Math Z. 110, 306–318 (1969)

Ensembles quadratiques des espaces projectifs

FRANCIS BUEKENHOUT *

1. Principales définitions, rappels et résultats

1.1. Espaces projectifs

Dans cette note, l'expression «espace projectif» désignera un ensemble de points, muni d'une famille de sous-ensembles appelés droites, vérifiant les conditions suivantes (i) toute paire de points distincts p, q est contenue dans une et une seule droite notée $p+q$; (ii) toute droite contient au moins trois points; (iii) si a, b, c, d, e sont des points distincts tels que $a+b=a+c$ et $a+d=a+e$, les droites $b+e$ et $c+d$ ont un point commun.

Divers concepts tels que variété linéaire, dimension, perspectivité, hyperplan ainsi que leurs propriétés, seront utilisés sans rappels. Il est bien connu que les espaces projectifs peuvent être classés de la manière suivante: a) les espaces projectifs triviaux caractérisés par le fait qu'ils ont au plus une droite, ou encore, que leur dimension est inférieure à 2; b) les plans projectifs nonarguésiens; c) les espaces projectifs arguésiens de dimension $\geqq 2$ qui ne sont autres que les espaces projectifs à coordonnées homogènes dans un corps. Les espaces de dimension infinie ne seront pas systématiquement écartés de notre étude bien que notre démonstration des principaux résultats utilise l'hypothèse de finitude de la dimension. Notons qu'une variété linéaire sera toujours considérée comme un ensemble de points.

1.2. Hyperquadriques et ovoïdes

Soit P un espace projectif à coordonnées homogènes X_i $i\in I$, à valeurs dans un corps commutatif F. Alors une hyperquadrique de P est l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient une équation du second dégré

$$\sum_{i,j\in I} Q_{ij} X_i X_j = 0.$$

Observons que cette définition possède toujours un sens, même si I est un ensemble infini. Les hyperquadriques ovales, caractérisées par le fait qu'elles ne contiennent aucune droite et au moins deux points, conduisent à la notion d'ovoïde, une généralisation due à Tits qui en a montré l'intérêt par sa découverte des «ovoïdes de Suzuki» [4] et par diverses caractérisations des hyperquadriques ovales basées sur l'homogénéité de ces ensembles [3]. Dans les plans, arguésiens ou non, on connait de nombreux exemples d'ovoïdes qui ne sont pas des hyperquadriques (cf. [1] pour des références plus précises).

* L'auteur remercie le Professeur G. Pickert dont les suggestions ont permis d'améliorer l'exposé.

La présente étude introduit une notion *d'ensemble quadratique* généralisant cette d'ovoïde et englobant toutes les hyperquadriques, dégénérées ou non.

1.3. Ensembles quadratiques

Soit P un espace projectif et Q un ensemble de points de P. Une droite de P sera *tangente* à Q si elle rencontre Q en un seul point ou si elle est contenue dans Q. Nous dirons que Q est un ensemble quadratique si (i) toute droite de P rencontre Q en deux points au plus ou est contenue dans Q et (ii) pour tout point $p \in Q$, la réunion Q_p des tangentes[1] à Q contenant p, est un hyperplan ou l'espace P. On dira, par abus de langage, que Q_p est *l'hyperplan tangent* à Q en p.

Un *point double* de Q sera un point $p \in Q$ tel que $Q_p = P$. Si Q admet au moins un point double, Q sera dit *dégénéré*. Si Q contient au moins une droite, Q sera dit *réglé*. Lorsque P est un plan, on observera qu'un ensemble quadratique non dégénéré est un ovoïde.

Un ensemble quadratique Q sera dit *perspectif* si: pour tout point c n'appartenant pas à Q, ni à l'intersection des hyperplans tangents Q_p, $p \in Q$, il existe une perspectivité non-identique de centre c qui conserve Q (un automorphisme de P fixant toute droite contenant c). Il est bien connu que toute hyperquadrique sur un corps commutatif est un ensemble quadratique perspectif.

1.4. Principaux résultats

Théorème 1. *Si P est un espace projectif arguésien de dimension finie $n \geqq 2$ et Q un ensemble quadratique perspectif qui n'est pas la réunion de deux variétés linéaires, P est un espace sur un corps commutatif et Q est une hyperquadrique.*

Théorème 2. *Dans un espace projectif de dimension finie tout ensemble quadratique réglé, non-dégénéré est perspectif.*

Théorème 3. *Dans un espace projectif de dimension finie, tout ensemble quadratique non-dégénéré est une hyperquadrique ou un ovoïde.*

Le théorème 3 est un corollaire immédiat des précédents.

