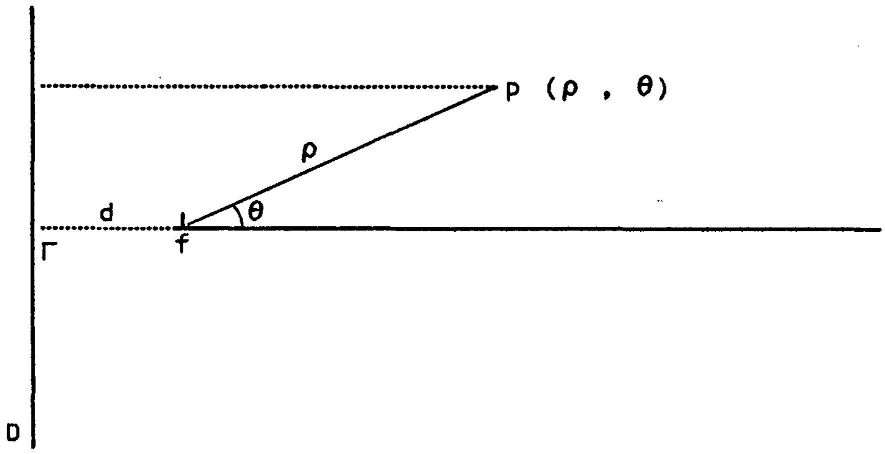
Si $e = 0$, la conique est un cercle

Si $0 \leq e < 1$, la conique est une ellipse

Si $e = 1$, la conique est une parabole

Si $e > 1$, la conique est une hyperbole

Exprimons ceci en coordonnées polaires :



p est un point d' une conique

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\rho}{d + \rho.\cos\theta} = e$$

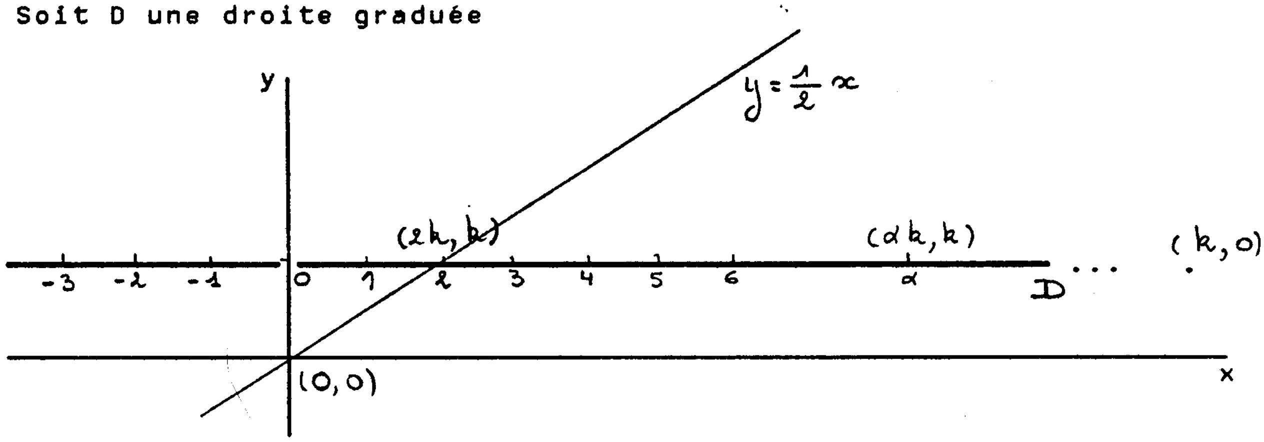
$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\rho = \frac{e.d}{1 - e.\cos\theta}}$$

Cette fonction a été analysée lors de l' étude des coordonnées polaires.

- COORDONNEES HOMOGENES -

1) **Sur une droite** :

Soit D une droite graduée



On place la droite D considérée dans le plan afin qu' elle aie comme équation $y = 1$. A chaque point du plan , autre que (0,0), on peut faire correspondre un point de D qui est son image par la projection de centre (0,0) sur D.

Par exemple, les points (4,2), (2,1), ($1,\frac{1}{2}$), ($\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}$), ... , ($2k,k$), où $k \in \mathbb{R}_0$, sont envoyés sur le point de D qui a pour abscisse 2.

Tous les points ($\alpha k,k$), où $k \in \mathbb{R}_0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, auront pour image le point de D qui a pour abscisse α, ou encore, tous les points de la droite d' équation $y = px$ où $p \in \mathbb{R}_0$,auront pour image le point de D qui a pour abscisse $\frac{1}{p}$, tandis que tous les points de la droite d' équation $x = 0$ auront pour image le point de D qui a pour abscisse 0.

Que se passe-t-il pour les points de la droite d' équation $y = 0$, c' est à dire pour les points de coordonnées (x,0) ? Ceux-ci auront pour image le point à l' infini (parfois appelé point impropre) de la droite D.

Pour un réel donné r, les points du plan, de coordonnées (rk,k) où $k \in \mathbb{R}_0$, auront pour image le point de D qui a pour abscisse r. Les points du plan, de coordonnées (k,0) où $k \in \mathbb{R}_0$, auront pour image le point à l' infini de la droite D.

Le raisonnement fait ci-dessus fait comprendre qu' au lieu de repérer un point p de D par un seul nombre (son abscisse x) on peut le représenter par un couple (X,Y) qui sont appelées " coordonnées homogènes " du point p. Ces coordonnées homogènes sont définies à une constante non nulle près :(X,Y) et(kX,kY) où $k \in \mathbb{R}_0$, représentent le **même** point.

