- ASYMPTOTE(S) OU TANGENTE(S) AU(X) POINT(S) A L' INFINI D' UNE CONIQUE -

Cas de l' hyperbole :

Soit une hyperbole ayant pour équation

$\gamma : \varphi(x,y) = 0$

ou $\gamma : ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ où a, b, c, d, e et f $\in \mathbb{R}$

et $b^2 - ac > 0$

Les points à l' infini de l' hyperbole ont pour coordonnées

$(1 , m_1 , 0)$ et $(1 , m_2 , 0)$ où $m_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{c}$

$m_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{c}$

m_1 et m_2 sont les directions asymptotiques de l' hyperbole c' est à dire les pentes de ses asymptotes.

Recherche des asymptotes :

Première manière : D' une part, on connaît la pente des asymptotes et d' autre part, celles-ci passent par le centre de la conique.

Exemple : $\gamma : y^2 - x^2 - y + 2x = 0 \qquad \delta = 1 > 0$

$$\text{Points à l' infini} : \begin{cases} y^2 - x^2 - yz + 2xz = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = 0 \text{ ou } m = \pm 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Centre} : \begin{cases} \dfrac{\delta \varphi}{\delta x} = -2x + 2 = 0 \\ \dfrac{\delta \varphi}{\delta y} = 2y - 1 + 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Asymptotes} : \quad y = x - \frac{1}{2}$$

$$y = -x + \frac{3}{2}$$

Seconde manière :Une asymptote est une tangente en un point à l' infini, (1,m,0), de la conique.

L' asymptote a donc pour équation

$$1.\frac{\delta \varphi}{\delta x} + m.\frac{\delta \varphi}{\delta y} + 0.\frac{\delta \varphi}{\delta z} = 0$$

ou $$\boxed{\frac{\delta \varphi}{\delta x} + m.\frac{\delta \varphi}{\delta y} = 0}$$

ou avec d' autres notations

$$\boxed{\varphi'_x + m.\varphi'_y = 0}$$

Exemple : γ : $y^2 - x^2 - y + 2x = 0$ $\delta = 1 > 0$

Point à l' infini : (1,1,0)

Asymptote correspondante : $1.(-2x + 2) + 1.(2y - 1) = 0$

ou $y = x - \frac{1}{2}$

Point à l' infini : (1,-1,0)

Asymptote correspondante : $1.(-2x + 2) - 1.(2y - 1) = 0$

ou $y = -x + \frac{3}{2}$

Hyperbole équilatère :

Dans un repère orthonormé, la condition pour qu' une hyperbole soit équilatère est :

$$\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{c}\right).\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{c}\right) = -1 \Leftrightarrow \boxed{a = -c}$$

Cas de la parabole :

Soit une parabole ayant pour équation

$\gamma : \varphi(x,y) = 0$

ou γ : $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ où a, b, c, d, e et f $\in \mathbb{R}$

et $b^2 - ac = 0$

Les points à l' infini de la parabole ont pour coordonnées

$$(c , - b , 0)$$

L' asymptote de la parabole a pour équation

$$c.\varphi'_x - b.\varphi'_y = 0$$

ou $c.(2ax + 2by + 2dz) - b.(2bx + 2cy + 2ez) = 0$

ou $(cd - eb).z = 0$

1) Si $cd - eb = 0$, comme $b^2 - ac = 0$

$$\gamma : \frac{b^2}{c}x^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2\frac{cd}{b}y + f = 0$$

ou $\gamma : (bx + cy).(bx + cy + 2\frac{dc}{b}) + fc = 0$

La parabole est dégénérée en deux droites parallèles.

2) Si $cd - eb \neq 0$, la parabole est proprement dite et son asymptote est la **droite à l' infini, z = 0.**

- FAISCEAUX DE CONIQUES -

Plan de travail :

Une conique $\gamma : \varphi(x, y) = 0$

$$\gamma : ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

où a, b, c, d, e et $f \in \mathbb{R}$

est déterminée par 5 points.

Par quatre points passent une infinité de coniques.

Soient deux coniques C_1 et C_2 d' équation

$$C_1 : \varphi_1(x,y,z) = 0 \text{ et } C_2 : \varphi_2(x,y,z) = 0$$

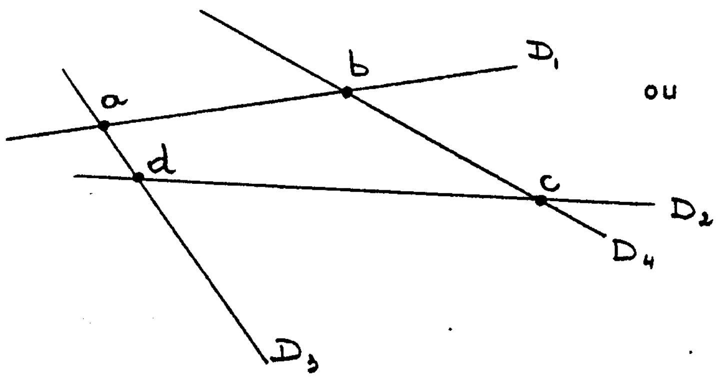
On appelle faisceau de coniques, l' ensemble des coniques

$$(C) : \alpha.\varphi_1(x,y,z) + \beta.\varphi_2(x,y,z) = 0 \quad \text{où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

ou $$(C) : \varphi_1(x,y,z) + \lambda.\varphi_2(x,y,z) = 0 \quad \text{où } \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$$

($\lambda = \infty$ correspondant à $C : .\varphi_2(x,y,z) = 0$)

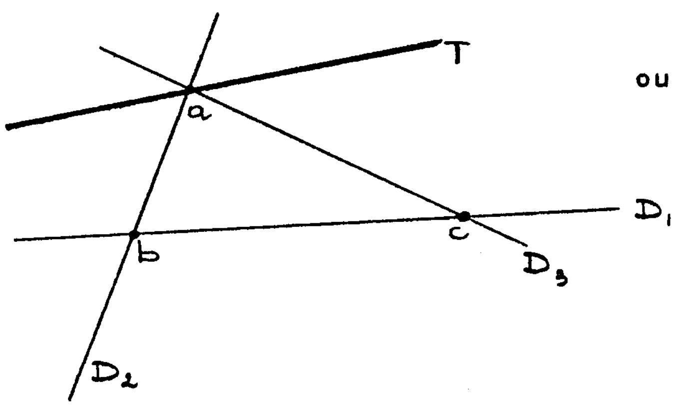
Coniques passant par quatre points :



$$(C) : \alpha.D_1.D_2 + \beta.D_3.D_4 = 0$$
$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

ou $$(C) : D_1.D_2 + \lambda.D_3.D_4 = 0$$
$$\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$$

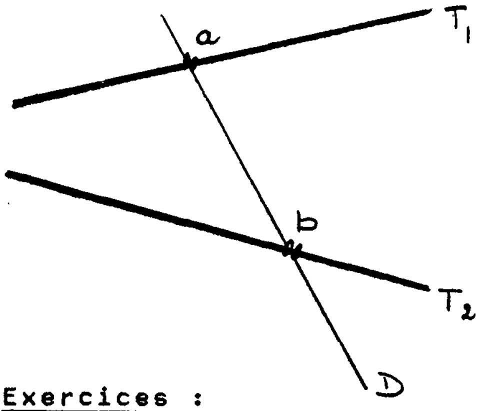
Coniques passant par trois points et tangentes à une droite donnée ,T, en un de ces points :



$$(C) : \alpha.D_1.T + \beta.D_2.D_3 = 0$$
$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

ou $$(C) : D_1.T + \lambda.D_2.D_3 = 0$$
$$\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$$

Coniques tangentes à deux droites données, en deux points donnés de ces droites :



$$(C) : \alpha.T_1.T_2 + \beta.D^2 = 0 \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

ou $$(C) : T_1T_2 + \lambda.D^2 = 0 \qquad \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$$

<u>Exercices</u> :

1. Déterminer l' équation des coniques passant par les points a(4,0), b(4,1), c(0,3), d(2,3).
2. Déterminer l' équation des coniques passant par les points a(1,0), b(0,1) et admettant les axes pour directions asymptotiques.
3. En axes orthonormés, déterminer l' équation des hyperboles équilatères ayant l' axe Y pour direction asymptotique et tangente en (1,1) à la droite D : $x + y - 2 = 0$.
4. Déterminer l' équation des coniques passant par les points a(1,0), b(3,0) et admettant l' axe Y pour asymptote.
5. Déterminer l' équation des paraboles admettant l' axe X pour direction asymptotique et tangentes à l' axe Y à l' origine.
6. Déterminer l' équation des hyperboles passant par les points a(0,1), b(1,1) et admettant la deuxième bissectrice des axes pour asymptote.
7. En axes orthonormés, déterminer l' équation des coniques ayant l' axe Y pour asymptote et tangentes à l' axe X en (1,0).
   Parmi ces coniques, déterminer
   a) celle qui comprend (-1,-1)
   b) les paraboles
   c) les hyperboles équilatères
   d) les coniques dégénérées
   e) les cercles
8. Déterminer l' équation des coniques circonscrites à un parallélogramme et trouver le lieu des points de rencontre des tangentes à ces coniques en deux sommets consécutifs du parallélogramme.

9. En axes orthonormés, déterminer l' équation de l' hyperbole équilatère qui passe par (0,0), (0,3), (2,0) et dont la pente d' une asymptote vaut 2. Déterminer l' équation des asymptotes.
10. Déterminer l' équation des paraboles admettant l' axe X pour direction asymptotique et passant par les points (0,1) et (0,-1).
11. Déterminer l' équation des coniques passant par les points a(1,0), b(-1,0) et ayant les bissectrices des axes pour directions asymptotiques.
12. Déterminer l' équation de la conique passant par l' origine et par les points communs à

    $C_1 : 2x^2 - xy + y - 1 = 0$

    et $\mathcal{C}_2 : y^2 + 2x + 3 = 0$

    Trouver l' équation de la tangente à l' origine, à la conique ainsi trouvée.
13. On donne le point a(0,1) et la droite D : y = x

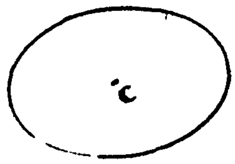
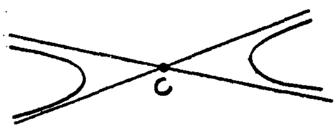
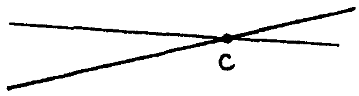
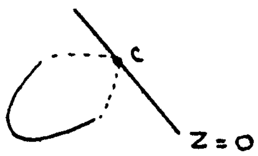
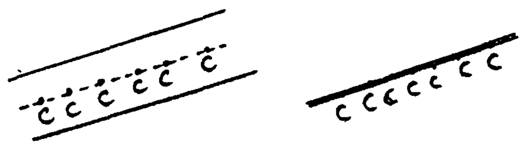
    a) Déterminer l' équation des hyperboles tangentes à l' axe X à l' origine, passant par le point a et dont une direction asymptotique est D.

    b) Trouver le lieu du point d' intersection de la tangente à ces hyperboles en a avec l' asymptote parallèle à D.
14. Déterminer l' équation des coniques tangentes à l' axe X au point d' abscisse 2 et passant par les points (0,1) et (1,-2). Déterminer les coniques décomposables du faisceau.
15. Déterminer l' équation des paraboles passant par l' origine et par les points a(1,0), b(0,1).
16. En axes orthonormés, déterminer l' équation des coniques qui passent par (2,0) et qui ont même tangente à l' origine que le cercle de centre (1,0) et de rayon 1.
17. On donne deux points fixes a et b et un point p, mobile sur une droite D. En a, on élève la perpendiculaire à pa. En b, on élève la perpendiculaire à pb. Quel est le lieu du point de rencontre de ces perpendiculaires ?
18. Par le sommet c, d' un rectangle oacb, on fait passer une droite mobile qui coupe la droite oa en s et ob en q. Quel est le lieu du point de rencontre des droites qa et sb ?

19. Dans un miroir parabolique, tout rayon lumineux envoyé du foyer des paraboles sur le miroir ,se réfléchit parallèlement à l' axe de la parabole.

20. Dans un miroir elliptique, tout rayon lumineux émis du foyer des ellipses, se réfléchit sur le miroir en passant par l' autre foyer.

21. Les coniques et leurs centres :

	Proprement dite	Dégénérée
Ellipse		
Hyperbole		
Parabole		

22. On donne la parabole P : $y^2 = 4x$ et le point $a(1,k)$ où $k \in \mathbb{R}$.
Une droite mobile passant par l' origine coupe P en un point variable b. Le diamètre (droite parallèle à l' axe) de la parabole passant par le point b ,rencontre la tangente à l' origine à P ,en un point c.
Quel est le lieu du point de rencontre des droites ob et ac ?

Les exercices qui suivent ont été posés lors d' examens d' entrée à l' école polytechnique de l' U.L.B.

1.Juillet 80

Dans le plan euclidien muni d' un repère orthonormé d' axes X, Y on donne les points p(a,0) et q(0,b)où a.b $\neq$ 0. On demande :

1)de former l' équation des coniques K admettant l' origine o pour centre et tangentes à la droite pq en p.

2)de discuter la nature de ces coniques.

3)de montrer que par tout point r donné (distinct de p et de q) il passe une seule conique K et de distinguer les positions du point r qui donnent une ellipse, une hyperbole ou une parabole.

4)d' examiner s' il existe une conique K proprement dite tangente à une droite D donnée parallèle à l' axe Y et de distinguer les positions de cette droite D qui donnent une ellipse ou une hyperbole.

5)de déterminer l' équation et la nature de la conique K ayant pour directions principales (directions des axes) celles des bissectrices des axes X et Y.

6)d' examiner s' il existe parmi les coniques K une hyperbole équilatère ou un cercle.