Dans le théorème 1, le fait d'exiger que Q n'est pas la réunion de deux variétés linéaires est essentiel. Montrons-le par deux exemples: a) dans un plan projectif complexe un ensemble réduit à un point ou vide, n'est pas une hyperquadrique; b) dans un espace projectif sur un corps non-commutatif, la réunion de deux hyperplans est un ensemble quadratique perspectif.

Nous examinerons des perspectives de généralisations, à la fin de ce travail.

2. Propriétés élémentaires des ensembles quadratiques

Considérons d'abord l'intersection d'un ensemble quadratique et d'une variété linéaire.

---

1. Pour éviter que Q_p ne soit vide, quand dim $P = I$ il sera bon d'exiger que Q_p doit contenir p; sans cette précision, un ensemble de deux points ne serait pas un ensemble quadratique et ceci nuirait à la généralité de certaines propriétés énoncées plus loin.

2.1. Proposition. *Soit Q un ensemble quadratique et V une variété linéaire d'un espace projectif P. Alors l'ensemble $Q \cap V$ est un ensemble quadratique dans V et pour tout point $p \in Q \cap V$ on a $(Q \cap V)_p = Q_p \cap V$.*

La démonstration est immédiate.

Corollaire. *Si H est un hyperplan et Q est non-degénéré, $H \cap Q$ a un point double p si et seulement si $H = Q_p$.*

2.2. Proposition. *Un ensemble de points Q d'un espace projectif P avec* $\dim P \geqq 2$ *est un ensemble quadratique si et seulement si toute section plane de Q est un ensemble quadratique.*

Démonstration. Si Q est quadratique toute section plane est quadratique par 2.1. Supposons que $Q \cap \pi$ soit quadratique dans π pour tout plan π de P. Considérons une droite D de P et un plan π contenant D; un tel plan existe du fait que $\dim P \geqq 2$. Il est clair que $Q \cap D = (Q \cap \pi) \cap D$. La condition 1.3(i) en résulte. De plus, D est tangente à Q si et seulement si, D est tangente à $Q \cap \pi$ pour tout plan π contenant D. Pour tout $p \in Q$, soit Q_p la réunion des tangentes à Q en p.

Si D_1 et D_2 sont deux de ces tangentes et π le plan contenant D_1 et D_2, $\pi \cap Q$ est un ensemble quadratique dont l'hyperplan tangent est π. Donc π est contenu dans Q_p et Q_p est une variété linéaire. Enfin, comme tout plan contenant p a une droite dans Q_p il n'est pas difficile de montrer que Q_p est un hyperplan ou P ce qui achève la preuve de 1.3(ii).

Passons à l'examen des ensembles quadratiques dégénérés.

2.3. Proposition. *L'ensemble des points doubles d'un ensemble quadratique est une variété linéaire.*

Démonstration. Si a, b sont des points doubles distincts de Q, il suffit de prouver que tout point c appartenant à la droite $a+b$ est également un point double. Comme $a+b$ est tangente en a, cette droite est contenue dans Q et $c \in Q$. Soit D une droite passant par c. Il faut prouver que D est une tangente. On peut supposer que $c \neq a$, b et $D \neq a+b$. Si D contient un point $d \in Q$ avec $c \neq d$ l'hyperplan tangent Q_d contient a, b car $a+d$ et $b+d$ sont des droites de Q. Donc Q_d contient la droite $a+b$ et le point c. De ce fait, $c+d=D$ est une tangente en d et est contenue dans Q. Il en résulte que c est double.

La proposition suivante montre que l'étude des ensembles quadratiques dégénérés se ramène à celle des ensembles non-dégénérés.

2.4. Proposition. *Soit Q un ensemble quadratique, D la variété linéaire des points doubles de Q et V une variété linéaire complémentaire de D c'est-à-dire disjointe de D et maximale pour cette propriété (on a $V+D=P$). Alors $Q \cap V$ est non-dégénérée et Q est la réunion de D, $Q \cap V$ et des droites joignant un point de D à un point de $Q \cap V$.*

Démonstration. Si $Q \cap V$ a un point double p, il résulte de 2.1 que V est contenue dans Q_p. Comme D est également contenue dans Q_p, on a donc $Q_p = P$ et $p \in D$ ce qui est impossible. Si $q \in Q$ et q n'est pas un point de D ou de

$Q \cap V$, il existe une droite passant par q et joignant un point $d \in D$ à un point $v \in V$. Cette droite est donc contenue dans Q et $v \in Q \cap V$. Ceci prouve que Q est contenu dans la réunion considérée. D'autre part, il est clair que tout point de cette réunion est un point de Q.