Si $Y \neq 0$, le couple (X,Y) représente le point d' abscisse $x = \frac{X}{Y}$ de la droite D.

Si $Y = 0$, le couple (X,0) représente le point à l' infini ou impropre de la droite D.

2) **Dans le plan** :

Par un raisonnement similaire, un point p du plan peut être représenté par un triple (X,Y,Z) :

Si $Z \neq 0$, le triple (X,Y,Z) représente le point de coordonnées

$$(x,y) = (\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}).$$

Par exemple (1,4,5) ou (3,12,15) représentent le point ($\frac{1}{5},\frac{4}{5}$).

Si $Z = 0$, le triple (X,Y,0) représente un point à l' infini (impropre) du plan. Le point (1,7,0) par exemple est le point à l' infini des droites d' équation $y = 7x + c$ ($c \in \mathbb{R}$) du plan.

$Z = 0$ sera l' équation de la droite à l' infini du plan.

NOUVELLE DEFINITION D' UNE CONIQUE

Définition : Une conique est une courbe dont les points vérifient l' équation générale du second degré

$$a.x^2 + 2.b.x.y + c.y^2 + 2.d.x + 2.e.y + f = 0 \qquad (1)$$

où a, b, c, d, e et f $\in \mathbb{R}$

Les courbes que nous avons rencontrées jusqu'à présent et que nous avons appelées coniques sont du second degré. Il nous reste à définir quelles sont les courbes que nous appelerons ellipses, paraboles ou hyperboles, à voir si ces définitions ne contredisent pas nos définitions précédentes et enfin, à voir si nous n' obtenons pas de nouvelles courbes, non encore rencontrées jusqu' à présent.

Recherche des points à l' infini d' une conique :

Les points à l' infini d' une conique nous sont donnés par la résolution du système

$$\begin{cases} (1) : ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c.\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2b.\left(\frac{y}{x}\right) + a = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

On pose $\delta = b^2 - ac$

Si $\delta = b^2 - ac < 0$, la conique n' a pas de point à l' infini, nous appelerons ce type de conique, **ellipse**.

Si $\delta = b^2 - ac = 0$, la conique a un point à l' infini, $(1, -\frac{b}{c}, 0)$, nous appelerons ce type de conique, **parabole**.

Si $\delta = b^2 - ac > 0$, la conique a deux points à l' infini, $\left(1, \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{c}, 0 \right)$ nous appelerons ce type de conique, **hyperbole**.

Exemples:

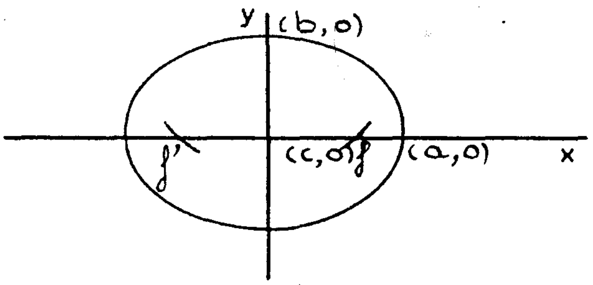
a) Pour E : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\quad \delta = -\frac{1}{a^2b^2} < 0$, $\quad$ E est une ellipse

- EXENTRICITE , DIRECTRICE D' UNE CONIQUE -

Cas de l' ellipse :

Definitions :

1) L' exentricité, e, d' une ellipse est égale au rapport de la distance entre les foyers (distance focale) de l' ellipse et de la longueur de son grand axe.

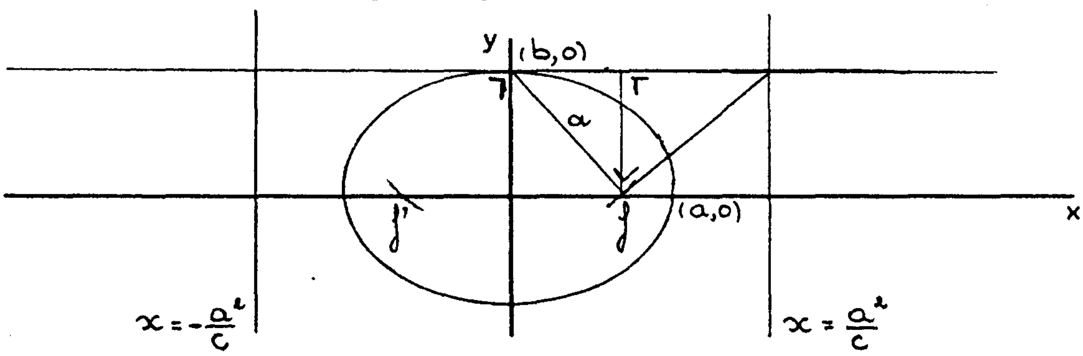


$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ où } \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 \\ |ff'| = 2c \end{cases}$$

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$$

(Si a = b, l' ellipse est un cercle dont l' exentricité est nulle)

