

UNIVERSITÉ
LIBRE
DE BRUXELLES

LA PRÉPARATION
MATHÉMATIQUE
AUX ÉTUDES
UNIVERSITAIRES

La préparation mathématique aux études universitaires

Présentation

En conclusion d'un premier travail, la Commission des Mathématiques élémentaires avait organisé une Journée des Mathématiques qui eut lieu le 27 avril 1958 dans l'amphithéâtre Paul Emile Janson. Les communications qui y ont été faites ont été publiées dans la « Revue de l'Université de Bruxelles », (n° 3, 1959).

Lors de cette Journée, il était apparu que divers problèmes rencontrés par la Commission dans la première phase de ses travaux méritaient une étude objective au sein de groupes de travail.

Le premier de ces problèmes qui a été mis à l'étude, est celui de la préparation mathématique aux études universitaires.

Le texte du rapport présenté ce jour a été longuement et minutieusement élaboré et discuté au cours de treize séances d'un groupe de travail pendant l'année académique 1960-1961. Ce groupe était composé comme suit :

Président : A. Jaumotte, Président de la Faculté des Sciences appliquées;

Vice-Président : MM. les Professeurs R. Godeau (Sciences appliquées) et P. Libois (Sciences);

Secrétaire : M. le Professeur F. Bingen;

Membres : MM. les Professeurs P. Burniat, R. Debever, P. Janssens, A. Gardedieu, P. Gillis, G. Hirsch, J. Muller, G. Papy, J. Plainevaux, W. Servais, J. Teghem et J. Tits.

Il est juste de rendre hommage au Secrétaire du groupe, le Professeur Bingen qui, inlassablement, avec autant de compétence que de dévouement, a remis le travail sur le métier jusqu'à aboutir au document présenté.

La Commission des Mathématiques élémentaires s'est réunie en séance plénière les 4 mai et 7 décembre 1961. En sa séance du 7 décembre, la Commission a approuvé à l'unanimité le texte du « Rapport sur la préparation mathématique aux études universitaires ».

Par une lettre au Recteur de l'Université, en date du 11 décembre 1961, le Président de la Commission a remis le Rapport aux autorités académiques, en demandant, au nom de la Commission, de lui donner la plus large diffusion possible dans les milieux d'enseignements secondaire et technique.

La publication du rapport, en langue française et en langue néerlandaise, a été approuvée par le Conseil Académique et le Conseil d'Administration de l'Université.

Le but du Rapport est détaillé dans l'introduction. En bref, il consiste à énumérer les notions mathématiques et les matières qui, compte tenu de l'évolution de la Science et de la Technique, paraissent aujourd'hui indispensables à tout élève qui désire aborder des études supérieures faisant appel aux connaissances mathématiques.

La Commission espère avoir fait œuvre utile. Elle espère que les milieux des enseignements secondaire et technique trouveront une orientation féconde dans ce Rapport.

Composition de la Commission des Mathématiques élémentaires (années 1960 et 1961)

Président : André Jaumotte, Président de la Faculté des Sciences appliquées;

Vice-Présidents : M. Robert Godeau, Professeur à l'Université;
M. Paul Libois, Professeur à l'Université;

Secrétaire : M. Franz Bingen, Professeur à l'Université;

Membres : MM. Arbalestrie, Emmanuel, Préfet honoraire de l'Athénée royal de St-Gilles;

Burniat, Pol, Professeur à l'Université;

Debever, Robert, Professeur à l'Université;

M^{lle} de Brouckère, Lucia, Professeur à l'Université, Président de la Faculté des Sciences;