La proposition précédente admet une réciproque que nous nous bornons à énoncer: si V et D sont des variérés linéaires disjointes et Q un ensemble quadratique dans V, la réunion de D, Q et des droites joignant un point de D à un point de Q est un ensemble quadratique dans la variété $V + D$; en outre, D sera l'ensemble des points doubles de cet ensemble si Q est non-dégéréré.

2.5. Proposition. *Soit Q un ensemble quadratique. Alors toute section plane de Q est dégénérée ou vide si et seulement si Q est une variété linéaire (et alors tous ses points sont doubles) ou Q est la réunion de deux hyperplans distincts (et alors l'intersection de ceux-ci est la variete des points doubles).*

La démonstration ne présente pas de difficultés.

2.6. Proposition. *Si Q est un ensemble quadratique d'un espace projectif P et si Q n'est pas réduite à une variété linéaire, la plus petite variété linéaire contenant Q est P lui-même.*

Démonstration. Il suffit d'observer que Q possède au moins un point p qui n'est pas double, donc pour lequel Q_p est un hyperplan. Alors toute droite passant par p qui n'est pas contenue dans Q_p contient un deuxième point de Q. Le résultat s'en déduit aisément.

3. Les Q-variétés d'un ensemble quadratique Q

3.1. Lorsque Q est un ensemble quadratique et V est une variété linéaire contenue dans Q, nous dirons que V est une Q-variété. Nous nous intéressons avant tout aux Q-variétés maximales. Il est clair que toute intersection d'une famille non-vide de Q-variétés est une Q-variété.

3.2. Proposition. *Soit G un ensemble de points d'un ensemble quadratique Q tel que toute droite joignant deux points de G soit contenue dans Q. Alors la variété linéaire engendrée par G est une Q-variété.*

Démonstration. Il suffit de prouver cette propriété pour un ensemble G qui est fini car tout point de la variété engendrée par un ensemble appartient à la variété engendrée par un nombre fini de ces points. Procédons par induction sur le nombre d'éléments m de G. Si $m = 0, 1, 2$ la propriété est triviale. Supposons que $m > 2$ et soit $g \in G$, V la variété linéaire engendrée par $G - g$. Par l'hypothèse d'induction, V est une Q-variété. Tout point x de la variété $g + V$ engendrée par G appartient à une droite $g + v$ avec $v \in V$.

L'hyperplan tangent Q_g contient $G - g$, donc V. De ce fait, toute droite $g + v$ est tangente en g et est contenue dans Q puisqu'elle contient deux points distincts de Q. On a donc $x \in Q$.

3.3. Proposition. *Soit Q un ensemble quadratique et supposons que V soit une Q-variété et p un point de Q tel que $V+p$ ne soit pas une Q-variété. Alors* 1) *la réunion V_p des Q-droites qui passent par p et par un point de V est une variété linéaire qui est une Q-variété;* 2) *$V_p \cap V = Q_p \cap V$ et cette variété est un hyperplan dans V et dans V_p;* 3) dim $V_p =$ dim V; 4) *si V est une Q-variété maximale, il en va de même pour V_p.*

Démonstration. Il est clair que $V_p = (V+p) \cap Q_p$ de sorte que V_p est une variété linéaire et que $V_p \cap V = Q_p \cap V$. En outre, V_p est une Q-variété par 3.2 (G étant la réunion de V et de p). Comme V_p ne peut contenir V, $V_p \cap V$ est un hyperplan de V car Q_p est un hyperplan de P. Donc $V_p = (V_p \cap V) + p$ est un hyperplan de $V+p$ et $V_p \cap V$ est un hyperplan de V_p. Ceci achève la preuve de 1) et 2); 3) en est une conséquence immédiate. Il est clair que si V_p est une Q-variété maximale, V sera également maximale. La propriété réciproque 4) résulte alors de la symétrie des rôles joués par V et V_p: soit $q \in V - (V \cap V_p)$; $V_p + q$ n'est pas une Q-variété sinon $V+p$ en serait une; comme $(V_p)_q = V$ on peut conclure.