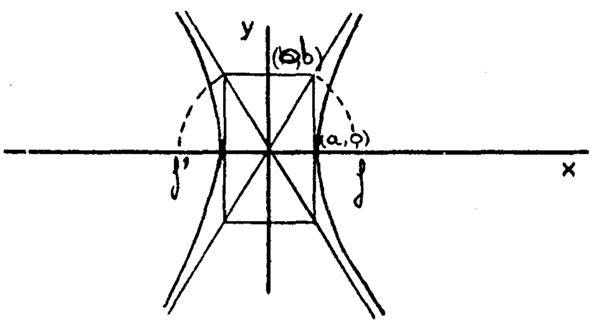
2) Les directrices d' une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, sont les droites d' équation $x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{a^2}{c}$



Cas de l' hyperbole :

Definitions :

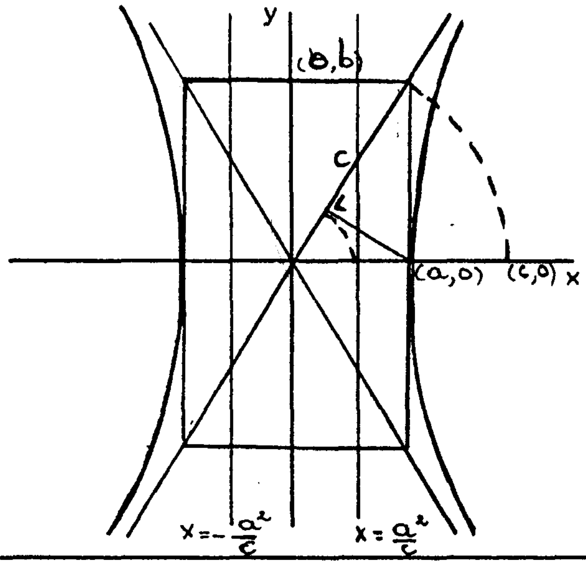
1) L' exentricité, e, d' une hyperbole est égale au rapport de la distance entre les foyers (distance focale) de l' hyperbole et de la distance entre ses sommets.

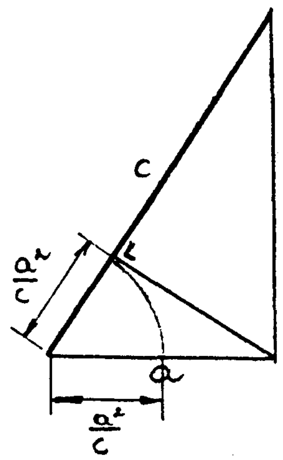


$$H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ où } \begin{cases} c^2 = a^2 + b^2 \\ |ff'| = 2c \end{cases}$$

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1$$

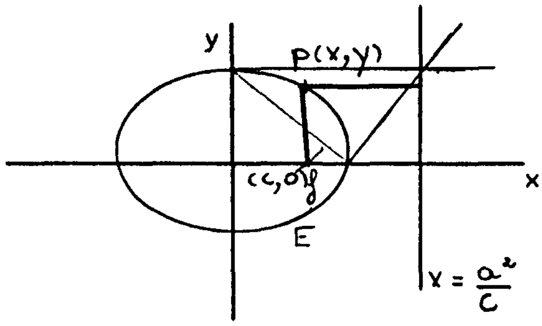
2) Les directrices d' une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, sont les droites d' équation $x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{a^2}{c}$





Théorème : Le rapport de la distance d' un point quelconque d' une ellipse (hyperbole) à un de ses foyers et de la distance du même point à la directrice correspondante est une constante qui vaut l' exentricité de l' ellipse (de l' hyperbole).

Démonstration du théorème pour l' ellipse :



$$p \in E : \frac{|pf|}{d(p,D)} = \frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{\frac{a}{e} - x} \quad (1)$$

or, vu la définition de l' ellipse, on a

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

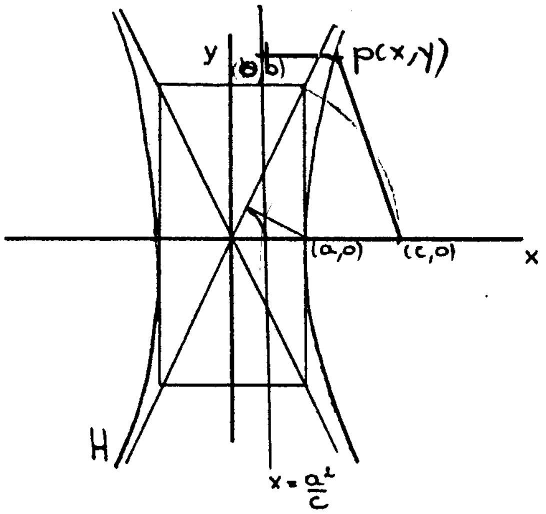
$$\Leftrightarrow \quad (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a.\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad -xc + a^2 = a.\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -xe + a$$

(1) devient $\frac{|pf|}{d(p,D)} = \frac{a - xe}{\frac{a}{e} - x} = e$

Démonstration du théorème pour l' hyperbole :



$p \in H$ et $x_p > 0$:

$$\frac{|pf|}{d(p,D)} = \frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{x-\frac{a}{e}} \quad (1)$$

or, vu la définition de l' hyperbole, on a

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 + 4a.\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