MM. De Coster, Sylvain, Professeur à l'Université;
Defrise, Pierre, Chargé de cours à l'Université;
De Groote, Paul, Président honoraire du Conseil d'Administration de l'Université;
Demeur, Marcel, Professeur à l'Université;
De Smet, Roger-Ernest, Professeur à l'Université;
Feldheim, Pierre, Chargé de conférences à l'Université;
Gardedieu, Alexandre, Professeur à l'Université;
Geheniau, Jules, Professeur à l'Université;
Gillis, Paul, Professeur à l'Université;
Goche, Omer, Professeur à l'Université;
Hirsch, Guy, Professeur à l'Université;
Homès, Marcel, Professeur à l'Université;
Hotyat, Fernand, Directeur du Centre de Travaux de l'Institut supérieur de Pédagogie de Morlanwelz;
Janne, Henri, Pro-Recteur de l'Université;
Janssens, Paul, Chargé de cours à l'Université;
Jeener, Jean, Chargé de cours à l'Université;
Lepage, Théophile, Professeur à l'Université;
Muller, Jacques, Professeur à l'Athénée de Bruxelles;
Papy, Georges, Professeur à l'Université;
Philippot, Jean, Chargé de cours à l'Université;
Plainevaux, Jean, Chargé de cours à l'Université;
Rijlant, Pierre, Professeur à l'Université;
Servais, Willy, Préfet de l'Athénée du Centre de Morlanwelz;
Teghem, Jean, Professeur à l'Université;
Tits, Jacques, Professeur à l'Université;
Van Isacker, Jacques, Chargé de cours à l'Université;
Van Waeyenberghe, Remy, Chargé de cours à l'Université;
Waelbroeck, Lucien, Chargé de cours à l'Université;
Wiame, Jean, Professeur à l'Université;
Van Mieghem, Jacques, Professeur à l'Université.

Observateur : M. Levarlet, Henri, Directeur général de l'Enseignement moyen.

Introduction

Il existe dans de nombreux pays un mouvement qui tend à la rénovation de l'enseignement de la mathématique à tous les niveaux. La Commission veut contribuer au développement de ce courant dans notre pays. Elle n'a pas eu l'ambition d'établir un projet de nouveau programme; le document qu'elle a rédigé se rapporte à la période de transition vers une réforme profonde. La Commission espère aider ainsi à améliorer dès à présent la préparation mathématique des étudiants qui se présentent à l'Université, en attirant l'attention sur certaines parties de la mathématique qui y jouent un rôle important.

Plusieurs des matières citées ci-après sont reprises et développées dans les cours de mathématique en première candidature, mais beaucoup d'entre elles sont employées dès le début de l'enseignement d'autres branches (mécanique, physique, chimie). D'autre part, quelques notions ne figurant pas au programme ont été mentionnées, parce que, étant fondamentales en mathématique, elles permettent d'unifier des sujets traités d'habitude séparément.

Il convient de préciser que les matières mentionnées plus loin ne doivent pas être considérées comme un programme pour l'enseignement secondaire et, en particulier, que si certaines matières ne sont pas citées, cela ne signifie pas que la Commission désire qu'elles ne soient plus enseignées.

Les professeurs de première candidature ont pleine conscience de la nécessité de ménager une transition entre l'enseignement secondaire et l'Université, les étudiants de première candidature pouvant avoir reçu des formations mathématiques d'esprit fort différent. Ce serait une erreur d'orienter l'enseignement secondaire en fonction des tendances de l'un ou l'autre cours donné dans une université ou d'un examen d'admission déterminé.

La mathématique contemporaine affirme de plus en plus son unité. Il faudrait que celle-ci se retrouve dans la conception qu'a l'étudiant de la mathématique. Les divisions traditionnelles de cette branche dans l'enseignement secondaire tendent à masquer cette unité profonde. En outre, la mathématique a toujours trouvé des sources fécondes d'inspiration dans la vie courante et dans les sciences expérimentales. Cette symbiose peut se refléter dans l'enseignement par de nombreux exemples tirés de l'expérience quotidienne ou scientifique.

Les études universitaires ont été réparties, d'après le niveau des notions mathématiques utilisées, en trois groupes :

- A — candidature préparant à la médecine, médecine vétérinaire, biologie, pharmacie, géographie, sciences sociales, psychologie, pédagogie;
- B — chimie, géologie, ingénieur agronome, ingénieur commercial, économie;
- C — mathématique, physique, ingénieur civil.

Groupe A

L'étudiant doit être familiarisé avec l'utilisation pratique des formes suivantes de raisonnement : implication, négation d'une implication, équivalence, disjonction, raisonnements par l'absurde et par récurrence, usage et portée du contre-exemple. Il doit savoir distinguer une condition nécessaire d'une condition suffisante.

Il est souhaitable que soient connues certaines notions élémentaires concernant les ensembles (appartenance, inclusion, intersection, réunion, produit cartésien) et les propriétés de certains ensembles de nombres (naturels ou entiers positifs, entiers, rationnels et réels).