3.4. Proposition. *Les Q-variétés maximales d'un ensemble quadratique Q ont la même dimension.*

Démonstration. 1) Notons d'abord que toute Q-variété est contenue dans une Q-variété maximale au moins, cette propriété résultant du lemme de Zorn: on observe que la réunion d'une chaîne de Q-variétés est une Q-variété.

2) Soient V et V' des Q-variétés maximales de dimensions respectives n, n' avec $n < n'$. Il faut établir une contradiction. Soit B une base de V formée de $n+1$ points linéairement indépendants et choisie de telle sorte que $B \cap V'$ soit une base de $V \cap V'$. Pour tout point $b \in B$ considérons la variété linéaire V'_b réunion des Q-droites passant par b et par un point de V'. Les $V'_b \cap V'$ sont des hyperplans de V' ou la partie pleine en vertu de 3.3. Comme $n < n'$, l'intersection de ces variétés est non-vide car ce sera une variété dont la codimension dans V' est au plus égale à n. Soit p un point de cette intersection. Alors $p + V$ est une Q-variété par 3.2 et V n'est pas maximale.

3.5. Si Q est un ensemble quadratique et d la dimension commune à toutes les Q-variétés maximales de Q, *l'indice* i de Q sera le nombre cardinal $d+1$. On a clairement $i \geqq 1$ dès que Q est non-vide, $i \geqq 2$ dès que Q est réglée.

3.6. Proposition. *Si Q est un ensemble quadratique non-dégénéré d'indice fini, toute Q-variété est l'intersection des Q-variétés maximales qui la contiennent*[2].

Lemme 1. *Si V est une Q-variété, il existe une Q-variété maximale disjointe de V.*

Preuve. Comme Q est d'indice fini, la dimension de V est finie. Si V' est une Q-variété maximale dont l'intersection avec V est non-vide et de dimension j il suffira de prouver qu'il existe une Q-variété maximale V'' telle que dim $(V \cap V'')$ $= j-1$. Il existe un point $p \in Q$ tel que $p + (V \cap V')$ ne soit pas une Q-variété,

2. Il est facile de voir que cette proposition cesse d'être valable si Q est dégénéré. Par contre, on peut conjecturer que le résultat demeure valable si Q est d'indice infini.

sinon tout point de $V \cap V'$ serait double pour Q. De ce fait, $(V \cap V')_p$ est une Q-variété dont l'intersection avec $V \cap V'$ est de dimension $j-1$ par 3.3. Par 3.3, la Q-variété V'_p est maximale, contient $(V \cap V')_p$ et a la même intersection avec $V \cap V'$ que cette dernière variété, sinon V'_p contient $V \cap V'$ et p de sorte que $p+(V \cap V')$ est une Q-variété. On a $V \cap V'_p = V \cap V' \cap V'_p$. Supposons le contraire et soit x un point de $V \cap V'_p$ n'appartenant pas à V'. Alors la réunion G de $V \cap V'$, $V'_p \cap V'$ et $\{x\}$ vérifie les hypothèses de 3.2 et engendre une Q-variété W qui contient V'_p car W contient l'hyperplan $V'_p \cap V'$ de V'_p et un point x extérieur à ce dernier. Par conséquent $W = V'_p$ qui est maximale et V'_p contient encore $V \cap V'$ ce qui conduit à une contradiction comme nous l'avons vu plus haut. Il en résulte que $\dim(V \cap V'_p) = \dim(V \cap V' \cap V'_p) = j-1$, ce que nous devions établir.

Lemme 2. *Si V est une Q-variété contenue dans la Q-variété W, il existe une Q-variété maximale W' telle que $W \cap W' = V$.*

Preuve. Procédons par induction sur la dimension de V. Si V est vide, la propriété résulte du lemme 1.

Supposons que la propriété est valable en dimension $m-1$ et prouvons-là en dimension m avec $m \geqq 0$. Soit V_1 un hyperplan de V et p un point de $V - V_1$. Il existe une Q-variété maximale W_1 telle que $W \cap W_1 = V_1$ car $\dim V_1 = m-1$. La Q-variété maximale $W' = W_{1p}$ répond à notre condition.

La proposition 3.6 résulte immédiatement du lemme précédent et du fait que toute Q-variété est contenue dans une maximale.

3.7. Corollaire. *Si Q est un ensemble quadratique non-dégénéré d'indice fini i dans un espace projectif de dimension n, on a $2i \leqq n+1$.*

Il suffit de considérer deux Q-variétés maximales disjointes V_1, V_2 dont l'existence est assurée par 3.6. On a $\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$ qui fournit l'inégalité annoncée.