2.Septembre 80

Dans le plan euclidien muni d' un repère orthonormé d' axes X, Y on donne les points p(2,0) et q(0,1).

1)Former l' équation cartésienne de la famille de coniques (K) comprenant les points o(0,0), p et q et tangentes en o à la perpendiculaire à la droite pq issue de o.

2)Discuter la nature des coniques (K).

3)Déterminer l' équation de la conique K_1 de la famille (K) ayant une direction asymptotique parallèle à la première bissectrice des axes.

4)Déterminer les asymptotes de K_1 et représenter K_1 sur une figure (unité = 4cm).

5)Déterminer l' équation et la nature du lieu des centres des coniques (K) ; dessiner celui-ci sur la figure du (4).

3.Juillet 81

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d' axes X, Y on donne la conique K d' équation

$$x^2 + 4y^2 - 3x - 4 = 0$$

On demande :

1)de construire K dans le repère donné (unité = 2 cm)

2)d'écrire l' équation de la famille F de coniques coupant les axes coordonnées aux mêmes points que K

3)de déterminer les équations des paraboles de la famille F

4)de déterminer les équations des hyperboles de la famille F dont les asymptotes forment un angle mesurant 45°

4.Septembre 81

Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d' axes X, Y on donne la parabole P d' équation

$$y^2 = 4x$$

On demande :

1)de déterminer son foyer, sa directrice D et de la construire

2)de déterminer l' équation des coniques F tangentes à P aux points d' intersection avec la droite d' équation x = 3

3)de déterminer le cercle de F et de le construire

4)de déterminer l' hyperbole équilatère de F, ses asymptotes et de la construire.

5.Juillet 82

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d' axes X, Y

1)Former l' équation du cercle C de centre p(4,3) passant par o.

2)Former l' équation de la parabole P d' axe parallèle à Y, tangente au cercle C en o et passant par le point q(4,8). Montrer que C et P ont un autre point r commun.

3)Déterminer l' axe et le sommet s de P ; dessiner C et P (unité = 1 cm)

4)Former l' équation du faisceau de coniques déterminé par C et P. Montrer que toutes les coniques de ce faisceau ont même direction principale (ont des axes parallèles).

5)Déterminer l' hyperbole équilatère du faisceau, son centre et ses asymptotes. Dessiner cette hyperbole.

6)Déterminer le lieu des centres des coniques du faisceau; quelle est sa nature ?

6.Septembre 82

Dans le plan euclidien muni d' un repère orthonormé d' origine o et d'axes X, Y on donne les points m(1,2) et n(9,-6).

1)Déterminer l' équation cartésienne du cercle C passant par m, n et o, les coordonnées de son centre et son rayon.

2)Montrer que m, n et o appartiennent à la parabole P d' équation $y^2 = 4x$ et déterminer le quatrième point p d' intersection de P et de C.

3)Montrer que les normales à P (perpendiculaires à la tangente) en m, n et p sont concourantes; déterminer leur point commun.

4)Déterminer l' équation de la conique K passant par les points o, m, n, p et par le point r(0,3).

5)Tracer une figure (unité = 1 cm) montrant les points m, n, p, le cercle C, la parabole P, les normales et la conique K.

7.Septembre 83

Dans le plan euclidien muni d' un repère orthonormé d' origine o et d'axes X, Y on donne le point fixe m(a,0), $a \neq 0$.

1)Former l' équation de la famille (F) de coniques passant par les points o et m et tangentes à l' axe Y.

2)Etablir l' équation de celle(s) des coniques (F) ayant pour centre un point c(p,q) donné.

3)En considérant p et q comme deux paramètres, discuter la nature des coniques du (2) en fonction de la position du point c; indiquer les résultats sur une figure.

4)Déterminer l' équation des hyperboles équilatères de (F) ainsi que l' équation et la nature du lieu de leurs centres.

8)Juillet 84

Dans le plan euclidien muni d' un repère orthonormé d' origine o et d'axes X, Y on donne le point p(0,1) et les droites A et B d' équations respectives :

$$2x + 5y - 10 = 0 \qquad 5x + 2y + 10 = 0$$

1)Déterminer l' hyperbole H passant par p et admettant A et B pour asymptotes (figure : unité = 1 cm).

2)Déterminer les axes de H; dessiner H.

3)Former l' équation de la famille K de coniques coupant les axes X et Y aux mêmes points que H.

4)Déterminer l' équation du cercle de cette famille K, son centre et son rayon; Dessiner ce cercle.

5)Déterminer l' équation des paraboles de cette famille K; préciser s' il s' agit de paraboles proprement dites ou non.

6)Former l' équation du lieu des centres des coniques K et préciser sa nature.

9.Juillet 85

Dans le plan euclidien muni d' un repère orthonormé d' origine o et d'axes X, Y on donne les points m(1,0) et n(2,0), les droites M et N parallèles à l' axe Y et passant respectivement par les points m et n. On demande :

1)l' équation de la famille de coniques (C) passant par m et n et coupant les droites M et N en deux points mobiles p et q alignés avec l'origine o

2)l' équation des paraboles de la famille (C)

3)l' équation de la parabole (P)de la famille (C) admettant une direction asymptotique de pente 1. Construire cette parabole sur une figure n° 1.

4)l' équation des hyperboles équilatères de la famille (C): déterminer tous les points fixes communs à ces hyperboles équilatères

5)l' équation de l' hyperbole équilatère H de la famille (C) admettant une direction asymptotique de pente 2. Construire cette hyperbole équilatère sur une figure n° 2

6)l' équation du lieu des centres des hyperboles équilatères de la famille (C). Donner sa nature et construire ce lieu sur la figure n° 2.

10.Septembre 85

Dans le plan euclidien muni d' un repère orthonormé d' origine o et d'axes X, Y on donne les points m(4,0) et n(0,2).

1) Former l' équation de la famille de coniques (C) passant par les points m, n et o et admettant pour normale (perpendiculaire à la tangente) en o la droite passant par le milieu de [mn].

2) Déterminer l' équation :

a) du(des) cercle(s) de la famille (C)

b) de l'(des) hyperbole(s) équilatère(s) de la famille (C)

c) de la(des) parabole(s) de la famille (C)

Dessiner ces coniques sur une figure 1.

3) Déterminer l' équation du lieu L des centres des coniques de (C); construire L sur une figure 2; préciser les parties du lieu qui correspondent aux centres des ellipses et des hyperboles de (C)

4) montrer que par un point p du plan, il passe en général, une conique de (C). Préciser quels points donnent une ellipse de (C).

11. Juillet 86

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d'axes X, Y on donne les points fixes p(a,0), q(0,b) et r(a,b) où a et b sont non nuls.

Une droite mobile passant par r coupe la droite op en s et la droite oq en t; les droites qs et pt se coupent en m.

1) Etablir l' équation cartésienne du lieu du point m.

2) Quelle est la nature du lieu ? Déterminer son centre de symétrie éventuel.

3) Dans le cas a = b, construire le lieu

(figure a = b = 6, en prenant le cm pour unité.

12. Juillet 86

On donne dans le plan deux points distincts a et b. On demande :

1 1) de déterminer le point m tel que $\overrightarrow{ma} + \overrightarrow{mb} = \vec{o}$ et le point n te que $\overrightarrow{na} - 2\overrightarrow{nb} = \vec{o}$.

2) de transformer les expressions $\overrightarrow{pa} + \overrightarrow{pb}$ et $\overrightarrow{pa} - 2\overrightarrow{pb}$, où p est un point quelconque du plan, en tenant compte du (1).

3) de déterminer le lieu des points p du plan tels que le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{pa} + \overrightarrow{pb}$ et $\overrightarrow{pa} - 2\overrightarrow{pb}$ soit nul.

4) de déterminer le lieu des points p du plan tels que

$$||\overrightarrow{pa} + \overrightarrow{pb}|| = ||\overrightarrow{pa} - 2\overrightarrow{pb}||$$

5) de représenter les lieux du (3) et du (4) sur une figure où la

longueur de |ab| est 4 cm.

13.Septembre 86

On donne un triangle de sommets a, b, c; soit m le milieu du côté [ab].

1)Calculer la longueur de la médiane [cm] du triangle en fonction des longueurs de ses côtés.

2)déterminer le lieu des points p du plan tels que

$$\|\overrightarrow{pa}\|^2 + \|\overrightarrow{pb}\|^2 = k^2$$

où k est une constante.

Faire une figure dans le cas où ab = 5, bc = 4, ca = 3, $k^2 = \frac{125}{2}$

(prendre le cm pour unité)

14.Septembre 86

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d'axes X, Y on donne les points fixes r(a,0) et s(-a,0) où a ≠ 0 et la droite fixe D d' équation y = x + b. Soient m un point mobile sur la droite D, A la droite passant par r et perpendiculaire à mr, B la droite passant par s et perpendiculaire à ms.

1)Etablir l' équation cartésienne du lieu du point p d' intersection des droites A et B.

2)Donner les positions de m pour lesquelles les droites A et B sont parallèles.

3)Quelle est la nature du lieu ? Déterminer son centre de symétrie éventuel.

4)Construire le lieu dans le cas a = 1, b = -2. Figure en prenant le cm pour unité.

15.Juillet 87

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d'axes X, Y on donne les points p(1,0) et q(3,0).

1)Former l' équation de la famille de cercles tangents en o à l' axe X.

2)Déterminer l' équation des tangentes, différentes de l' axe X, menées à ces cercles du point p. Quel est le lieu géométrique du point de contact de ces tangentes ?

3)Mêmes questions en remplaçant le point p par le point q.

4)Etablir l' équation du lieu géométrique du point m d' intersection des tangentes déterminées au (2) et au (3).

5)Déterminer la nature du lieu, son centre de symétrie, ses foyers et le construire dans le repère donné (figure : unité = 2 cm).

16.septembre 87

Dans le plan muni d' un repère orthonormé d' origine o et d'axes X, Y on donne les points a(2,0) et b(0,1); une droites mobile parallèle à une direction fixe de coefficient angulaire k coupe l' axe X au point p et l' axe Y au point q.

1)Déterminer l' équation du lieu du point m d' intersection des droites aq et bp.

2)Discuter la nature de ce lieu en fonction de k.

3)Construire ce lieu dans le cas k = -2 (figure : unité = 2cm).

4)Même question dans le cas k = 2.

17.Juillet 88

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d'axes X, Y on donne le point fixe q(0,a) où a ≠ 0 et la droite fixe d' équation y = cx. Un point mobile p se déplace sur cette droite .

1)Déterminer l' équation du lieu du point m d' intersection de la parallèle menée par p à l' axe Y et de la perpendiculaire menée en q a la droite pq (figure n° 1).

2)Discuter la nature du lieu en considérant c comme un paramètre. Déterminer son centre de symétrie éventuel.

3)Construire le lieu dans le cas a = 2, c = 2 (figure n° 2, unité : 2 cm)

18.Juillet 88

On considère une ellipse de centre o, ramenée à ses axes (demi-axes a, b). En un point p de l' ellipse on trace une tangente qui coupe les axes en des points a et b. Déterminer p pour que l' aire du triangle oab soit extremum. Préciser si cet extremum est minimum ou maximum (Justifiez !)

19.Septembre 88

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d'axes X, Y on donne les points fixes p(a,0) et q(0,b).Un segment mobile rs de longueur constante *l*, se déplace sur l' axe Y.

1)Etablir l' équation du lieu du point m d' intersection de la droite pr et de la parallèle menée par q à la droite ps.

2)Déterminer la nature du lieu.

3)Construire le lieu dans le cas a = 1, b = 3, *l* = 1 (unité = 2 cm)

20.Juillet 89

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d'axes X, Y on donne le point fixe p(a,0) où a ≠ 0.

1)Former l' équation d' un cercle mobile, de centre c, situé dans les quadrants I et III, tangent à X en q et à Y en r.

2)Former l' équation de la tangente, distincte de X, menée à ce cercle par p.

3)Déterminer, quand ce cercle varie, les équations paramétriques et cartésiennes du lieu L du point m, intersection de la perpendiculaire à pc menée par q et de la parallèle à l' axe X menée par c.

Quelle est la nature de L ? Construire L pour a = 3 (unité = 1 cm).

21.Juillet 89

On appelle angle sous lequel on voit un cercle d' un point extérieur l' angle des demi-droites issues de ce point et tangentes au cercle.

Soient deux cercles C_1 et C_2 extérieurs l' un à l' autre, de centre o_1, o_2 et de rayon R_1, R_2.

Quel est le lieu des points m d' où l' on voit les deux cercles sous des angles de même amplitude ?

(Indication : Si ma_1 et ma_2 sont des tangentes à C_1 et C_2, considérer les triangles mo_1a_1 et mo_2a_2)

Faire une figure en prenant $R_1 = 2$, $R_2 = 4$ et $\| o_1o_2 \| = 7,5$, le cm étant pris pour unité.

22. Septembre 89

Dans des axes cartésiens orthogonaux (x,y) on considère la conique d' équation

$$x^2 + y^2 + 2xy + 2by - 2bx - a^2 = 0 \quad \text{où } a,b \text{ réels et } b < 0$$

Dans la suite du problème on n' envisage que le demi-plan $x \geq 0$

On demande:

1) de déterminer les coordonnées de quelques points remarquables de la conique (e.a. les intersections avec les axes x et y) et de représenter ceux-ci dans le demi-plan $x \geq 0$.
2) de dessiner ("croquis rapide") la portion de cette conique située dans le demi-plan $x \geq 0$.
3) de calculer en fonction de a et de b l' aire comprise entre la conique et l' axe y (partie $x \geq 0$).

23. Septembre 89

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d'axes X, Y on donne la parabole P d' équation $y^2 = 2px$ et un point $m(x_1,y_1)$ appartenant à P.