Il est indispensable que l'étudiant possède les notions de relation et de fonction (celles-ci dans un sens très large) et de graphique d'une fonction d'une variable réelle (il doit savoir dessiner le graphique d'une fonction d'une variable définie par une expression analytique simple et évaluer les coefficients de l'expression analytique d'une fonction de type donné — linéaire, quadratique, exponentielle). Il connaîtra les notions de fonction continue et de limite pour les fonctions d'une variable réelle, il connaîtra les notions de dérivée (en sachant calculer la dérivée des fonctions rationnelles et trigonométriques) et de primitive (application au calcul d'aires et de volumes) et les éléments du calcul différentiel (interprétation géométrique et cinématique de la dérivée, fonctions croissante ou décroissante, extremum, exemples d'équations différentielles; $y' = f(x)$, $y'' = f(x)$). La connaissance de la représentation dans le plan (par des courbes de niveau) et dans l'espace d'une fonction de deux variables réelles et de la notion de limite d'une suite de nombre réels est souhaitable.

Comme exemples de fonctions numériques à étudier :

- fonction linéaire (la droite, les changements d'unités et d'origine);
- fonction quadratique (la parabole);
- fonction polynôme (divisibilité par $x - a$);
- fonction $1/x$ (l'hyperbole);
- fonctions exponentielle et logarithmique — leurs propriétés;
- fonctions trigonométriques, en rapport avec la projection orthogonale et la circonférence.

Il convient d'étudier aussi certaines transformations géométriques (translation, homothétie, symétrie, rotation, déplacement, isométrie, similitude, projections orthogonale et parallèle, affinité) ainsi que les propriétés conservées par ces transformations.

L'étudiant connaîtra les propriétés principales de l'espace euclidien, les propriétés élémentaires de certains êtres géométriques ainsi que les rapports les plus simples entre ces êtres. Il connaîtra notamment les notions suivantes :

- droite et plan (parallélisme, orientation), vecteur (combinaison linéaire);
- distance et perpendicularité, angle, cercle, sphère;
- produit scalaire, rapports trigonométriques et certaines formules de trigonométrie ($\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, $\sin(a \pm b) = \dots$, $\cos(a \pm b) = \dots$).

En ce qui concerne les équations et les systèmes d'équations, l'étudiant doit connaître la signification et l'usage de la terminologie courante (solution ou racine d'une équation, combinaison linéaire d'équations linéaires, solution d'un système d'équations, système compatible, système incompatible, systèmes équivalents, résoudre un système); il doit être entraîné à la résolution des équations algébriques du premier et du second degré et à la résolution ainsi qu'à la discussion des systèmes de deux ou trois équations linéaires.

L'étudiant doit avoir acquis certaines techniques de calcul :

- pratique des opérations sur les nombres (fractionnaires et décimaux) et les polynômes;
- maniement des égalités, inégalités et valeurs absolues;
- calcul logarithmique et usage d'une règle à calcul (produit, quotient, carré, racine carrée);
- emploi d'un formulaire et de tables (carrés, cubes, racines carrées, logarithmes, sinus, tangentes);
- usage des puissances entières et fractionnaires (positives et négatives);
- évaluation d'expressions numériques.

Groupe B

Il y a lieu de remarquer que les diplômes d'enseignement moyen requis sont les mêmes pour les étudiants du Groupe A que pour ceux du Groupe B. Cependant, si l'on tient compte du développement ultérieur des études, il est indiqué que les étudiants du Groupe B aient fait preuve d'aisance dans l'assimilation et le maniement des notions mathématiques au cours de leurs études secondaires. Certaines connaissances supplémentaires sont néanmoins souhaitables et trouvent naturellement place comme prolongement de sujets signalés au Groupe A :

- binôme de Newton (exposants entiers positifs), permutations et combinaisons;
- usage de coordonnées dans le plan et dans l'espace; rapport entre certaines notions algébriques et géométriques (expression analytique de quelques transformations géométriques, interprétation géométrique d'un système d'équations linéaires à deux ou trois inconnues, composantes d'un vecteur, opérations linéaires sur les vecteurs en vue de préparer à la compréhension des espaces vectoriels);
- quelques notions élémentaires relatives aux coniques, par exemple à l'occasion de l'étude des fonctions $1/x$, x^2 , de la relation $x^2 + y^2 = 1$ et de l'affinité;
- quelques notions concernant les nombres complexes (définition, représentation géométrique, calcul, module et argument en rapport avec les coordonnées polaires) et lien avec l'équation du second degré.

Groupe C

L'étudiant doit être capable de contrôler et de bâtir une démonstration. Il doit être en particulier familiarisé avec les formes suivantes de raisonnement : implication, négation d'une implication, équivalence, disjonction, raisonnements par l'absurde et par récurrence, usage et portée du contre-exemple. Il doit savoir distinguer une condition nécessaire d'une condition suffisante.