3.8. Des propriétés établies plus haut, il résulte que tout ensemble quadratique non-dégénéré et d'indice fini $i \geqq 2$ muni de ses Q-variétés, est une géométrie polyédrique de type C_i non-dégénérée [5]; lorsque $i > 2$, cette structure vérifie également les axiomes énoncés en [6].

4. Démonstration du théorème 1

4.1. Lemme. *Si Q est un ensemble quadratique qui n'est pas une variété linéaire et si* $\dim P \geqq 2$, *un automorphisme de P fixant tous les points de Q est l'identité.*

Preuve. Q possède au moins deux points p, q qui ne sont pas doubles sinon on montre aisément que Q est une variété linéaire. L'automorphisme σ conserve toute droite passant par p qui n'est pas contenue dans Q_p. On en déduit que σ fixe toute droite passant par p (il suffit de considérer l'action de σ sur un plan contenant une seule droite de Q_p). Il en va de même pour q. Par conséquent, σ est une perspectivité possédant deux centres p et q et σ est l'identité.

4.2. Lemme. *Si Q est un ensemble quadratique,* $\dim P \geqq 2$ *et si c est un point de $P-Q$ qui n'est pas commun à tous les hyperplans tangents Q_p, $p \in Q$ il existe au plus une perspectivité non identique de centre c qui conserve Q.*

Preuve. Q n'est pas réduit à une variété linéaire sinon l'intersection des Q_p serait P et il n'y aurait pas de point tel que c. On peut donc appliquer 4.1. Soient σ, ζ des perspectivités non-identiques de centre c qui conservent Q. Pour tout point $p \in Q$ tel que $c+p$ contienne un point $p' \in Q$ avec $p' \neq p$ on a $\zeta(p)=\sigma(p)=p'$ sinon $\zeta(p)=p$ et ζ conserve Q_p et $Q_{p'}$, qui sont distincts et ne contiennent pas c ce qui oblige ζ à fixer tous les points de ces deux hyperplans: une contradiction avec le fait que ζ n'est pas identique. Donc les restrictions de ζ et σ à Q coïncident et $\sigma^{-1} \cdot \zeta$ est un automorphisme fixant tous les points de Q, c'est-à-dire l'identité par 4.1.

4.3. Lemme. *Dans un plan projectif sur un corps commutatif soient Γ, Γ' deux coniques ne contenant pas tous les points du plan, ayant trois points communs non-alignés et des tangentes communes et distinctes en deux de ces points. Alors $\Gamma=\Gamma'$.*

Preuve. Ce résultat classique est susceptible d'une vérification très simple. On choisit un système de coordonnées homogènes (x_1, x_2, x_3) tel que deux points communs soient $a=(1,0,0)$; $b=(0,1,0)$ et que les tangentes en ces points soient $x_2=0$ et $x_1=0$ respectivement. Soit c le troisième point commun à Γ et Γ'. Distinguons deux cas:

a) c n'est pas sur les tangentes en a et b. Alors on peut choisir les coordonnées de telle manière que $c=(1,1,1)$. On vérifie qu'il existe une et une seule conique satisfaisant aux conditions requises: $x_1 x_2 - x_3^2 = 0$

b) c est sur une au moins des tangentes en a et b. Alors Γ et Γ' contiennent cette tangente et de ce fait elles contiennent l'autre. Elles ne peuvent contenir aucun point ne vérifiant pas l'équation $x_1 x_2 = 0$ et sont donc égales.

4.4. Proposition. *Soit P un espace projectif de dimension finie sur un corps commutatif et Q un ensemble quadratique qui n'est pas une variété linéaire et dont toute section plane, non réduite à une variété linéaire, est une conique. Alors Q est une hyperquadrique.*

Observons que la conjonction de 4.4 et 2.2 étend la validité du théorème 4.1.1 de [3].