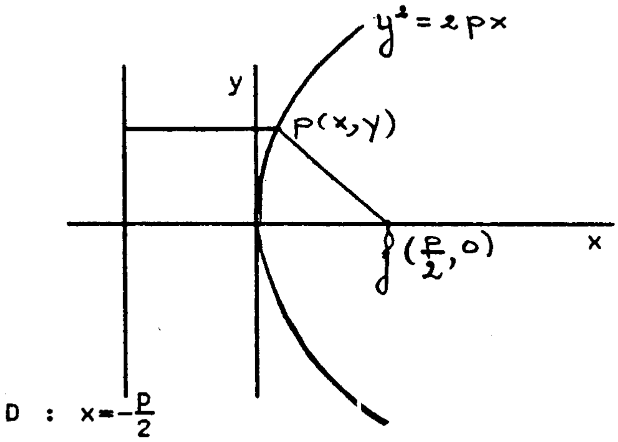
$$\Leftrightarrow \quad xc - a^2 = a.\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-c)^2+y^2} = xe - a$$

(1) devient $\displaystyle \frac{|pf|}{d(p,D)} = \frac{xe-a}{x-\frac{a}{e}} = e$

(Même démonstration pour $x_p < 0$)

Cas de la parabole :



Le rapport des distances d' un point de la parabole à son foyer et à sa directrice est une constante égale à 1.

On obtient donc une **nouvelle définition d' une conique** :

> **Une conique est le lieu des points dont le rapport des distances à un point fixe (foyer) et à une droite fixe (directrice) vaut une constante $e \in \mathbb{R}^+$ appelée exentricité de la conique.**

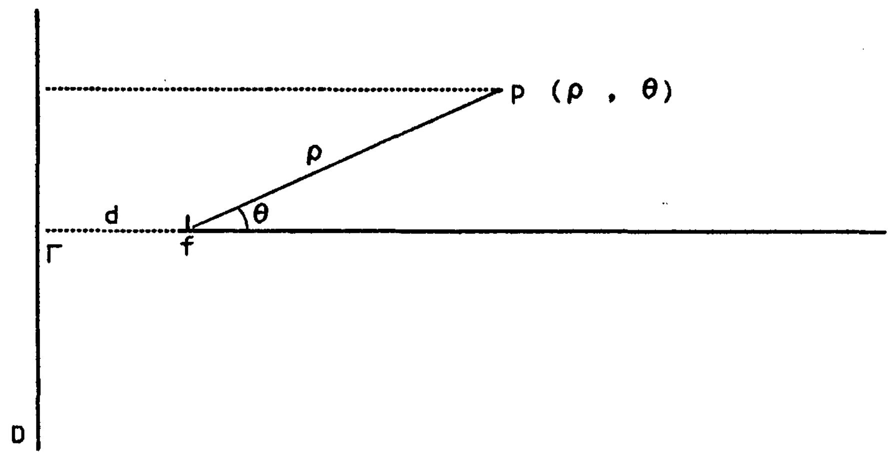
Si $e = 0$, la conique est un cercle

Si $0 \leq e < 1$, la conique est une ellipse

Si $e = 1$, la conique est une parabole

Si $e > 1$, la conique est une hyperbole

Exprimons ceci en coordonnées polaires :



p est un point d' une conique

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\rho}{d + \rho.\cos\theta} = e$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\rho = \frac{e.d}{1 - e.\cos\theta}}$$

Cette fonction a été analysée lors de l' étude des coordonnées polaires.

b) Pour H : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $\delta = \dfrac{1}{a^2b^2} > 0$, H est une hyperbole.

c) Pour P : $y - ax^2 - bx - c = 0$, $\delta = 0$, P est une parabole

d) Pour A : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$, (conique réduite au point (0,0)).

$\delta = -\dfrac{1}{a^2b^2} < 0$, A est une ellipse.

e) Pour B : $x^2 = 0$, (conique dégénérée en deux droites confondues)

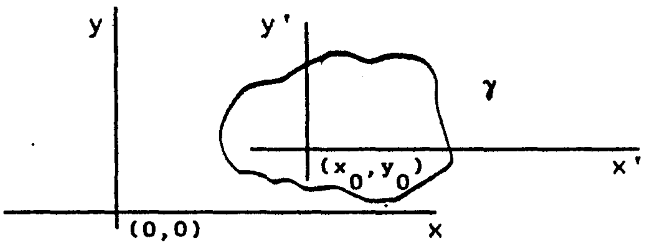
$\delta = 0$, B est une parabole.

f) Pour C : $xy = c$, $C = \dfrac{1}{4} > 0$, C est une hyperbole.

Réduction de $a.x^2 + 2.b.x.y + c.y^2 + 2.d.x + 2.e.y + f = 0$ à sa forme canonique

<u>Premier cas</u> : <u>$\delta = b^2 - ac \neq 0$ (cas de l' ellipse et de l' hyperbole)</u>

A) <u>Translation des axes pour faire disparaître les termes en x et en y</u>



$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$$

Dans les axes (X,Y), la conique γ a pour équation :

γ : $\varphi(x,y) = 0$ ou $a.x^2 + 2.b.x.y + c.y^2 + 2.d.x + 2.e.y + f = 0$

Dans les axes (X',Y'), la conique γ a pour équation :

$$\gamma : a.(x' + x_0)^2 + 2.b.(x' + x_0).(y' + y_0) + c.(y' + y_0)^2 + 2.d.(x' + x_0) + 2.e.(y' + y_0) + f = 0$$

ou γ : $ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2 + 2x'(ax_0 + by_0 + d) + 2y'(bx_0 + cy_0 + e) + k = 0$

On veut choisir (x_0,y_0) de telle manière que

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + d = 0 \\ bx_0 + cy_0 + e = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dfrac{\delta \varphi}{\delta x} = 0 \\ \dfrac{\delta \varphi}{\delta y} = 0 \end{cases}$$

Un tel point existe car nous avons supposé que $\delta = ac - b^2 \neq 0$.