1) Former l' équation de la tangente T à P en m et déterminer les coordonnées du point t, intersection de T avec X, et du point r, intersection de T avec Y.
2) Former l' équation de la normale N à P en m et déterminer les coordonnées du point n, intersection de N et de X.
3) Discuter le nombre de normales à P passant par un point a donné sur l' axe X.
4) On considère, dans la suite, que le point m est mobile sur P. Former l' équation du cercle circonscrit au triangle mtn; quel en est le centre ?
5) Déterminer l' équation cartésienne et les équations paramétriques du lieu L du pied de la perpendiculaire abaissée du foyer sur N. Quelle est sa nature ?
   Construire P et L pour p = 4 (unité = 1 cm)

24. Septembre 90

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d' origine o et d'axes X, Y.

1) Former l' équation de l' hyperbole équilatère de foyers $f(c,c)$ et $f'(-c,-c)$ où $c \neq 0$ est un nombre donné.

2) On considère dans la suite l' hyperbole H d' équation $xy - 36 = 0$ Déterminer les foyers et les sommets de H. Construire H (figure, unité 5 mm)

3) On considère les points p, q, r d' abscisses respectives -4, 3, 12 et appartenant à l' hyperbole H. Déterminer l' orthocentre h du triangle de sommets p, q, r. Le point h appartient-il à H ? (Complèter la figure).

4) On considère les cercles variables passant par les points $s(6,6)$ et $s'(-6,-6)$ de H. Former leur équation. Montrer qu' ils coupent H, en dehors de s et s', en deux points diamètralement opposés (Complèter la figure).

- COUP D' OEIL SUR LES QUADRIQUES DANS L' ESPACE E_3 -

(SURFACES DU SECOND DEGRE)

Equation générale du second degré :

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

Par translation et rotation des axes, on obtient 17 équations simplifiées différentes : (On travaille dans un repère orthonormé)

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$

3) $\frac{x^2}{a^2} + 1 = 0$

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$

5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$

6) $\frac{x^2}{a^2} = 0$

7) $\frac{x^2}{a^2} - 1 = 0$

8) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

9) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

10) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

11) $x^2 - 2py = 0$

12) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

13) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

14) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$

15) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$

16) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

17) $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

où $a, b, c \in \mathbb{R}_0$.
$p \in \mathbb{R}$

Quelles surfaces ces équations représentent-elles ?

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$: Le vide

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$: Le vide

3) $\frac{x^2}{a^2} + 1 = 0$: Le vide

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$: Le point (0,0,0)

5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$: La droite des points (0,0,z) où $z \in \mathbb{R}$ (l' axe Z)

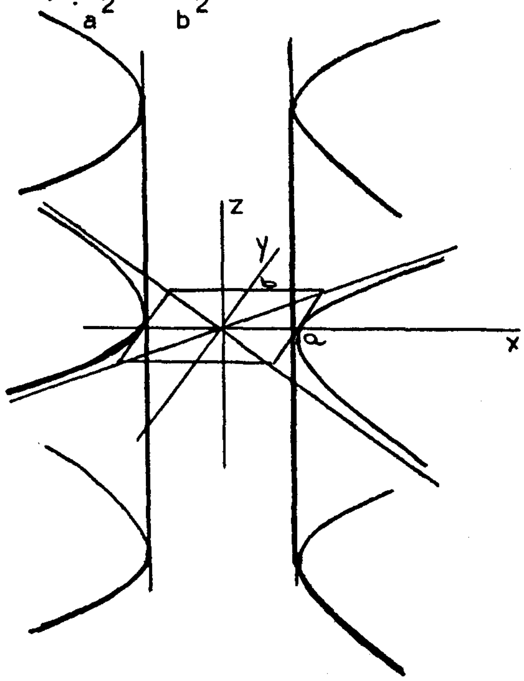
6) $\frac{x^2}{a^2} = 0$: Le plan des points (0,y,z) où $y, z \in \mathbb{R}$ (Le plan (Y,Z) : x = 0)

7) $\frac{x^2}{a^2} - 1 = 0$: Deux plans parallèles d' équation x = a et x = -a

8) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$: Deux plans sécants d' équation bx = ay et bx = -ay

9) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$: **Cylindre hyperbolique :** Surface cylindrique engendrée par la translation d' une hyperbole parallèlement à l' axe Z.

(Surface réglée c' est à dire surface engendrée par une famille de droites)

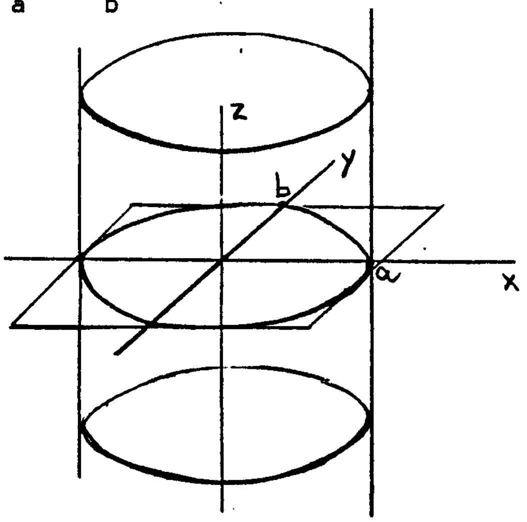


10) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

: **Cylindre elliptique :**

Surface cylindrique engendrée par la translation d' une ellipse paralèllement à l' axe Z. Si a = b, l' ellipse est un cercle

(Surface réglée)

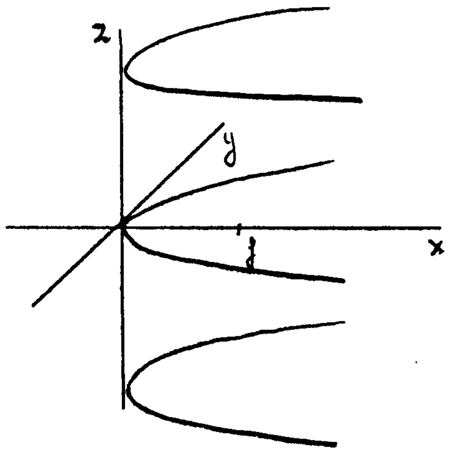


11) $x^2 - 2py = 0$

: **Cylindre parabolique :**

Surface cylindrique engendrée par la translation d' une parabole parallèlement à l' axe Z

(Surface réglée)



12) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

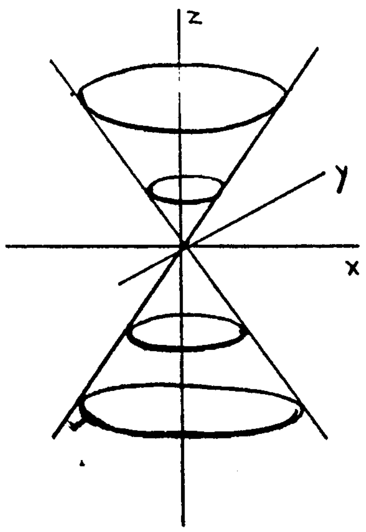
: **Surface conique :**

La section de cette surface par un plan

a) parallèle à (X,Y) est une ellipse.

b) parallèle à (Y,Z) ou (X,Z) est une hyperbole.

(surface réglée)



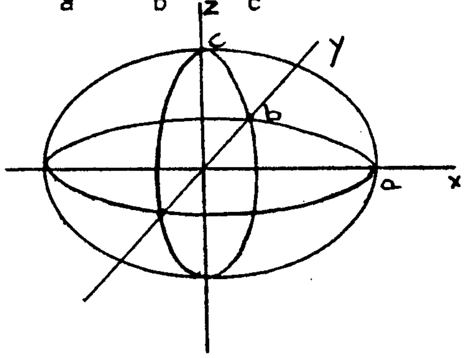
Les 12 coniques précédentes sont appelées **quadriques dégénérées** ou **impropres**. Il y a

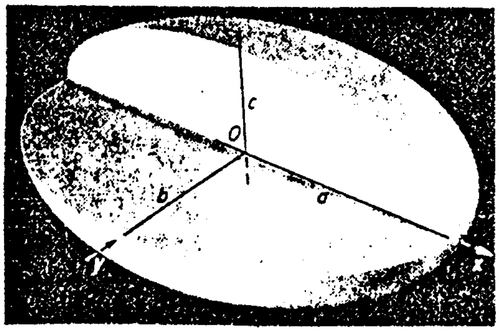
5 quadriques propres

13) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$: **ellipsoïde** :

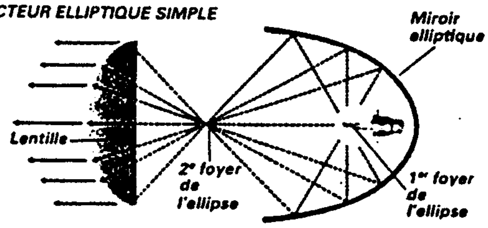
Si deux des nombres a, b, c sont égaux, on a un ellipsoïde de révolution.

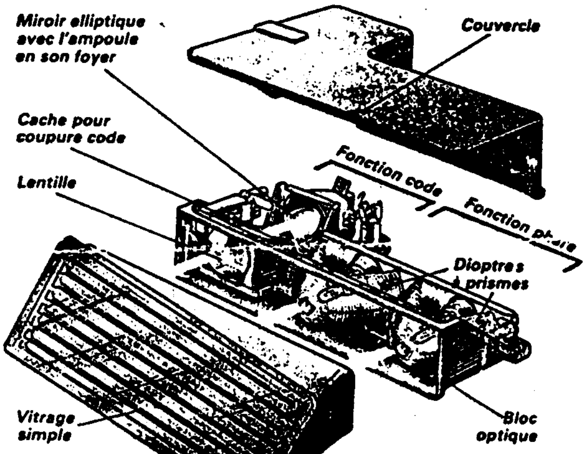
Si a = b = c, on a une sphère.



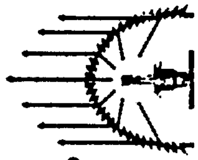


1. PROJECTEUR ELLIPTIQUE SIMPLE



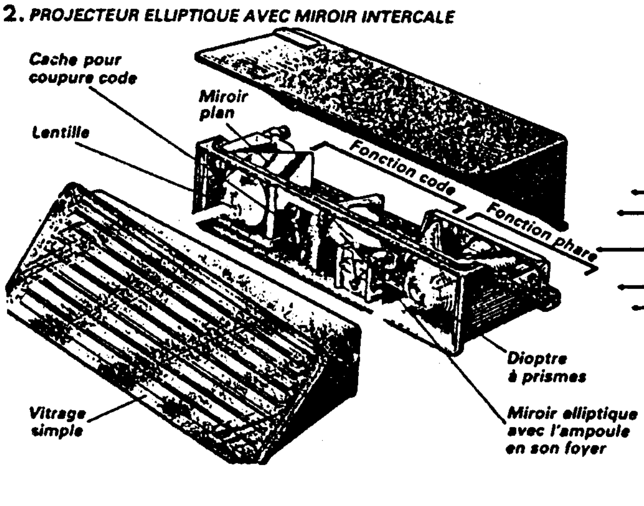


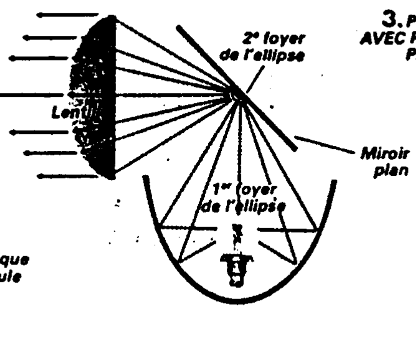
Dans un projecteur à miroir elliptique, le diamètre de sortie peut être plus faible que celui d'un miroir parabolique à efficacité équivalente, et la répartition ne nécessite plus de glace (1). La profondeur du boîtier peut être réduite en intercalant un miroir plan dans la trajectoire du rayon (2). Ceci pour le code. Pour la fonction phare, on utilise la réfraction à travers les prismes d'un dioptre (3).



3. PROJECTEUR AVEC REFRACTION PAR DIOPTRE

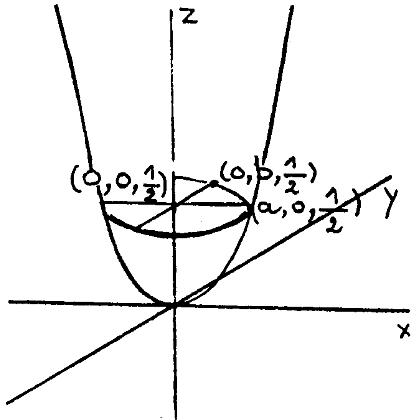
2. PROJECTEUR ELLIPTIQUE AVEC MIROIR INTERCALE

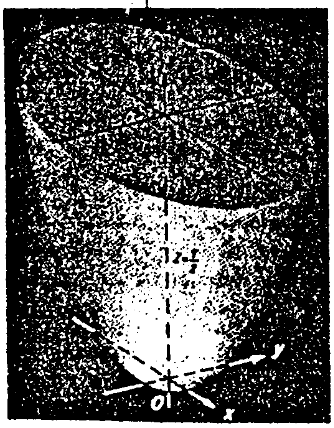


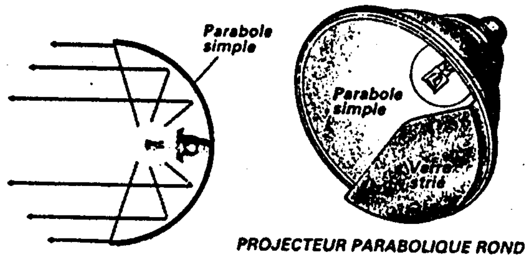


14) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$: **paraboloïde elliptique**

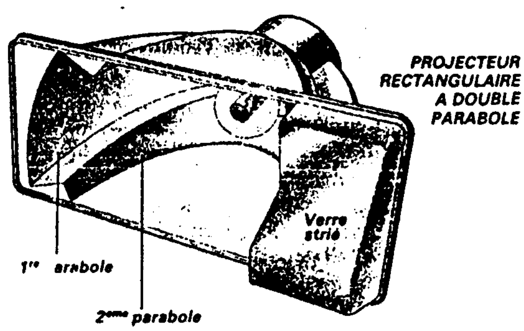
Si a = b, le paraboloïde est de révolution.