Il est souhaitable que soient connues certaines notions élémentaires concernant les ensembles : appartenance, inclusion, intersection, réunion, différence, produit cartésien, rapports entre l'intersection, la réunion et la différence.

Il est indispensable que l'étudiant possède les notions suivantes :

- relation et fonction (celles-ci dans un sens très large);
- fonction et relation biunivoques, transformation, permutation;
- composée de deux fonctions, produit de deux transformations;
- réciproque d'une fonction, transformation réciproque;
- analyse combinatoire, formule du binôme de Newton.

Il doit connaître les propriétés de certains ensembles de nombres :

- nombres naturels (entiers positifs) : lien avec ensembles finis;
- nombres entiers (négatifs, positifs et zéro) : relation d'ordre et opérations, algorithme d'Euclide, divisibilité, expression du plus grand commun diviseur comme combinaison linéaire des nombres;
- nombres rationnels;
- nombres réels : exemples de nombres irrationnels, représentation à peu près unique en numération décimale et binaire des nombres réels, relation avec les points d'une droite et le rapport de section, ordre sur les nombres réels;

— nombres complexes : représentations géométriques, argument, module (en rapport avec les coordonnées polaires), opérations (additions, multiplication, inverse et complexe conjugué) et leur signification géométrique formule de Moivre, équation binôme.

Il importe que l'étudiant sache pour chacun de ces ensembles de nombres quelles sont les opérations algébriques (addition, multiplication, division, moyenne arithmétique, racine n-ième, etc.) qui peuvent toujours être effectuées et sous quelles conditions les autres peuvent l'être. Il est souhaitable qu'à l'occasion de l'étude des divers ensembles de nombres, de fonctions (continues, dérivables, rationnelles, polynômes) et de transformations, les notions de groupe, de corps et d'anneaux soient dégagées.

Les notions suivantes doivent être connues :

- fonction continue et limite (définition, opérations sur les fonctions continues et les limites);
- limite d'une suite de nombres;
- graphique d'une fonction numérique d'une variable réelle (l'étudiant doit pouvoir dessiner le graphique d'une fonction d'une variable définie par une expression analytique et évaluer les coefficients de l'expression analytique d'une fonction de type donné — linéaire, quadratique, exponentielle — à partir du graphique; il est souhaitable qu'il connaisse la représentation sur le plan par des courbes de niveau et dans l'espace d'une fonction de deux variables);
- dérivée d'une fonction d'une variable (interprétation géométrique et cinématique), primitive (application au calcul d'aires et de volumes);
- règles de dérivation (combinaison linéaire, produit, fonction composée, fonction réciproque); dérivées des fonctions trigonométriques, logarithmique et exponentielle;
- application de la dérivée (équation de la tangente, fonctions croissante et décroissante, maximum et minimum, exemples d'équations différentielles : $y' = f(x)$ et $y'' = f(x)$).

Parmi les fonctions à étudier :

- fonction numérique linéaire à une et deux variables (droite, plan, changement d'unité et d'origine);
- fonction homographique (relation avec perspective entre 2 droites, hyperbole);
- fonction quadratique à une et deux variables (parabole et équation du second degré, courbes de niveau et coniques);
- fonctions polynôme et rationnelle (divisibilité par $x - a$);
- fonctions exponentielle et logarithmique (propriétés algébriques, logarithme népérien);

- fonctions trigonométriques (rapport avec la projection orthogonale et la circonférence);
- transformations géométriques et leur expression analytique dans les cas simples : translation — homothétie — symétries par rapport à un point, une droite, un plan — rotation — déplacement — isométrie, — similitude — affinité — projections orthogonales, cylindriques et conique — inversion; propriétés conservées par ces transformations.

Il est souhaitable qu'à l'occasion de l'étude de ces transformations, soit dégagée la notion de groupe de transformations et que l'on détermine quelques ensembles de transformations qui forment groupe.

Il convient que l'étudiant connaisse les propriétés principales de l'espace euclidien ainsi que de certains de ses sous-espaces (plan, droite, sphère, cercle, cylindre, ...); il connaîtra notamment les êtres géométriques les plus simples, les plus réguliers et les plus courants ainsi que les relations les plus simples entre ces êtres. Il est souhaitable qu'il sache percevoir le caractère affín, voire projectif, de certaines propriétés. Il doit être capable, à l'occasion de l'étude des êtres géométriques et de leurs relations, d'utiliser judicieusement les méthodes directes, coordonnées, vectorielles et graphiques.