Démonstration. La propriété est triviale en dimension 1 et 2. Supposons que $\dim \mathrm{P} > 2$ et procédons par induction sur celle-ci. Il existe au moins deux points a, b de Q tels que la droite $a+b$ ne soit pas contenue dans Q puisque Q n'est pas une variété linéaire. Un hyperplan H passant par a et b sera tel que $H \cap Q$ n'est pas une variété linéaire et grâce à l'hypothèse d'induction $H \cap Q$ sera une hyperquadrique. Soit p un point de $Q - Q \cap H$ qui n'est pas double (il n'est pas difficile de montrer qu'un tel point existe). Dans P il existe un système de coordonnées homogènes x_i $i=1, \ldots, n+1$ tel que 1) H soit l'hyperplan d'équation $x_1=0$, 2) p soit le point $(1,0,\ldots,0)$, 3) Q_p soit l'hyperplan

$x_{n+1}=0$. Enfin soit q un point de $Q\cap H$ n'appartenant pas à Q_p (un tel point existe sinon Q_p contient H par 2.6 et p est double). Dans H, l'hyperquadrique $Q\cap H$ a une équation

$$\sum_{i,j=2}^{n+1} a_{ij}\, x_i\, x_j=0.$$

Dans P, nous considérons la famille d'hyperquadriques

$$\lambda\, x_1\, x_{n+1}+\sum_{i,j=2}^{n+1} a_{ij}\, x_i\, x_j=0$$

où $\lambda\neq 0$ dans le corps de base. On vérifie aisément que ces hyperquadriques contiennent $Q\cap H$, passent par p, admettent Q_p comme hyperplan tangent en p (du fait que $\lambda\neq 0$). Parmi ces hyperquadriques il y en a une et une seule, soit Q' qui a la propriété $Q_q=Q'_q$. On va prouver que $Q=Q'$. Soit c un point quelconque de Q n'appartenant pas à $Q\cap H$ et distinct de p. Les points c, p, q ne sont pas alignés et engendrent un plan α qui coupe Q suivant une conique Γ et Q' suivant une conique Γ'. Soit D la droite commune à α et H; p et c n'appartenant pas à D mais $q\in D$. Distinguons deux cas.

a) D contient un point $q'\in Q$ avec $q'\neq q$. Alors Γ et Γ' ont trois points communs p, q, q' et des tangentes communes en p, q du fait que $Q'_p=Q_p$ et $Q_q=Q'_q$ (2.1). Ces tangentes sont distinctes car $p+q$ n'est pas une droite de Q. Pour la même raison, Γ et Γ' ne remplissent pas tout le plan α. Le lemme 4.3 permet donc d'affirmer que $\Gamma=\Gamma'$. Il en résulte que $Q=Q'$ en dehors de l'hyperplan $p+(Q\cap H)_q$ engendré par la réunion des plans α qui passent par p, q et coupent H suivant une tangente D à Q.

b) D est tangente à Q et non contenue dans Q. Soit d un point de Q n'appartenant pas à l'hyperplan $p+(Q\cap H)_q$ (d existe par 2.6). Les points p, c, d ne sont donc pas alignés et engendrent un plan qui coupe Q, Q' suivant des coniques Γ_1 et Γ_1' qui coïncident en dehors de la droite $p+c$ en vertu de a). On en déduit aisément que $\Gamma_1=\Gamma_1'$, donc que $c\in Q'$. On a donc montré que Q est contenu dans Q' et on achève de montrer de manière analogue que Q' est contenu dans Q.

4.5. *Démonstration du théorème* 1 *quand* $\dim P=2$. Dans ce cas, Q est non-dégénéré et non-vide. Considérons un système de coordonnées homogènes (x_1, x_2, x_3) tel que $(0,1,0)$, $(1,0,0)$ et $(1,1,1)$ soient des points de Q et que les tangentes en les deux premiers points soient respectivement $x_1=0$ et $x_2=0$. Tout point de la droite $x_3=0$ non situé sur Q, aura des coordonnées de la forme $(1,m,0)$ où $m\neq 0$ dans le corps de base K. Comme Q est perspective il existe une perspectivité non-identique de centre $(1,m,0)$ qui conserve Q, qui permute $(1,0,0)$ et $(0,1,0)$ et fixe $(0,0,1)$. De ce fait l'axe de cette perspectivité est la droite $x_2+m x_1=0$: si K est de caractéristique 2, l'axe passe par $(1,m,0)$ et si K n'est pas de caractéristique deux, il passe par le conjugué harmonique $(1,-m,0)$ de $(1,m,0)$ par rapport à $(0,1,0)$ et $(1,0,0)$. Un calcul élémentaire montre que la perspectivité considérée applique $(1,1,1)$ sur $(-m^{-1}, -m, 1)$. Donc Q est l'ensemble des points vérifiant l'équation $x_1\, x_2-x_3^2=0$. Il reste à prouver que le corps K est commutatif. Pour tout $a \neq 0$ dans K, la perspectivité non-identique de centre $(1, a, 0)$ qui conserve Q applique $(-m^{-1}, -m, 1)$ sur $(a^{-1} m, a m^{-1}, 1)$. Ce dernier point doit donc vérifier l'équation de Q d'où on tire $a m = m a$.