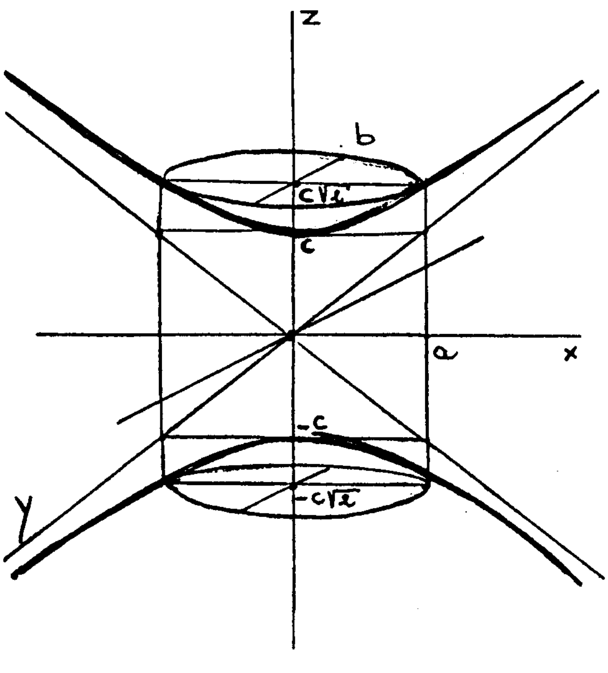
PROJECTEUR PARABOLIQUE ROND

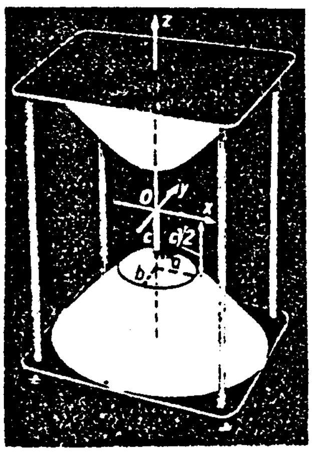


PROJECTEUR RECTANGULAIRE A DOUBLE PARABOLE

17) $- \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$: **Hyperboloïde à deux nappes**

Si a = b, le solide est un hyperboloïde à deux nappes de révolution.

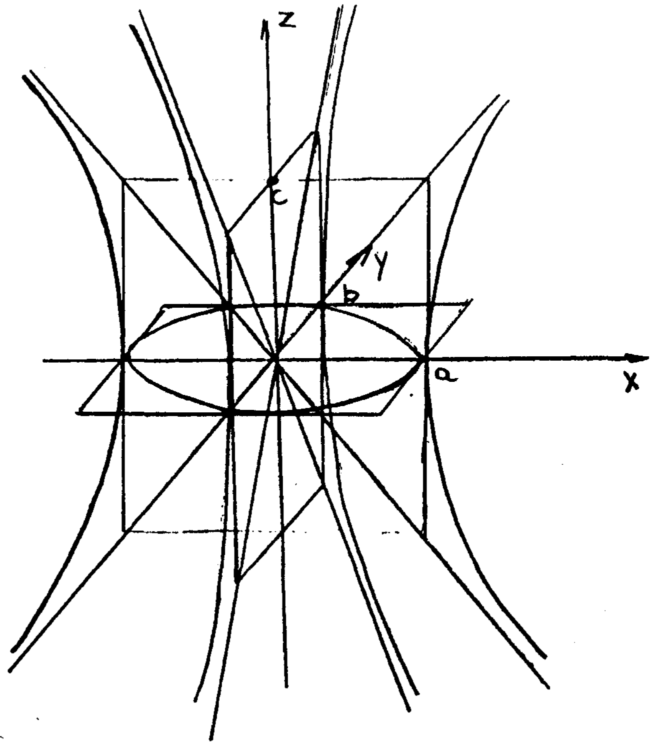


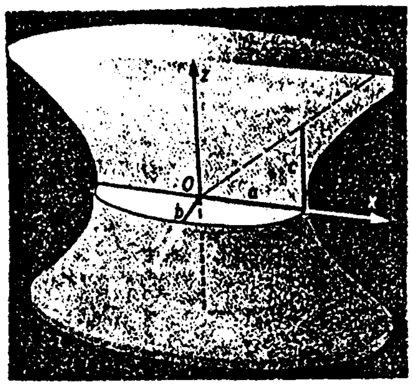


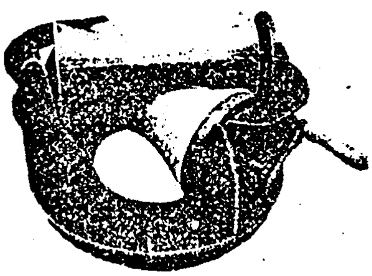
16) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$: **Hyperboloïde à une nappe**

Si a = b, le solide est un hyperboloïde à une nappe de révolution.

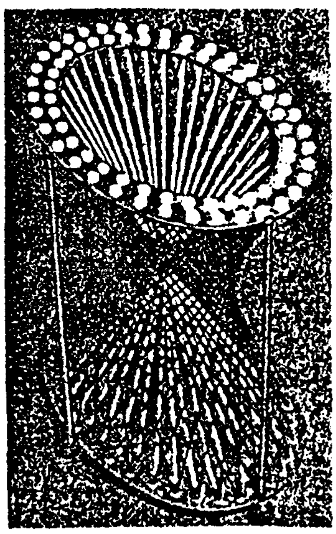
(surface règlée)





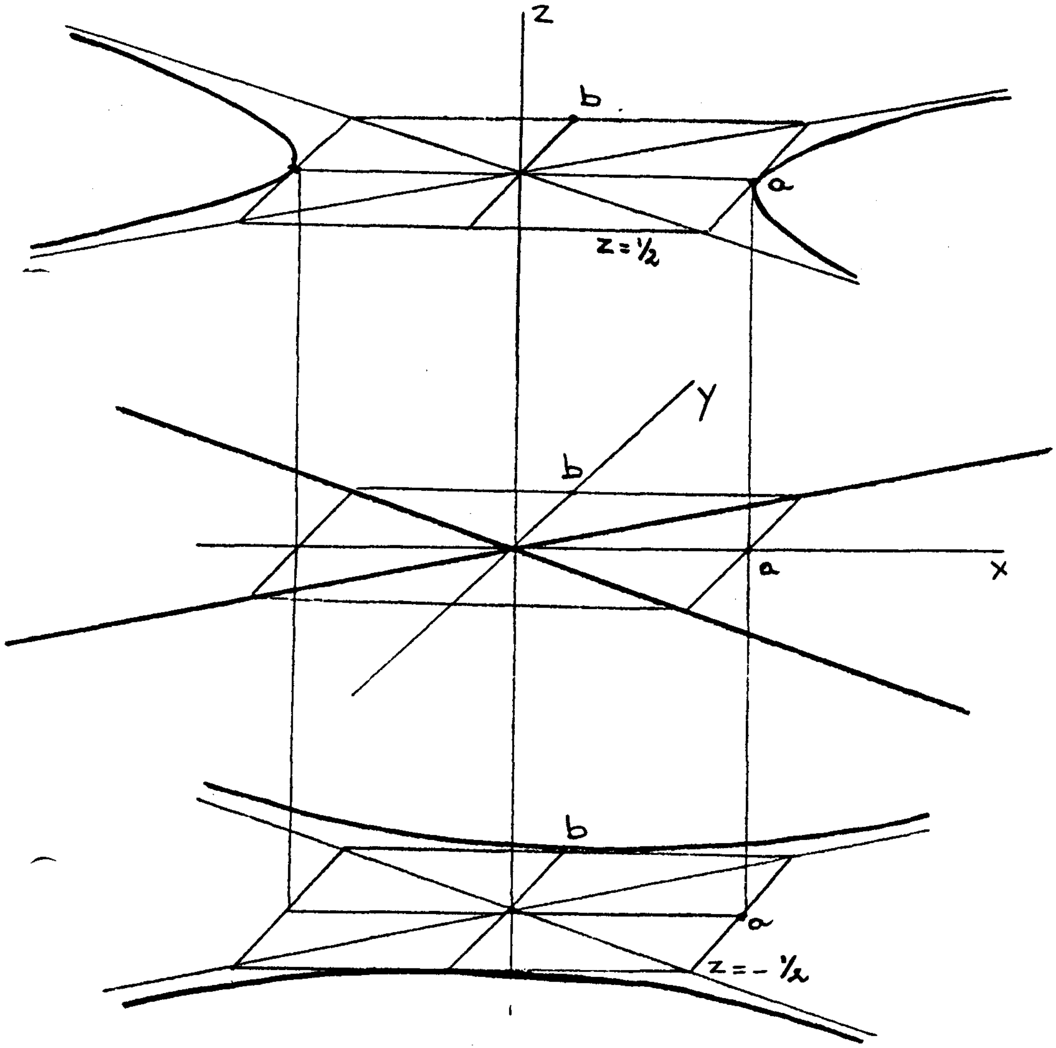


Modèle de transmission d'un mouvement de rotation à l'aide de deux hyperboloïdes à une nappe

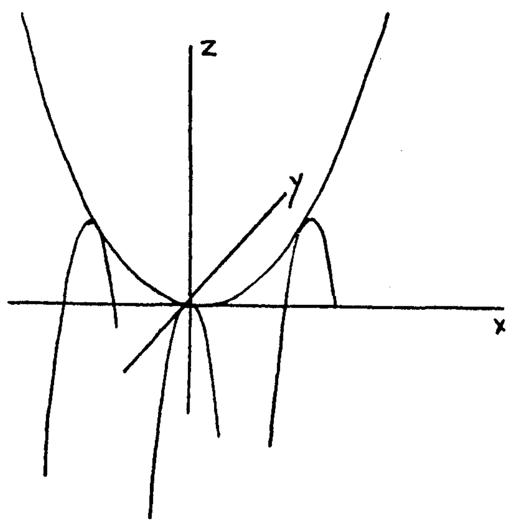


15) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$: **Paraboloïde hyperbolique**
(surface règlée)

Les sections de la surface par des plans parallèles au plan (X,Y) et d' équation z = a, a ∈ ℝ, sont des hyperboles.

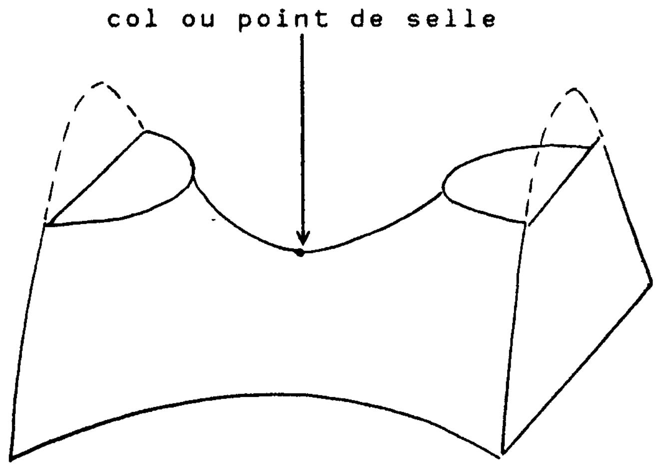


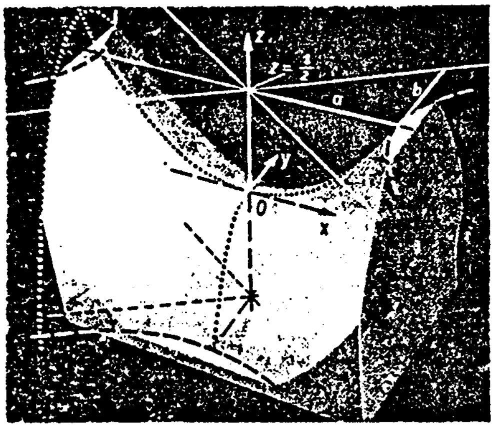
Les sections de la surface par des plans parallèles au plan (Y,Z) et d' équation x = a, a ∈ ℝ, sont des paraboles.