Le point (x_0, y_0) qui vérifie le système

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\delta \varphi}{\delta x} = 0 \\ \dfrac{\delta \varphi}{\delta y} = 0 \end{cases}}$$

est appelé **centre de la conique.**

Les droites $ax + by + d = 0$

et $bx + cy + e = 0$

sont appelées **droites du centre de la conique.**

Le centre d' une conique est le **centre de symétrie** de cette conique. En effet, dans les axes (X',Y'), la conique a pour équation

$$\gamma : ax^2 + 2bxy + cy^2 + k = 0 \tag{2}$$

et son centre a pour coordonnées (0,0).

On a $\varphi(x,y) = \varphi(-x,-y)$ et le centre de la conique est bien centre de symétrie de cette conique.

B)<u>Rotation des axes pour éliminer le terme en xy.</u>(en axes orthonormés)

Soit R ,la rotation qui fait tourner les axes d' un angle α autour de l' origine :

$$R : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Dans les nouveaux axes, la conique γ a pour équation

$$(2) \quad \gamma : a(\cos\alpha.x' - \sin\alpha.y')^2 + c(\sin\alpha.x' + \cos\alpha.y')^2 +$$

$$+ 2b(\cos\alpha.x' - \sin\alpha.y').(\sin\alpha.x' + \cos\alpha.y') + k = 0$$

Si on veut choisir α de façon à éliminer le terme en $x'y'$, il faut que

$$- 2a.\cos\alpha.\sin\alpha + 2c.\cos\alpha.\sin\alpha + 2b.(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0$$

$$\text{ou} \quad b.\sin^2\alpha + (a - c).\sin\alpha.\cos\alpha - b.\cos^2\alpha = 0 \tag{3}$$

Etant donné que l' on peut supposer $b \neq 0$, sinon le terme en xy serait éliminé dès le départ, il s' en suit que $\cos\alpha \neq 0$, et (3) devient

$$b.tg^2\alpha + (a - c).tg\alpha - b = 0$$

ou, si $m = tg\alpha$

$$\boxed{b.m^2 + (a - c).m - b = 0}$$

$m = tg\alpha$ est le coefficient angulaire de droites passant par le centre, appelées **axes de la conique**. Ces axes sont perpendiculaires.

On appelle **sommets de la conique** les points d'intersection entre la conique et ses axes.

L'angle α trouvé et la rotation effectuée, la conique a pour équation dans les nouveaux axes :

$$\boxed{\gamma = A.x^2 + B.y^2 + C = 0}$$

L' équation "usuelle" d' une ellipse ou d' une hyperbole est bien de ce type-là.

<u>Exemple</u> :

$\gamma \quad : \quad \varphi(x,y) = 0$

$: 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0 \qquad \delta = -9 \neq 0$

droites du centre :

$$\begin{cases} \dfrac{\delta\varphi}{\delta x} = 0 \\ \dfrac{\delta\varphi}{\delta y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 8y - 18 = 0 \\ 8x + 10y - 18 = 0 \end{cases}$$

centre : $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{cases}$

translation des axes : $\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - 1 \end{cases}$

Dans les axes translatés, la conique a pour équation :

$$\gamma \quad : 5x^2 + 5y^2 + 8xy - 9 = 0$$

coefficients angulaires des axes :

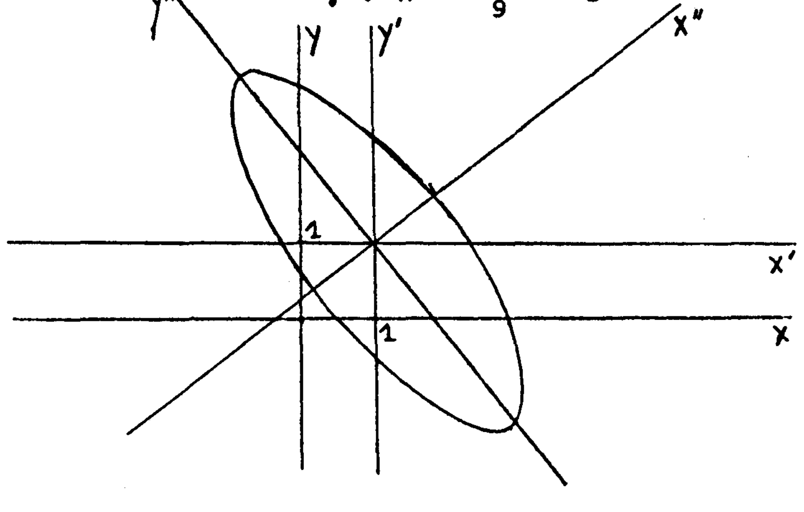
$$4.m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

Choisissons $tg\alpha = 1$ et $\alpha = \frac{\pi}{4}$ comme angle de rotation des axes :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Dans les nouveaux axes, la conique a pour équation

$$\gamma : x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$$



remarques :

1) Le centre d' une ellipse ou d' une hyperbole se trouve en résolvant le système

$$\begin{cases} \dfrac{\delta\ \varphi}{\delta\ x} = 0 \\ \dfrac{\delta\ \varphi}{\delta\ y} = 0 \end{cases}$$

2) Les équations des axes se trouvent en sachant que :

   a) ils passent par le centre

   b) leur coefficient angulaire vérifie l' équation suivante

$$b.m^2 + (a - c).m - b = 0$$

3) Connaissant $m = tg\alpha$, on peut facilement trouver la matrice de rotation des axes, en se souvenant que

$$\cos\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} \quad \text{et} \quad \sin\alpha = \pm \frac{tg\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}}$$

Second cas : $\delta = b^2 - ac = 0$ (cas de la parabole)

Ici, les "droites du centre" sont paralèles, le **centre** d' une parabole est à **l'infini** et a pour coordonnées $(1, -\frac{a}{b}, 0)$.