4.6. *Démonstration du théorème* 1 *quand* $\dim P > 2$. Comme Q n'est pas la réunion de deux variétés linéaires il résulte de 2.5 que l'une des sections planes de Q est non-dégénérée et on montre facilement qu'il en existe une qui est non-vide. On peut donc appliquer 4.5 à cette section et conclure que le corps de base est commutatif. Soit Γ une section plane de Q qui ne soit pas une variété linéaire. Il est clair que Γ est perspective. Si Γ est non-dégénérée il résulte de 4.5 que Γ est une conique. Si Γ est dégénérée, Γ est la réunion de deux droites et un tel ensemble est toujours une conique sur un corps commutatif. On peut donc appliquer 4.4 pour conclure.

5. Démonstration du théorème 2

5.1. Si x, y sont des points distincts de Q nous désignons par Q_{xy} la variété linéaire $Q_x \cap Q_y$ qui est toujours de codimension 2 dans P sinon $Q_x = Q_y$ et on établit aisément l'existence d'un point double sur la droite $x+y$ en utilisant 2.1, 3.6 et en observant que tous les points de $x+y$ sont doubles dans $Q \cap Q_x$.

5.2. Si la droite $x+y$ n'est pas une droite de Q, Q_{xy} est engendré par $Q_{xy} \cap Q$.

En effet, $Q_{xy} \cap Q$ est non-dégénéré car un point double p serait tel que Q_p contient Q_{xy}, x et y et alors p serait double pour Q puisque Q_{xy} et x engendrent Q_x. En outre, $Q_{xy} \cap Q$ est non-vide (grâce à 3.3 par exemple). On peut donc appliquer 2.6.

5.3. Si σ est une perspectivité de centre p n'appartenant pas à Q telle que $\sigma(a) = b$ où $a, b \in Q$ et $a \neq b$, l'axe de σ doit contenir Q_{ab}. En effet, tout point de $Q_{ab} \cap Q$ est fixé par σ ce qui permet d'utiliser 5.2 (la droite $a+b$ contient p et ne peut donc être contenue dans Q).

5.4. Soit p un point n'appartenant pas à Q, a et b des points distincts de Q alignés avec p.

Soit D une droite de Q passant par a. Alors le plan $b+D$ n'est pas contenu dans Q. Par 3.3, il existe une et une seule droite $b+e$ contenue dans Q avec $e \in D$. Soit c un point de $D-a-e$ et d le point $(p+c) \cap (b+e)$. On a $Q_{cb} \neq Q_{ab}$ sinon $Q_{ab} = Q_{ac} = Q_{cd}$ et Q_b passe par a. Alors $Q_{cd} + Q_{ab}$ est un hyperplan car

$$Q_{ab} \cap Q_{cd} = Q_a \cap Q_c \cap Q_b \cap Q_d = Q_a \cap Q_c \cap Q_e \cap Q_b = Q_a \cap Q_b \cap Q_c$$

parceque $Q_b \cap Q_d = Q_e \cap Q_b$, $Q_c \cap Q_e = Q_a \cap Q_c$.

5.5. Soit σ la perspectivité de centre p et d'axe $Q_{ab} + Q_{cd}$ qui applique a sur b. Il suffira de prouver que σ conserve Q. On voit que σ dépend seulement de Q, p, a, b, c et nous écrirons $\sigma\,(Q, p, a, b, c)$ pour tenir compte de cette observation. Si nous prouvons que σ conserve Q, nous aurons terminé. Il est clair que σ applique toute droite de Q passant par a (ou c) sur une droite de Q passant par b (ou d).

Grâce à 5.1 et 2.1, $Q_a \cap Q$ possède a comme seul point double sinon $Q_a = Q_b$ pour un point $b \neq a$. De ce fait on peut appliquer 2.4, 2.6 et les résultats de 3 pour affirmer que Q_a est engendrée par les droites de Q passant par a. Par conséquent, σ applique Q_a sur Q_b et Q_c sur Q_d.