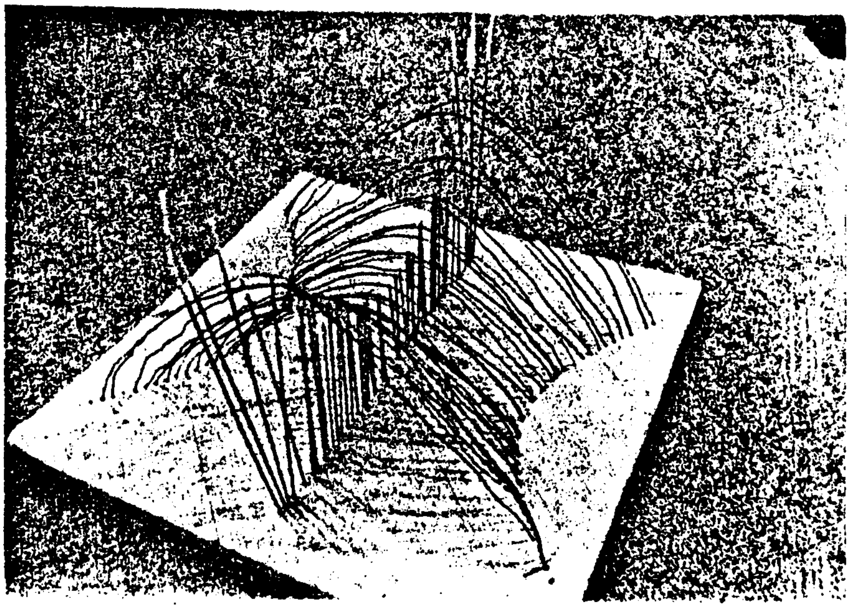


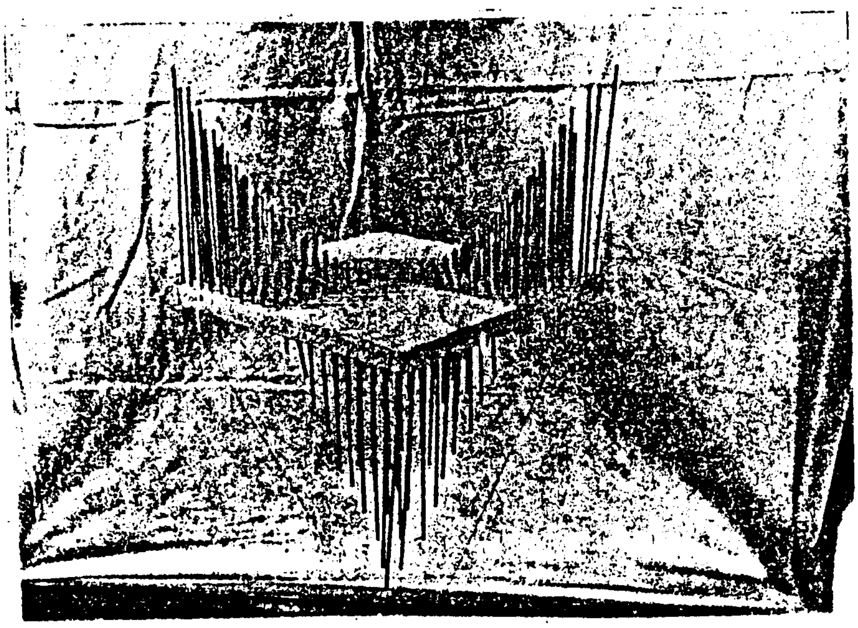
Le paraboloïde hyperbolique peut être engendré par la translation d' une parabole du plan (Y,Z) le long d' une parabole du plan (X,Z).

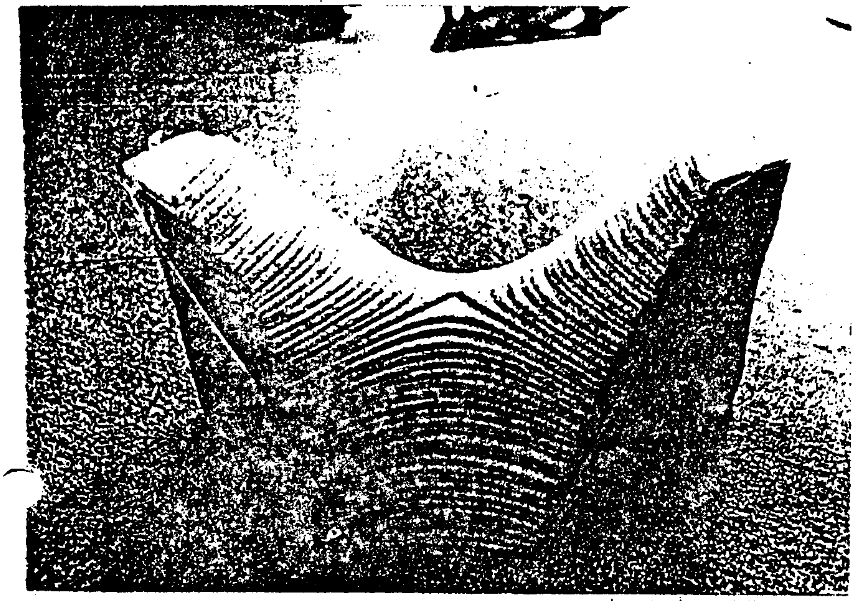
Les sections de la surface par des plans parallèles au plan (X,Z) et d' équation $y = a$, $a \in \mathbb{R}$, sont des paraboles.

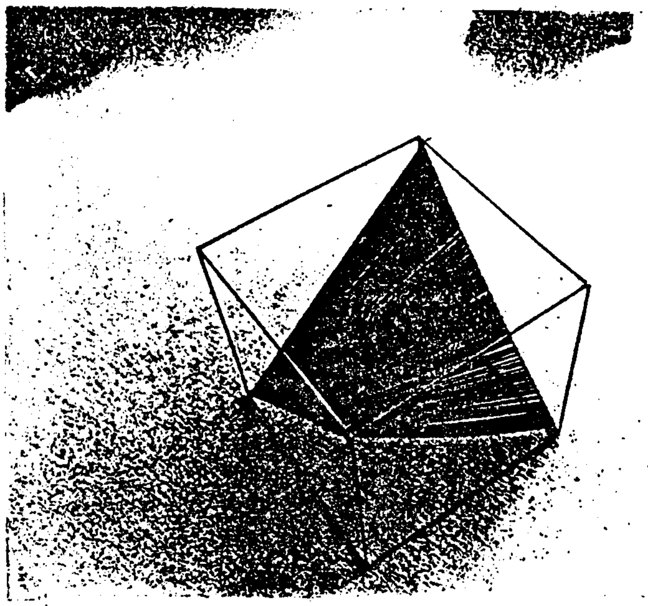


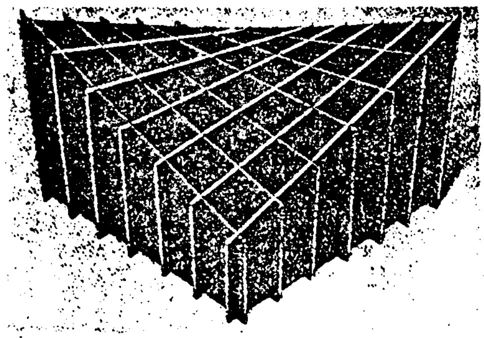










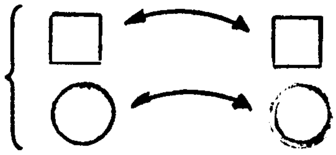


Paraboloïde hyperbolique avec deux familles de génératrices

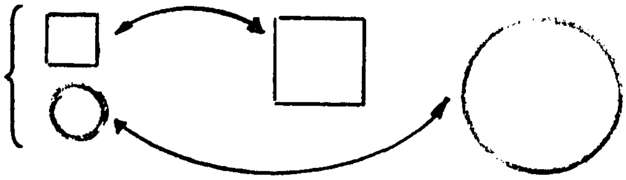
IL EXISTE PLUSIEURS GEOMETRIES

Que sont ces géométries ? Un tableau dressé par E. Castenuovo et M. Barra (1980), l' explique intuitivement :

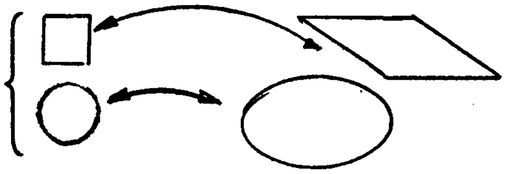
Géométrie métrique :



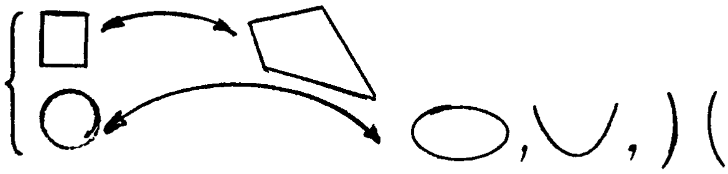
Géométrie angulaire :



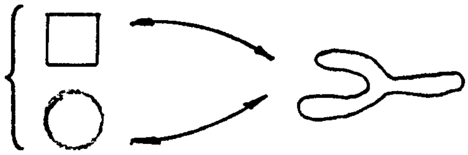
Géométrie affine :



Géométrie projective :



Topologie :



La géométrie **métrique** est celle des isométries. Ses invariants sont nombreux : distances, angles, ...

La géométrie **angulaire** est intuitivement celle des reproductions à l' échelle, lesquelles conservent les angles, les rapports de distance mais non plus les distances elles-mêmes.

La géométrie **affine** étudie en quelque sorte les déformations des ombres des figures éclairées par les rayons (parallèles) du soleil, on conserve le parallélisme mais on perd les distances, les angles.

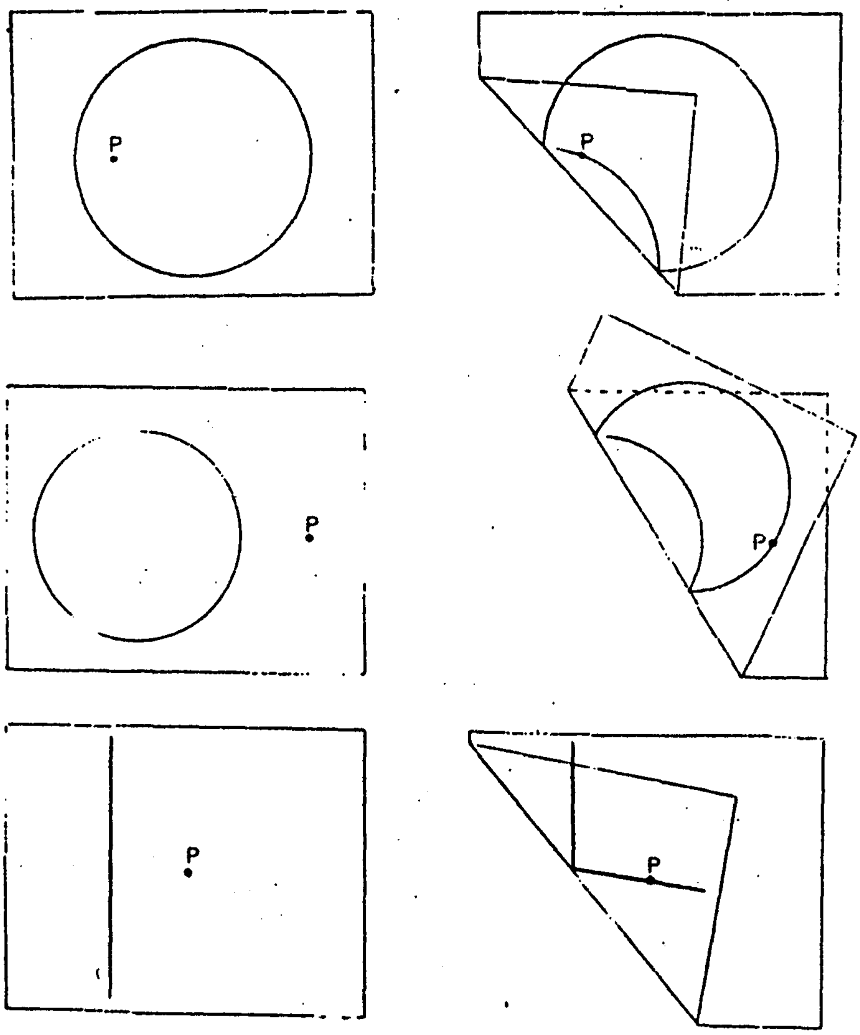
La géométrie **projective** s' intéresse aux transformations des figures éclairées par une source ponctuelle : un carré se déforme en un quadrilatère quelconque, un cercle peut se projeter suivant une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

La **topologie**, elle ne respecte même plus l' alignement de points.

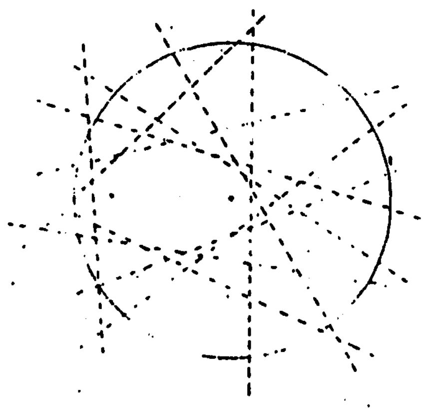
ELLIPSES, HYPERBOLES, PARABOLES ET PLIAGES DE PAPIER

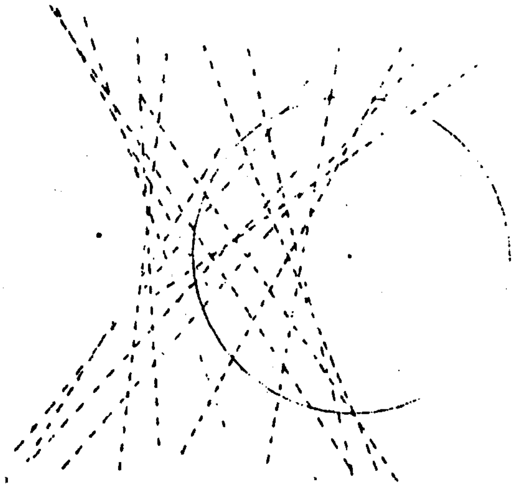
Les méthodes plus ou moins simples de construction des coniques ne manquent pas, mais celle qui consiste à les obtenir comme enveloppe de leurs tangentes par simple pliage de papier est sans doute la plus attrayante pour les élèves. Sans doute parce qu'inattendue et un peu mystérieuse.

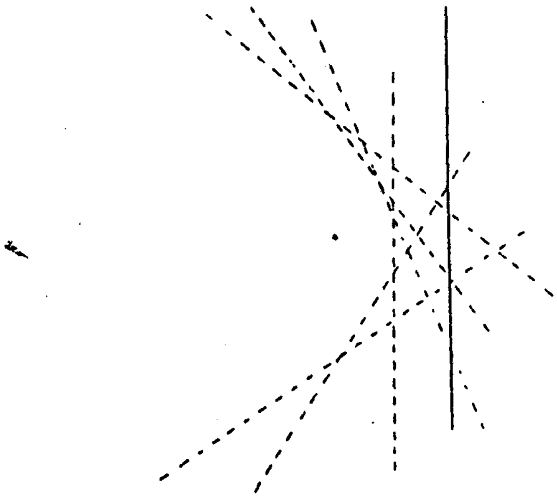
Chaque élève reçoit une feuille de papier calque sur laquelle est dessiné un cercle et un point soit intérieur, soit extérieur à ce cercle, ou bien une droite et un point non situé sur cette droite. Il s'agit de plier le papier de manière à ce que le cercle, ou la droite, passe par le point.