A) Rotation des axes pour éliminer le terme en xy.

Soit R ,la rotation qui fait tourner les axes d' un angle α autour de l' origine :

$$R : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Dans les nouveaux axes, la conique γ a pour équation

$$\begin{aligned} \gamma : a(\cos\alpha.x' - \sin\alpha.y')^2 &+ 2b(\cos\alpha.x' - \sin\alpha.y').(\sin\alpha.x' + \cos\alpha.y') \\ &+ c(\sin\alpha.x' + \cos\alpha.y')^2 + 2d(\cos\alpha.x' - \sin\alpha.y') \\ &+ 2e.(\sin\alpha.x' + \cos\alpha.y') + f = 0 \end{aligned}$$

Si on veut choisir α de façon à éliminer le terme en xy, il faut que

$$- 2a.\cos\alpha.\sin\alpha + 2b.(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2c.\cos\alpha.\sin\alpha = 0$$

ou $\quad b.\sin^2\alpha + (a - c).\sin\alpha.\cos\alpha - b.\cos^2\alpha = 0 \qquad (4)$

Etant donné que l' on peut supposer $b \neq 0$, sinon le terme en xy serait éliminé dès le départ, il s' en suit que $\cos\alpha \neq 0$, et (4) devient

$$b.tg^2\alpha + (a - c).tg\alpha - b = 0$$

ou, si $m = tg\alpha$

$$\boxed{b.m^2 + (a - c).m - b = 0}$$

Après avoir effectué la rotation des axes, l' équation de la parabole devient

$$\gamma : A.x^2 + C.y^2 + 2.D.x + 2.E.y + F = 0 \quad \text{où } A.C = 0$$

Supposons A = 0 (le cas où C = 0 se traite de la même manière).

On a

$$\gamma : C.y^2 + 2.D.x + 2.E.y + F = 0$$

ou $$C.(y^2 + 2.\frac{E}{C}.y + \frac{E^2}{C^2}) + 2.D.x + F - \frac{E^2}{C} = 0$$

ou $$C.(y + \frac{E}{C})^2 + 2.D.x + H = 0 \quad \text{où } H = F - \frac{E^2}{C} \quad (4)$$

B) translation des axes

1°) Si $D \neq 0$

Dans ce cas, (4) s' écrit

$$\gamma : C.(y + \frac{E}{C})^2 + 2.D.(x + \frac{H}{2D}) = 0$$

On effectue le changement d' axes,

$$\begin{cases} x = x' - \frac{H}{2D} \\ y = y' - \frac{E}{C} \end{cases}$$

Dans ces nouveaux axes, la conique a pour équation

$$\gamma : C.y^2 + 2.Dx = 0$$

ou $$\boxed{y^2 = - 2Kx}$$

L' équation "usuelle" d' une parabole est bien de ce type-là.

2°) Si $D = 0$

Dans ce cas, (4) s' écrit

$$\gamma : C.(y + \frac{E}{C})^2 + H = 0$$

On effectue le changement d' axes,

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' - \frac{E}{C} \end{cases}$$

dans ces nouveaux axes, la conique a pour équation

$$\gamma : C.y^2 + H = 0 \qquad \text{ou} \qquad \boxed{y^2 = -\frac{H}{C}}$$

qui est l' équation d' une parabole dégénérée en deux droites parallèles. Remarquons que ce dernier cas est une extension de notre première approche de la notion de parabole.

Exemple :

$\gamma \quad : \quad \varphi(x,y) = 0$

$\quad : 4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0 , \qquad \delta = 0$

Rotation des axes :

$-2.tg^2\alpha + 3.tg\alpha + 2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad tg\alpha = -\frac{1}{2}$ ou $tg\alpha = 2$

Choisissons $tg\alpha = 2$.

Dans ce cas, $\sin\alpha = \pm \dfrac{tg\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \pm \dfrac{2.\sqrt{5}}{5}$

et $\cos\alpha = \pm \dfrac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \pm \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Comme $tg\alpha > 0$, on prend $\sin\alpha = + \frac{2.\sqrt{5}}{5}$ et $\cos\alpha = + \frac{\sqrt{5}}{5}$

On a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & -2\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 2\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

et, dans les nouveaux axes, la conique a pour équation

$$\gamma : 5y^2 - 6\sqrt{5}x - 2\sqrt{5}y + 7 = 0 \tag{5}$$

Translation des axes :