Il connaîtra les matières suivantes :

- vecteurs (combinaison linéaire);
- coordonnées affines et euclidiennes dans le plan et dans l'espace (il est souhaitable qu'à cette occasion soient dégagées la notion d'espace vectoriel et la relation entre système de coordonnées et base), points complexes, groupe des changements de coordonnées affines et euclidienne, lien avec le groupe des affinités et des isométries), coordonnées polaires dans le plan;
- équation et représentation paramétrique d'une droite, paramètres directeurs, faisceau de droites (il est souhaitable que l'étudiant connaisse l'équation d'un plan et la représentation paramétrique d'une droite dans l'espace);
- systèmes d'équations linéaires équivalents, résolution d'un système d'équations linéaires par élimination;
- déterminant de quatre ou neuf éléments (lien avec l'aire du parallélogramme et éventuellement le volume du parallépipède);
- système d'équations linéaires à deux et trois inconnues (interprétation géométrique, rapport avec les transformations linéaires);
- représentation par la méthode de Monge et par les projections cotées d'un point, d'une droite et d'un plan (résolution graphique de problèmes concernant les positions relatives de ces éléments).

Il est souhaitable qu'à l'occasion de l'étude des transformations géométriques, des changements de coordonnées et des systèmes d'équations linéaires, il soit fait usage de matrices.

Les notions métriques suivantes doivent être connues :

- distance et perpendicularité, angle, cercle, sphère;
- produit scalaire, rapports trigonométriques;
- les formules fondamentales de trigonométrie, relations entre les angles et les côtés d'un triangle.

L'étudiant connaîtra les matières suivantes :

- birapport de quatre éléments ordonnés d'un faisceau, quaternes harmoniques et quadrilatère complet, points à l'infini;
- coordonnées homogènes dans le plan, changement de coordonnées homogènes, équations de la droite et du point, principe de dualité.

L'étudiant doit connaître l'énoncé du théorème de d'Alembert; il doit pouvoir résoudre une équation du deuxième degré. Il est souhaitable qu'il sache définir une courbe algébrique plane et qu'il connaisse la signification géométrique du degré de son équation.

En ce qui concerne les coniques et les formes quadratiques, il connaîtra les notions suivantes :

- intersection d'une conique et d'une droite, points conjugués par rapport à une conique, tangente, polaire, point double, représentation paramétrique d'une conique, propriétés duales;
- intersection de deux coniques, faisceau de coniques, détermination d'une conique par des conditions linéaires;
- centre, diamètre, diamètres conjugués, asymptotes, classification affine des coniques;
- étude d'une conique rapportée à ses axes, foyer, normale.

Il est souhaitable que l'étudiant connaisse les propriétés élémentaires des formes quadratiques à deux et trois variables (réduction à une somme de carrés et relation avec les propriétés des coniques).

L'étudiant doit utiliser avec facilité certaines techniques de calcul :

- pratiques des opérations sur les nombres (fractionnaires et décimaux) et les polynômes;
- maniement des égalités, des inégalités et des valeurs absolues;
- calcul logarithmique et usage d'une règle à calcul (produit, quotient, carré et racine carrée);
- emploi d'un formulaire et de tables (carrés, cubes, racines carrées, logarithmes, sinus, tangentes);
- usage des puissances entières et fractionnaires (positives et négatives);
- évaluation d'expressions numériques;
- erreur sur une somme, différence, produit, quotient, racine carrée.

Il doit pouvoir exécuter un dessin géométrique avec soin à l'encre.

CONCLUSION

La commission voudrait attirer particulièrement l'attention sur certains points :

- la capacité d'effectuer un raisonnement mathématique simple;
- la possibilité de donner des exemples et des contre-exemples;
- le choix judicieux d'une méthode de résolution d'un problème parmi plusieurs méthodes possibles;
- l'utilisation des formules avec discernement, en connaissant leur signification et leur application correcte;
- les notions de relation et de fonction;
- le graphique d'une fonction d'une variable;
- les fonctions linéaires et trigonométriques;
- les théorèmes de Thalès et de Pythagore;
- la capacité de calculer avec précision tant sur des nombres que sur des expressions contenant des indéterminées.

Des lacunes dans les domaines qui viennent d'être cités constituent un sérieux handicap pour un étudiant entreprenant des études universitaires où l'on fait usage de mathématique.