Puis on recommence ce pliage jusqu'à ce que la feuille soit pliée dans toutes les directions. Les traces de pli forment un ensemble de tangentes qui dessinent une ellipse, une hyperbole ou une parabole.



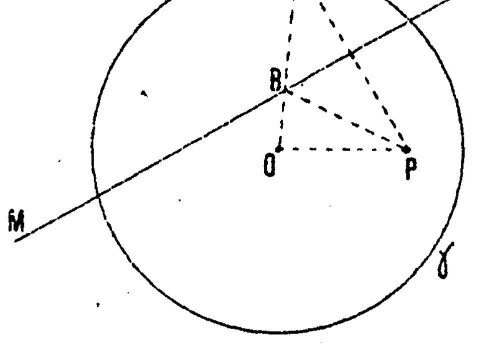




Une fois les pliages terminés, les élèves comparent leurs résultats et analysent leurs dessins. Il semble bien, pour l'ellipse et l'hyperbole que le centre du cercle et le point donné soient les foyers et que l'excentricité soit d'autant plus grande que le point donné est éloigné du centre du cercle. Pour la parabole, il apparaît clairement que la droite et le point donné en sont la directrice et le foyer. Quant aux plis du papier, ils sont dans tous les cas des tangentes.

Encore faut-il le démontrer !

Je vous livre ici une démonstration fort courte qui concerne l'ellipse, mais qui s'adapte sans peine aux cas de l'hyperbole ou de la parabole.



Soit γ le cercle de centre O et de rayon r et P un point intérieur donnés.
Considérons le pli MN du papier qui amène le point A sur le point P.
MN est la médiatrice du segment [AP] donc BA = BP.
Dès lors OB + BP = OB + BA = r
La somme des distances de B à O et à P est donc constante et quand A parcourt le cercle γ, B parcourt une ellipse de foyers O et P.

De plus, $\widehat{OBM} = \widehat{ABN}$ et $\widehat{ABN} = \widehat{PBN}$. La droite MN fait des angles égaux avec les droites joignant B aux foyers, donc MN est tangente à l'ellipse en B.

Ce qui achève la démonstration.

Pour la science - février 90 -

VISIONS MATHÉMATIQUES

D'où a été prise la photo ?

IAN STEWART

Où le lecteur examinera les rapports harmonieux entre la carte et le territoire.

Tante Cunégonde feuilletait l'album de photographies : « Comme Mélu était mignonne quand elle était petite ! On voit qu'elle aimait le gâteau au chocolat ! Elle s'en est barbouillé ses grosses joues bien rondes. »

Mélusine, « la petite fée du calcul », qui avait grandi depuis que la photo avait été prise, devint toute rouge et tenta de disparaître sous la table. Ces réunions de famille sont vraiment pénibles, pensait-elle : elles rappellent d'anciens incidents embarrassants, surtout quand on a 16 ans et encore des joues bien rondes. Mélu sortit de sa poche sa calculette et commença à développer e^{π} en fraction continue, histoire de passer le temps.

« Oh, oui, et regarde celle-là, dit Cunégonde. Regarde, Paul-Émile ! Paul-Émile ? Paul-Émile, réveille-toi ! C'est celle où tu portes cette toque de fourrure, à la fête du Nouvel An des Hemcédeux (M.O).

– J'ai arrêté de porter une toque de fourrure, remarqua Paul-Émile d'un ton maussade. Je n'ai plus assez de cheveux et les gens croient que j'ai mis une perruque.

– Cette photographie *(voir la figure 1)* me rappelle des souvenirs, dit Cunégonde. C'est Paul-Émile qui l'a prise pendant ses vacances, l'année dernière. Où était-ce, Paul-Émile ?

– À Paris.

– Oui, mais où à Paris, Paul-Émile ? »

Paul-Émile se redressa sur sa chaise, frotta ses yeux, chaussa ses lunettes et examina la photographie.

« Je ne me souviens plus, dit-il.

– Si c'est Paris, alors la rivière doit être la Seine, dit Mélu.

– Je pense que c'était du sommet de l'Arc de Triomphe, dit Paul-Émile, sans conviction. Ou peut-être du toit de la maison de Radio-France.

– Ne sois pas stupide, dit Déborah, la mère de Mélu, tu peux voir l'immeuble de Radio-France sur la droite, à demi caché.

– Je vais chercher une carte. »

Paul-Émile sortit de la pièce. Pendant plusieurs minutes, on put entendre des bruits d'objets déplacés, ponctués de jurons. Il réapparut, apoplectique mais triomphant, brandissant une grande carte de Paris. Toute la famille l'entoura de si près qu'il eut quelque mal à mettre la carte à plat, mais en fin de compte *(voir la figure 2)* ils identifièrent les trois ponts de la photographie : le pont de Bir Hakeim, le pont du métro qui part de l'avenue du Président-Kennedy et le pont de Grenelle.

« Je pense que je peux deviner maintenant, dit tante Cunégonde tout excitée !

– Tout le monde peut deviner, dit Déborah, sarcastique. Il est assez facile de deviner, la question est de savoir si l'on a deviné juste.

– Maman a raison, s'exclama Mélu. N'oubliez pas que le centre de la photographie peut ne pas être la direction de visée de l'appareil photographique. Il s'agit d'un agrandissement et il a pu être recadré.

– Paul-Émile, concentre-toi ! Tu as pris cette photo, tu dois te souvenir de quel endroit », dit Cunégonde avec son habituel optimisme autoritaire.

Mais Paul-Émile s'était déjà rendormi et il était, dans son sommeil, si pathétiquement heureux que personne n'osa l'éveiller.

« Mélu, dit Déborah, a étudié la géographie à l'école ! Elle devrait pouvoir nous aider.

– Je ne pense pas que la géographie puisse nous aider, répondit Mélu.

– Oh, dit tante Cunégonde, déçue. Une enfant d'ordinaire si intelligente et qui a été si bien nourrie, si bien éduquée...

– Mais, coupa Mélusine, les mathématiques peuvent nous aider ! »

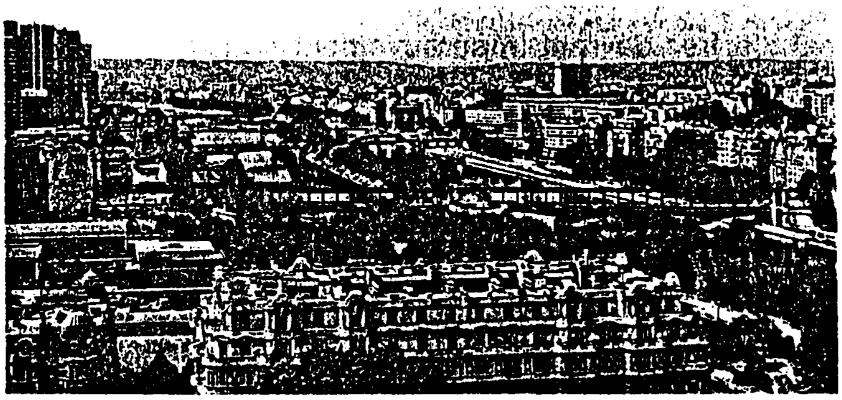
Le visage de tante Cunégonde se teinta d'inquiétude, mais elle retrouva son courage après une rapide lampée de liqueur de cassis.

« Comment cela, Mélu chérie ? C'est une question de photographie !

– Non, c'est une question de géométrie projective, des plus intéressantes d'ailleurs, rétorqua Mélu.

– Qu'est-ce que la géométrie projective, chérie, demanda Déborah ?

– Eh bien, maman, tu sais que si tu regardes une assiette de travers, elle ne te semble plus circulaire, mais ovale ?



1. Panorama parisien... mais d'où la photo fut-elle prise ?

© POUR LA SCIENCE N° 148 FÉVRIER 1990

– Vraiment ? Je n'ai jamais remarqué cela.

– C'est parce que tu es tellement habituée à voir de travers des objets circulaires que ton cerveau compense inconsciemment. Regarde bien cette assiette, objectivement. »

Déborah plissa ses paupières et loucha.

« Mais c'est vrai ! Elle est beaucoup plus longue que large !.

– Exactement. Elle s'aplatit et, au lieu de voir un cercle, tu vois une ellipse. C'est parce que la forme circulaire est projetée sur la rétine de l'œil *(voir la figure 3)*. Il en va de même lorsque l'on photographie. Les cercles ne restent pas en général circulaires dans une projection, ainsi le concept de « cercle » n'est pas une bonne notion en géométrie projective ; les concepts intéressants sont ceux qui sont invariants par projection.

– Oh, dit Déborah. Paul-Émile, tu as entendu ça ? N'est-ce pas intéressant ? »

Paul-Émile ronfla bruyamment.

« Hum. Mélu.

– Oui, maman ?

– Quelles sont ces choses invariantes par projection ?

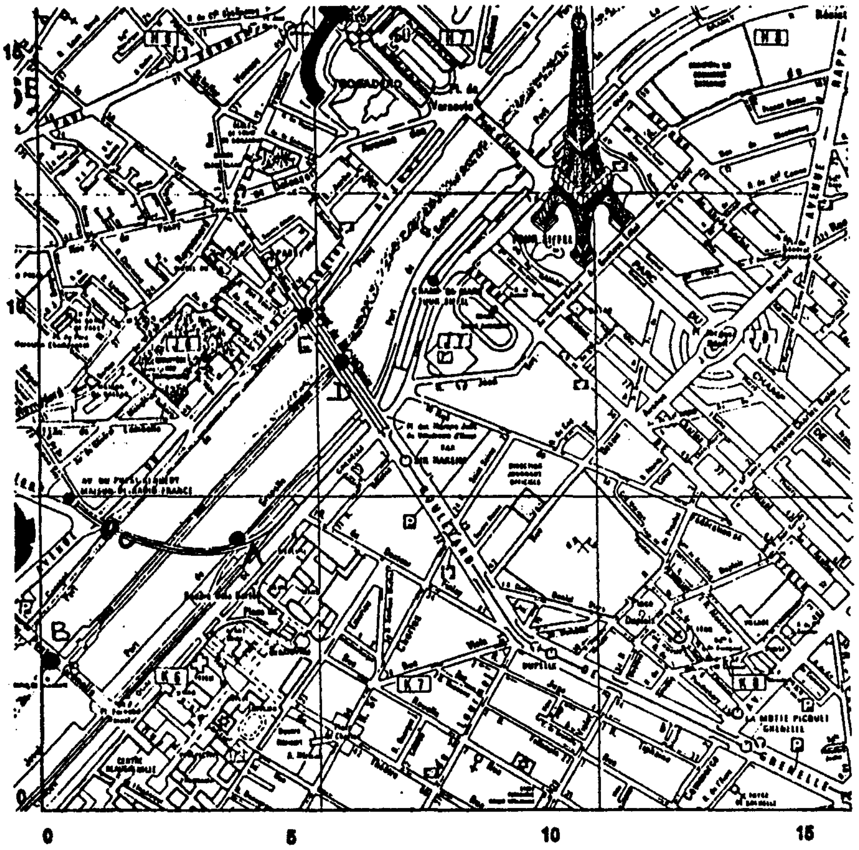
– Ni les angles, ni les longueurs, ni les surfaces, maman. Ni même les droites parallèles. Un concept important en géométrie projective est celui de section conique, dit Mélu.

– Section comique ? Comme dans le *Journal du dimanche* ? J'adore Hagar, Peanuts, les Frustrés...

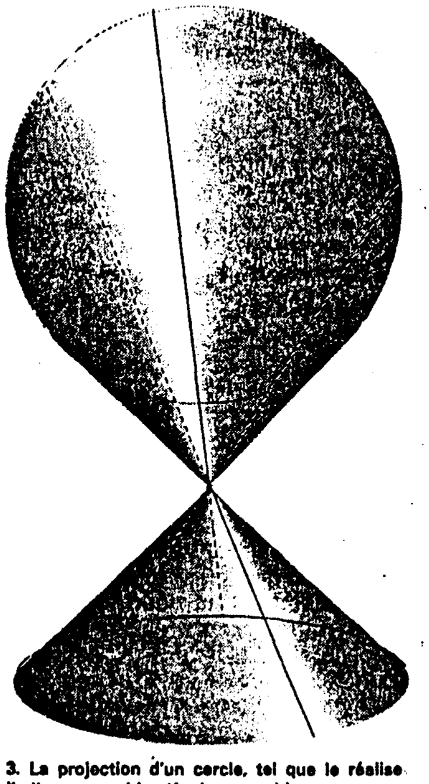
– Non, tantine. Section conique, ou simplement coniques. Ce que l'on obtient quand on coupe un cône par un plan. En géométrie ordinaire, il y a deux coniques fondamentales : l'ellipse et l'hyperbole *(voir la figure 4)*. Et aussi quelques types plus particuliers de coniques – la parabole, le cercle, la paire de droites, la droite double et même le point – qui sont des coupes spéciales.

« Si l'on projette une conique quelconque, on obtient toujours une autre conique, car il s'agit toujours de la projection d'un cercle : les diverses coniques ne sont donc que des cercles projetés, et c'est pour cela que les assiettes paraissent elliptiques.