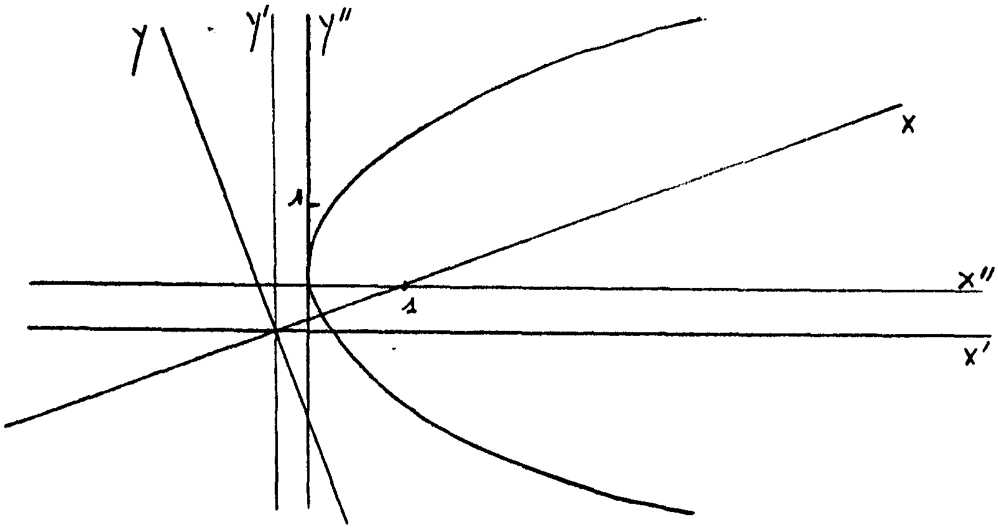
$(5) \quad \Leftrightarrow \quad 5(y^2 - \frac{2.\sqrt{5}}{5}y + \frac{1}{5}) - 6\sqrt{5}(x - \frac{\sqrt{5}}{5}) = 0$

$\quad \Leftrightarrow \quad 5(y - \frac{\sqrt{5}}{5})^2 - 6\sqrt{5}(x - \frac{\sqrt{5}}{5}) = 0$

$$\begin{cases} x' = x - \frac{\sqrt{5}}{5} \\ y' = y - \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Dans les nouveaux axes, la parabole a pour équation

$y^2 = 6.\frac{\sqrt{5}}{5}.x$



<u>En résumé</u> :

Equation canonique d' un ellipse ou d' une hyperbole :

$$A.x^2 + B.y^2 + C = 0 \qquad \text{où } A, B, C \in \mathbb{R},\ A.B \neq 0$$

Equation canonique d' une parabole :

$$y^2 = -2.A.x \text{ ou } x^2 = A \qquad \text{où } A \in \mathbb{R}$$

Différents cas possibles :(suivant que les coefficients sont nuls, positifs ou négatifs, on peut changer les unités sur les axes de telle manière à ce que ces coefficients valent 0, 1 ou -1)

$1.x^2 + 1.y^2 = -1$	: Ellipse imaginaire ou le vide
$1.x^2 + 1.y^2 = 0$	: Ellipse dégénérée en un point
$1.x^2 + 1.y^2 = 1$	: Ellipse proprement dite
$1.x^2 - 1.y^2 = 0$	: Hyperbole dégénérée en deux droites sécantes
$1.x^2 - 1.y^2 = 1$	: Hyperbole proprement dite
$1.x^2 + 1 = 0$	: Parabole imaginaire ou le vide
$1.x^2 - 1 = 0$	: Parabole dégénérée en deux droites parallèles distinctes
$1.x^2 = 0$	: Parabole dégénérée en deux droites parallèles confondues
$1.x^2 - y = 0$	: Parabole proprement dite

On peut démontrer qu' une conique

$$\gamma \ : ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

est dégénérée si et seulement si

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$$

Exemple :

$$\gamma \ : 2x^2 + 5xy + 3y^2 - 4x - 3y - 6 = 0 \qquad (6)$$

On a $\Delta = 0$ et $\delta > 0$. La conique est donc une hyperbole dégénérée.

Comment calculer l' équation des droites sécantes qui composent cette hyperbole ?

Première manière :

(6) $\quad 3y^2 + y.(5x - 3) + 2x^2 - 4x - 6 = 0 \qquad (7)$

peut être considérée comme une équation du second degré en y dont le discriminant vaut

$25x^2 - 30x + 9 - 24x^2 + 48x + 72 = (x + 9)^2$

(7) $\Leftrightarrow \; y = \dfrac{-5x + 3 \pm (x + 9)}{6}$

$\Leftrightarrow \; y = -\frac{2}{3}x + 2 \quad$ ou $\quad y = -x - 1$

qui sont les équations des deux droites qui composent l' hyperbole.

Deuxième manière :

Dans les pages qui suivent, nous étudierons le moyen de calculer le coefficient angulaire des asymptotes d' une hyperbole. Dans le cas qui nous occupe, on obtient

$$m = -1 \text{ et } m = -\frac{2}{3}$$

D' autre part, le centre de l' hyperbole se trouve en résolvant le système

$$\begin{cases} 4x + 5y - 4 = 0 \\ 5x + 6y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 \\ y = 8 \end{cases}$$

On a un point et le coefficient angulaire des droites qui composent l' hyperbole et il est aisé d' en déterminer l' équation.