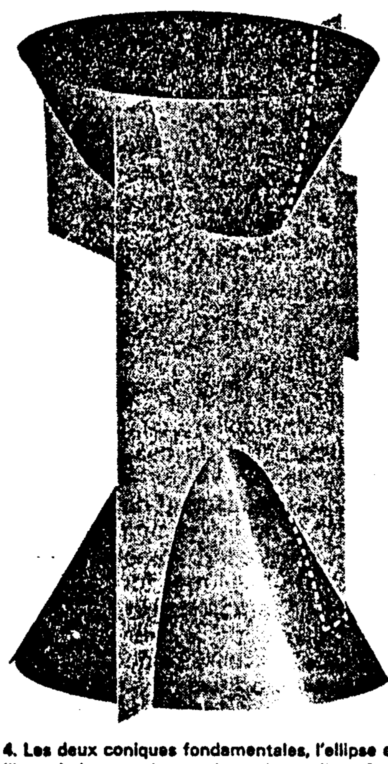
« J'ai dit que les distances ne sont pas conservées par projection (songez aux rayons du cercle) et les rapports de distances non plus. Par exemple, le segment bleu de la figure 5a est divisé en deux parties dont l'une est double de l'autre. Après projection, on obtient le segment rouge dont les deux parties ne sont plus dans le



2. Carte de la zone de la photographie marquée des points *A, B, C, D, E* qui seront utilisés par la suite.



3. La projection d'un cercle, tel que le réalise l'œil ou un objectif photographique, est une ellipse.

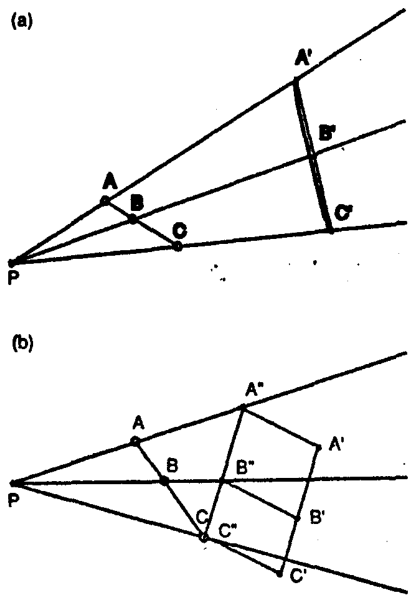


4. Les deux coniques fondamentales, l'ellipse et l'hyperbole, sont des sections planes d'un cône. Notez que l'hyperbole a deux branches.

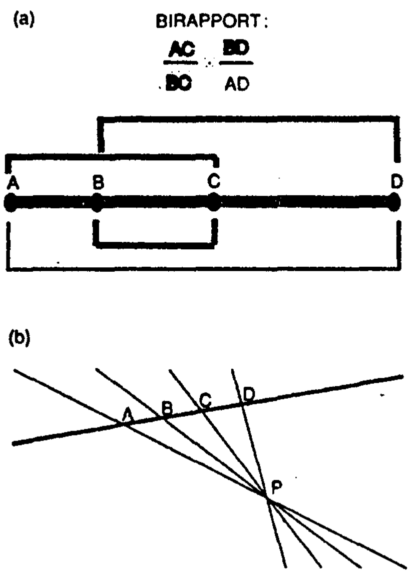
même rapport. En fait, étant donné deux ensembles de trois points alignés ABC et $A'B'C'$, on peut toujours trouver une projection qui transforme un rapport en un autre *(voir la figure 5b)*. Aussi, tant que l'on reste en géométrie projective, on ne peut tirer d'information d'un triplet de points.

– Je n'en ai jamais eu l'intention, dit Cunégonde.

– Pour quatre points, c'est une autre affaire, dit Mélu. Si ces points sont alignés, il existe un invariant projectif : le birapport. Par « invariant », j'entends qu'il n'est pas changé par projection. Il existe aussi un



5. *(a)* **Une projection ne conserve pas les longueurs.** ***BC*** **est deux fois plus long que** ***AB*****, mais** ***B'C'*** **est plus court que** ***A'B'*****.** *(b)* **Les rapports des longueurs formées par deux ensembles quelconques de trois points alignés peuvent être mis en concordance par projection.**



6. *(a)* **Le birapport de quatre points alignés.** *(b)* **Le birapport d'un faisceau de quatre droites passant par** ***P*** **s'obtient en prenant le birapport des quatre points (dans le même ordre) d'intersection avec une sécante. Ce birapport ne dépend pas de la sécante.**

Encadré 1 : le birapport

Pour quatre points alignés, A, B, C, D, envisagés dans cet ordre, on définit leur birapport r :

$$r = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \times \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}$$

Si les points sont projetés en , A', B', C', D', ces projections sont alignées et leur birapport

$$r' = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}} \times \frac{\overline{B'D'}}{\overline{A'D'}}$$ est inchangé, c'est à dire $r' = r$.

En particulier, ce birapport est inchangé si vous prenez une photographie de ces points, et ce quel que soit le point d'où vous la prenez.

Pour un faisceau de quatre droites concourant en P (*voir la figure 6b*) et ordonnées, on définit un birapport, simplement en le coupant par une droite quelconque en A, B, C, D (dans l'ordre des droites), puis en utilisant la formule donnant r ci-dessus. Il ne dépendra pas de la sécante choisie puisque le birapport des points est invariant par projection (et, en particulier, par celle de centre P).

Une formule donne le birapport d'un tel faisceau en fonction de ses seuls angles, à savoir :

$$r = \frac{\sin APC}{\sin BPC} \times \frac{\sin BPD}{\sin APD}$$

birapport pour tout faisceau de droites, c'est-à-dire tout système ordonné de quatre droites concourantes *(voir l'encadré 1)*.

– Quand j'étais une petite fille, à l'école, dit Cunégonde, la géométrie parlait de théorèmes, pas de photographies. C'étaient des choses sans rapport. Ni birapport d'ailleurs. Mélusine chérie, énonce-nous un théorème de cette géométrie projective.

– Si tu insistes, tantine. En voici un particulièrement élégant : il est appelé théorème de Chasles. Prends une conique – quelconque – et quatre points arbitraires A, B, C, D de cette conique. À présent choisis P où tu veux sur la conique et joins-le à A, B, C, D pour former un faisceau. Le théorème dit que le birapport du faisceau ne dépend pas du point P *(voir la figure 7)*. Et tu remarqueras que les concepts en jeu : coniques, faisceaux et birapports sont utiles en géométrie projective.

– Superbe, dit Cunégonde.

– Et moi, quand j'étais petite fille, dit Déborah, réagissant tardivement au mot « théorème », nous devions étudier d'horribles choses appelées démonstrations – « Les triangles ABC et XYZ sont égaux, car ils ont tous les deux trois côtés » – terriblement difficiles.

– Maman, j'ai démontré, pour te faire plaisir, le théorème de Chasles dans l'encadré 2.

– Merci ma chérie. Continue, c'est fascinant.

– Bien, d'ailleurs je ne vous ai pas dit le plus beau. Le théorème de Chasles énonce aussi que la réciproque est vraie. Si l'on fixe quatre points A, B, C, D et si l'on envisage les faisceaux de droites de sommet P dont les rayons passent dans l'ordre par A, B, C, D et dont le birapport a une valeur constante arbitraire fixée, alors P est situé sur une conique passant par A, B, C, D. Il existe une telle conique pour chaque valeur du birapport. C'est cette version du théorème de Chasles qui nous aidera à trouver d'où la photo a été prise. »

Déborah opina de la tête.

« Bien entendu.

– Vois-tu comment, maman ?

– Eh bien, dit-elle mal à l'aise, pas exactement commen., mais j'ai saisi l'idée générale.

– Je vais t'expliquer. Je ne vais pas chercher à quelle hauteur au-dessus du sol s'est faite la prise de vue, mais simplement essayer d'en repérer la position sur la carte. En d'autres termes, nous travaillerons dans un plan. La photographie n'est qu'une projection. Commençons par choisir

© POUR LA SCIENCE N° 148 FÉVRIER 1990

sur la photographie quatre points *A', B', C', D'* que l'on sache localiser avec précision sur la carte : l'extrémité gauche du pont du métro *(point A sur la carte de la figure 2)*, le milieu du pont de Grenelle *(B)*, l'extrémité gauche du pont du métro *(C)* et le milieu du pont de Bir Hakeim *(D)*. Calculons le birapport de ces quatre points en mesurant les distances horizontales (obtenues par projection) séparant les points correspondants *A', B', C', D'* sur la photographie. D'après ma calculette, le birapport est égal à 1,206 *(voir l'encadré 3)*.

« Considérons à présent les points correspondants *A, B, C, D* sur la carte, et désignons par *P* le centre de l'objectif. Nous savons que le faisceau de sommet *P* passant par *A, B, C, D* a aussi un birapport de 1,206.

– Pourquoi ?

– Mais parce que la photographie est une projection des positions sur la carte et que nous avons déjà vu que les projections conservent le birapport.

– Oh, exact.

– Et, d'après le théorème de Chasles, cela signifie que *P* doit être sur une certaine conique ; nous allons calculer quelle est cette conique et la dessiner sur la carte. »

Déborah réfléchit.

« Oui, mais cela ne précisera pas la position de *P*, qui peut être n'importe où sur cette conique.

– Tout à fait, mais suppose que nous trouvions une autre conique sur laquelle le point *P* soit aussi.

– Astucieux ! Alors *P* sera où les coniques se coupent. C'est un peu comme une recherche de la situation d'un émetteur radio. D'un premier point, on détermine une droite, d'un second une autre droite, et l'émetteur doit être à leur intersection !

– Exactement. Seulement nous utilisons des courbes.

– Je vois. Ainsi nous devons trouver quatre autres points sur la photographie que nous sachions repérer avec précision sur la carte.

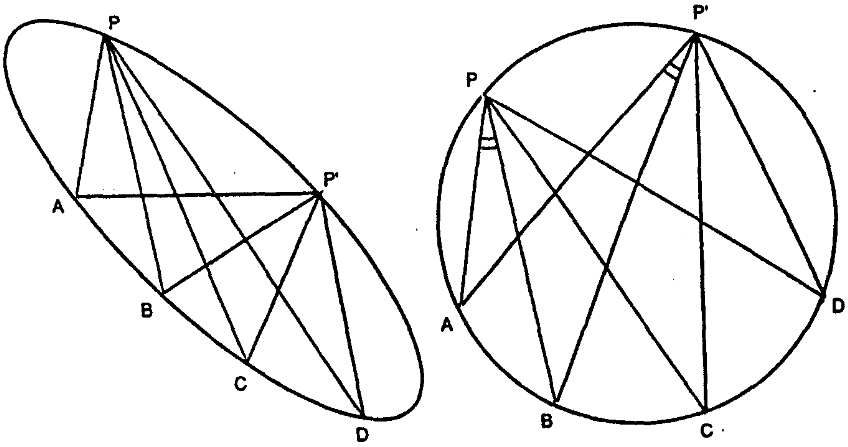
– Non. Un seul point suffit. »

Déborah réfléchit un moment et acquiesca de la tête, mais Cunégonde resta dubitative.

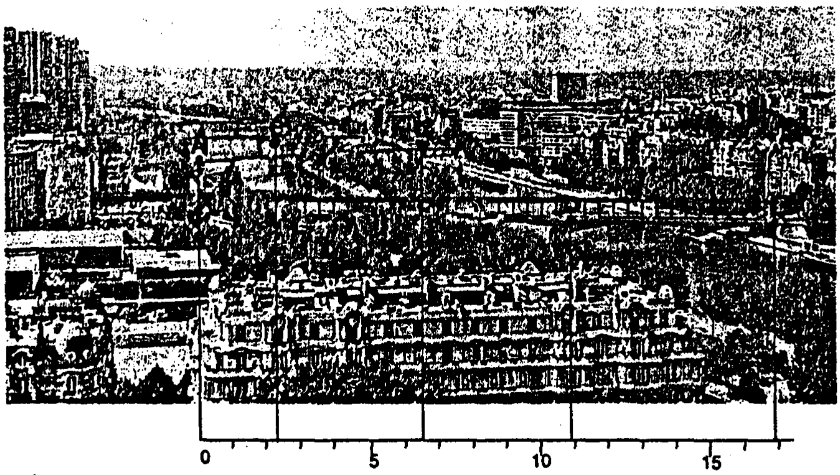
« Regarde, tantine. Choisissons l'extrémité droite du pont de Bir Hakeim *(point E de la figure 2)*. À présent, nous considérons les quatre points *A, B, C, E* : les points *A, B, C* ont déjà été utilisés, mais le quatrième est différent, et c'est tout ce qui importe. Sur la photographie, les points *A', B', C', E'* correspondants ont pour birapport 1,305 : il suffit de reprendre le calcul de l'encadré 3 en

Encadré 2 : Théorème de Chasles

C'est un bel exemple d'utilisation de la géométrie ordinaire pour démontrer des théorèmes de géométrie projective. Commençons par projeter la conique sur un cercle. Le birapport étant un invariant projectif, il suffit de démontrer le théorème dans ce cas particulier. Nous avons à prouver qu'étant donné quatres points fixes *A, B, C, D* d'un cercle et un point *P* mobile sur ce même cercle, le birapport du faisceau de droites *PA, PB, PC, PD* ne dépend pas de *P* (*voir la figure 7*). Dans l'encadré 1, nous avons vu une formule exprimant ce birapport en fonction des seuls angles *APC, BPD, BPC* et *APD*. Or, ces angles ne dépendent pas de la position du point *P* (*voir la figure 7b*), car ils interceptent le même angle.



7. Le théorème de Chasles : les faisceaux issus de *P* et de *P'* ont même birapport. Pour le démontrer, on projette la conique sur un cercle, ce qui ne change pas le birapport. Sur le cercle, la démonstration est évidente, les angles correspondants dans les deux faisceaux étant égaux.

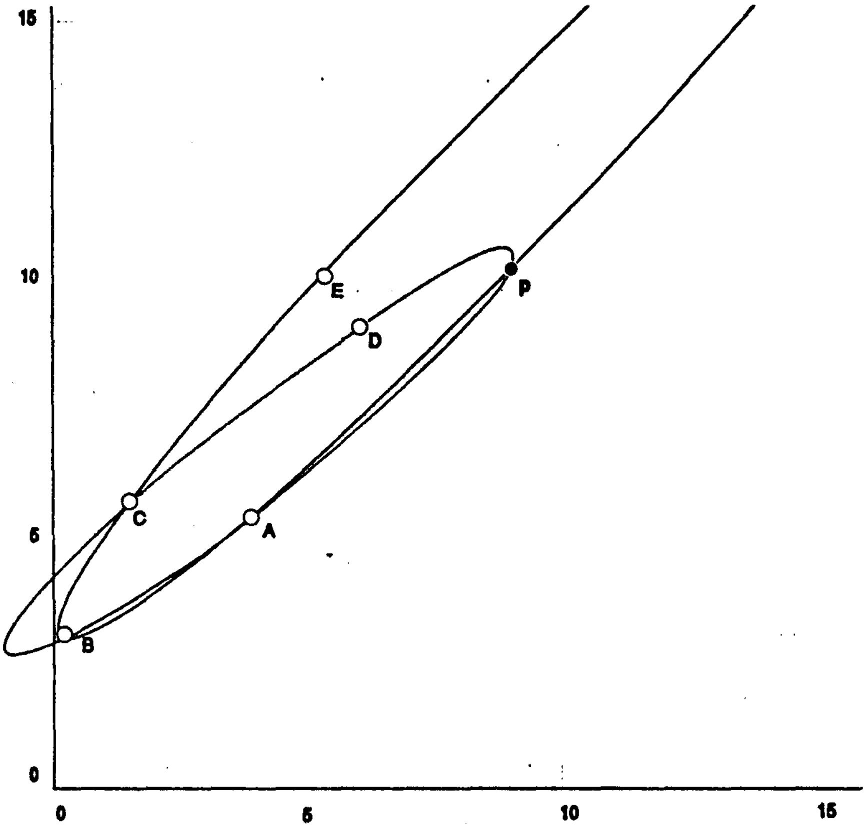


8. Évaluation des distances horizontales entre les cinq points *A', B', C', D', E'* de la photographie correspondants aux points *A, B, C, D, E* de la carte *(voir la figure 2)*.

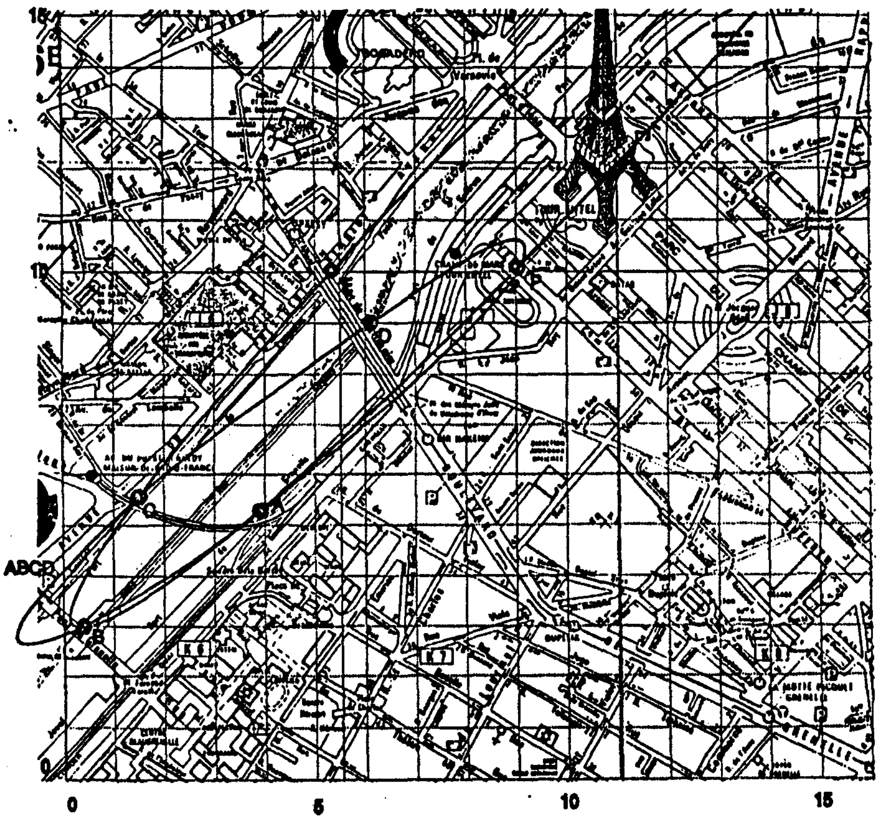
Encadré 3 : Calcul du birapport à partir de la photographie

Pointez les quatre points *A', B', C', D'* correspondant à *A, B, C, D*, comme cela a été fait sur la figure 8. Leurs distances horizontales à partir de la gauche sont 2,2 ; 6,5 ; 10,9 ; 16,9 (l'unité est arbitraire) ; le birapport vaut :

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}} \times \frac{\overline{B'D'}}{\overline{A'D'}} = \frac{6,5}{4,3} \times \frac{8,7}{10,9} = 1,206$$



9. Tracé des deux ellipses correspondant aux ensembles de points *ABCD* et *ABCE*. Elles se coupent en *A*, *B* et *C*, comme il se doit, et en un quatrième point, *P*, qui est la position de l'objectif.



10. La figure 9 surimposée sur la figure 2. Le photographe semble avoir été tout près de l'avenue de Suffren.

Encadré 4 : Le calcul de

Utilisant les coordonnées sur la carte précisées sur la figure 2, nous noterons (x,y) la position cherchée P de l'objectif et dresserons la table des coordonnées (x_A, y_A), etc. des points A, B, C, D:

x_A : 3,9	y_A : 5,3
x_B : 0,4	y_B : 3,0
x_C : 1,5	y_C : 5,6
x_D : 6,1	y_D : 9,0

Introduisons les expressions $L_{AB} = (y_A - y_B)x - (x_A - x_B)y + x_A y_B - x_B y_A$ et les expressions L_{AC}, L_{DB}, L_{DC} similaires.

$$L_{AB} = 2{,}3x - 3{,}5y + 9{,}58$$
$$L_{AC} = -0{,}3x - 2{,}4y + 13{,}89$$
$$L_{DB} = 6x - 5{,}7y + 14{,}7$$
$$L_{DC} = 3{,}4x - 4{,}6y + 20{,}66$$

Pour un birapport donné r, on démontre, en géométrie analytique, que la conique des positions possibles P admet pour équation :
$(r-1)L_{AC}L_{DB} - r\,L_{AB}L_{DC} = 0$:

changeant tous les *D* en *E*. Ainsi nous savons que *P* est aussi sur l'unique conique passant par *A*, *B*, *C*, *E* et pour laquelle le birapport est égal à 1,305.

– Brillant ! À présent, tout ce qui tu as à faire est de trouver les deux coniques.

– Cela peut prendre quelque temps », dit Mélu, et elle disparut dans sa chambre.

Elle en ressortit deux heures plus tard, avec l'encadré 4, qu'elle commença à nous expliquer.

« ... Ainsi la photographie doit avoir été prise du point de coordonnées 9,0 et 10,1, conclut-elle triomphalement.

– Qui est ?

– Eh bien... Il semble que ce soit le début de l'avenue de Suffren *(voir la figure 11)*.

la position de l'objectif

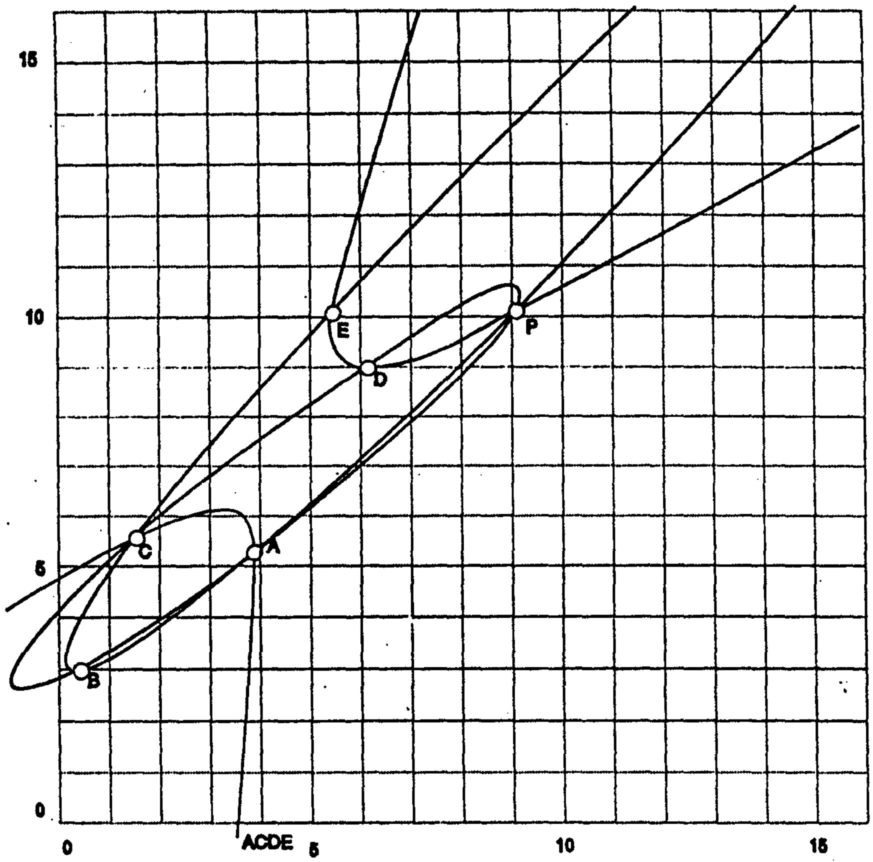
Nous savons que $r = 1{,}206$; aussi l'équation de la conique s'écrit :

$$-9{,}802\,x^2 + 24{,}497\,xy - 16{,}598\,y^2 - 80{,}329\,x + 116{,}775\,y - 196{,}633 = 0.$$

Traçons ensuite cette courbe dans un repère choisi, par exemple en donnant des valeurs à x et résolvant l'équation résultante en y, qui est du second degré. Cette conique est représentée sur la figure 10 ainsi que la conique obtenue en remplaçant A, B, C, D par A, B, C, E et dont l'équation – résultant de calculs analogues – est :

$$-13{,}969\,x^2 + 27{,}539\,xy - 14{,}554\,y^2 - 73{,}711\,x + 91{,}346\,y - 144{,}352 = 0.$$

Les deux courbes sont des ellipses ; elles se coupent en quatre points, dont trois sont bien entendu A, B et C : le quatrième est la position P de l'objectif. Par mesure directe sur le repère, on obtient $(x,y) = (9{,}0 ; 10{,}1)$ pour P. Mélu n'a plus qu'à reporter ce point sur la carte.



11. Quand on utilise les points A, C, D, E, la conique est une hyperbole : elle confirme la position de P. On a représenté ici cette hyperbole et les deux ellipses de la figure 9.

– C'est une rue proche de la tour Eiffel, tantine.

– C'est ce que j'avais deviné, dit tante Cunégonde.

– L'avenue de Suffren, demanda Déborah ?

– Non, la tour Eiffel.

– Bravo, belle intuition, tantine. Mais le calcul, lui, prouve ce résultat. Avec une petite incertitude qui ne doit pas nous surprendre étant donné la difficulté de localiser exactement les points sur la carte. De plus, la méthode est assez sensible aux petites erreurs de mesure. Du beau travail quand même ! »

Très agitée, elle agitait à bout de bras sa calculette.

« Et je peux refaire les calculs à partir de mesures plus précises.

– Non ! Non, la supplia sa mère ! Merci beaucoup Mélu. Je trouve que ces deux ellipses sont bien proches l'une de l'autre. Cela rend la détermination du point P d'intersection assez imprécise.

– Oui, je pourrais essayer d'autres ensembles de quatre points. Il serait peut-être préférable de choisir A, C, D, E. »

Est-ce préférable ? Essayez de mener à bien ce calcul vous-mêmes, si vous avez une heure à lui consacrer, et comparez votre résultat avec celui de Mélu.

À ce moment, Paul-Émile remua dans son sommeil, renifla et sauta sur ses pieds.

« Je me souviens, cria-t-il ! Tout me revient. J'ai pris la photographie du premier étage de la tour Eiffel !

– Nous savons cela, très cher, dit Déborah.

– Comment avez-vous pu...

– Mélu l'a calculé, dit Cunégonde.

– Mais, je ne vois pas...

– Eh bien, papa, expliqua Mélusine, c'est une question de géométrie projective, des plus intéressantes d'ailleurs... »

Réponses

Si vous utilisez les points A, C, D, E, alors le birapport vaut 1,524 et la conique a pour équation :
$-8{,}081\,x^2 + 16{,}772\,xy - 2{,}420\,y^2 - 50{,}702\,x - 42{,}361\,y + 266{,}466 = 0$.

Cette fois, c'est une hyperbole. Elle est représentée *(voir la figure 11)* dans le même repère que les deux ellipses. Remarquez qu'elle passe aussi par $(9{,}0 ; 10{,}1)$, confirmant ainsi notre premier résultat, mais elle a l'avantage de couper la première ellipse (et la seconde ellipse aussi d'ailleurs) sous un angle plus grand, ce qui facilite la détermination précise du point P d'intersection.

Il y a cinq ensembles différents de quatre points dans l'ensemble A, B, C, D, E (puisque choisir quatre points c'est en choisir un), de sorte que si vous le dessinez, vous pouvez trouver deux autres coniques passant par P. Il y a alors dix paires de coniques, chacune offrant une estimation de la position de P. N'y aurait-il pas une combinaison – comme, par exemple, la moyenne – de ces dix réponses dont l'erreur soit plus faible ? ■