- INTERSECTION D' UNE DROITE ET D' UNE CONIQUE -

Soit une conique $\gamma : \varphi(x,y) = 0$

$$\gamma : ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

où a, b, c, d, e et f $\in \mathbb{R}$

et une droite D : $\begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \end{cases}$ (1)

où (x_1 , y_1) et (x_2 , y_2) sont les coordonnées de deux points de D et où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pour trouver l' intersection de D et de γ, il suffit de déterminer la(les) valeur(s) de λ qui vérifie(nt) l' équation

$$\begin{aligned} &a.[(x_1 + \lambda(x_2 - x_1)]^2 + 2b.[(x_1 + \lambda(x_2 - x_1)].[(y_1 + \lambda(y_2 - y_1)] \\ &\quad + c.[(y_1 + \lambda(y_2 - y_1)]^2 + 2d.[(x_1 + \lambda(x_2 - x_1)] \\ &\quad + 2e\ [(y_1 + \lambda(y_2 - y_1)] + f = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} &\lambda^2.[a(x_2 - x_1)^2 + 2b(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + c(y_2 - y_1)^2] \\ &+ \lambda.[\ 2ax_1(x_2 - x_1)+ 2bx_1(y_2 - y_1) + 2by_1(x_2 - x_1) + 2cy_1(y_2 - y_1) + \\ &\quad 2d(x_2 - x_1) + 2e(y_2 - y_1)] \\ &+ \varphi(x_1,y_1) = 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

ou, si on introduit la notion de dérivée partielle

$$\varphi'_x = \frac{\delta\ \varphi}{\delta\ x} = 2ax + 2by + 2d$$

$$\varphi'_y = \frac{\delta\ \varphi}{\delta\ y} = 2bx + 2cy + 2e$$

(2) s' écrit

$$\begin{aligned} &\lambda^2.[a(x_2 - x_1)^2 + 2b(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + c(y_2 - y_1)^2] \\ &+ \lambda.[\ \left(\frac{\delta\ \varphi}{\delta\ x}\right)_1 (x_2 - x_1)+ \left(\frac{\delta\ \varphi}{\delta\ y}\right)_1 (y_2 - y_1)\ ] + \varphi(x_1,y_1) = 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

où $\left(\frac{\delta\ \varphi}{\delta\ x}\right)_1$ signifie, "la valeur de $\frac{\delta\ \varphi}{\delta\ x}$ où $x = x_1$ et $y = y_1$"

et $\left(\frac{\delta\ \varphi}{\delta\ y}\right)_1$ signifie, "la valeur de $\frac{\delta\ \varphi}{\delta\ y}$ où $x = x_1$ et $y = y_1$"

Cette équation en λ a 0, 1 ou 2 solutions qui par (1) livrent les éventuels points d' intersection de la droite D et de la conique γ.

- TANGENTES A UNE CONIQUE EN UN DE SES POINTS -

Soit (x_1,y_1) un point de la conique d' équation $\varphi(x,y) = 0$.

Une droite D d' équation

$$D : \begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \end{cases}$$

qui passe par (x_1,y_1), n' aura que ce seul point comme point d' intersection avec la conique si dans (3), le discriminant de l' équation vaut 0, c' est à dire si

$$\left(\frac{\delta\ \varphi}{\delta\ x}\right)_1 (x_2 - x_1) + \left(\frac{\delta\ \varphi}{\delta\ y}\right)_1 (y_2 - y_1) = 0$$

Tout point (x_2,y_2) qui vérifie cette dernière relation sera sur la tangente à la conique γ en un de ses points (x_1,y_1).

On en déduit que la tangente à la conique γ en un de ses points (x_1,y_1) a pour équation

$$\boxed{T_{(x_1,y_1)} : \left(\frac{\delta\ \varphi}{\delta\ x}\right)_1 (x - x_1) + \left(\frac{\delta\ \varphi}{\delta\ y}\right)_1 (y - y_1) = 0} \qquad (4)$$

<u>Autre formulation de l' équation de la tangente à la conique γ en un de ses points (x_1,y_1)</u>

1)
$$\boxed{T_{(x_1,y_1)} : \left(\frac{\delta\ \varphi}{\delta\ x}\right)_1 x + \left(\frac{\delta\ \varphi}{\delta\ y}\right)_1 y + \left(\frac{\delta\ \varphi}{\delta\ z}\right)_1 z = 0} \qquad (5)$$

En effet :

(4) s' écrit

$(2ax_1 + 2by_1 + 2d).(x - x_1) + (2bx_1 + 2cy_1 + 2e).(y - y_1) = 0$

(5) s' écrit

$(2ax_1 + 2by_1 + 2dz_1).x + (2bx_1 + 2cy_1 + 2ez_1).y + (2dx_1 + 2ey_1 + 2fz_1).z = 0$

Ces deux expressions sont égales si

$-2ax_1^2 - 2bx_1y_1 - 2dx_1 - 2bx_1y_1 - 2cy_1^2 - 2ey_1 = 2dx_1 + 2ey_1 + 2f$,

ce qui est vérifié car (x_1,y_1) est un point de la conique.

2)

$$\boxed{T_{(x_1,y_1)} \; : \; \left(\frac{\delta\ \varphi}{\delta\ x}\right).x_1 + \left(\frac{\delta\ \varphi}{\delta\ y}\right).y_1 + \left(\frac{\delta\ \varphi}{\delta\ z}\right).z_1 = 0} \qquad (6)$$

En effet :

(6) s' écrit

$$(2ax + 2by + 2dz).x_1 + (2bx + 2cy + 2ez).y_1 + (2dx + 2ey + 2fz).z_1 = 0$$

qui est équivalent à (5).

<u>Exemples</u> :

1) La tangente à la conique $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ au point $(a,0)$ a pour équation $x = a$.

2) La tangente à la conique $3xy + x - y + 1 = 0$ au point $(0,1)$ a pour équation $4x - y + 1 = 0$