5.6. Soit x un point de Q situé sur une droite contenue dans Q et qui rencontre $a+c$ en un point $f \neq e$. On peut supposer $f \neq a$, c par 5.5 et $x \neq f$ pour prouver que $\sigma(x) \in Q$. Considérons la variété linéaire à 3 dimensions V engendrée par a, b, c, x. Alors $V \cap Q$ est non-dégénérée (un point double devrait appartenir à $f+x$ et $V \cap Q$ contiendrait deux plans ce qui permet de se ramener au cas 5.5 où x est sur une droite de Q passant par a). En outre $V \cap Q$ est réglée. On montre facilement que tout point de $V \cap Q$ appartient à deux droites de Q exactement et de ce fait on peut utiliser des résultats classiques ([2] Chap. 18) pour affirmer que le corp de base est commutatif et que $V \cap Q$ est une quadrique. Dans V il existe une perspectivité σ' de centre p et d'axe $V \cap (Q_{ab} + Q_{cd})$ qui applique a sur b et conserve $V \cap Q$. Il est clair que la restriction de σ à V coïncide avec σ', donc $\sigma(x) \in Q$.

5.7. De 5.6 on déduit que σ applique b sur a, donc par 5.5, σ applique Q_b sur Q_a.

5.8. Il reste à prouver qu'un point $x \in Q$ situé sur une droite qui est contenue dans Q et qui rencontre $a+c$ en e est encore appliquée dans Q par σ. On peut supposer que x n'appartient pas à $Q_{ab} + Q_{cd}$ sinon $x = \sigma(x)$. Il existe un point $e' \in Q_{ab} \cup Q_{cd}$ tel que $e' \in Q$ et $x + e'$ n'est pas une droite de Q, sinon l'hyperplan tangent Q_x contient Q_{ab} et Q_{cd}, ce qui est exclu du fait que x n'est pas double et qu'il n'est pas contenu dans l'hyperplan $Q_{ab} + Q_{cd}$. On pourra supposer que $e' \in Q_{ab}$. Par x passe une droite $x + a'$ contenue dans Q qui rencontre $a + e'$ en a'. On a $a' \neq e'$ et on peut supposer $a' \neq a$ sinon on est ramené à 5.5. Considérons la perspectivité $\sigma_1 = \sigma(Q, p, a, b, a', b')$ où b' est le point $(p + a') \cap (e' + b)$. Le cas 5.6 s'applique à σ_1 donc $\sigma_1(x) \in Q$. Comme σ et σ_1 permutent Q_a et Q_b par 5.7, $\sigma \cdot \sigma_1$ est la permutation identique et $\sigma = \sigma_1$.

6. Perspectives de généralisations

6.1. On peut conjecturer que les résultats prouvés ci-dessus demeurent valable en dimension infinie.

6.2. On peut encore conjecturer que l'hypothèse selon laquelle P est arguésien, dans le théorème 1, est superflue.

Si P est un plan de Moufang, la démonstration donnée en 4.5 se laisse facilement adapter.

6.3. Les techniques utilisées ci-dessus s'étendent sans trop de difficultés à l'étude des «quadriques hermitiennes» c'est-à-dire des ensembles de points absolus d'une polarité dans un espace arguésien. La condition (i) de 1.3 est bien entendu perdue; par contre, (ii) demeure valable. Nous reviendrons sur cette généralisation ailleurs.

6.4. On peut tenter d'étendre l'étude précédente aux variétés algébriques et d'abord aux courbes de degré 3 auxquelles nous nous limiterons en ce moment. Diverses difficultés surgissent. Par exemple, que faut-il appeler tangente? La réponse est simple si on se limite à des courbes sur un corps algébriquement fermé: une tangente sera une droite qui rencontre Q en un ou deux points ou qui est contenue dans Q. Dans ces conditions 1.3 (ii) sera préservée. Si t est une tangente contenant deux points a, b de Q, comment décider si t est tangente en a ou b? Il semble nécessaire d'adopter un départ plus contraignant dans ce genre d'étude: par exemple se donner un ensemble de points et, pour tout point p, une famille de droites appelées tangentes en p qui seront soumises à diverses conditions.

6.5. Considérons une généralisation des ensembles quadratiques définie comme suit. Un *Q-ensemble* d'un espace projectif P sera un ensemble de points qui vérifie la condition 1.3 (i) et la condition (ii)'; pour tout point $p \in Q$, l'ensemble Q_p des tangentes à Q passant par p, est une variété linéaire de P. Un point double de Q est encore un point p tel que $Q_p = P$. On vérifie sans peine que les propositions 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 s'étendent aux Q-ensembles. De ce fait, la détermination des Q-ensembles est ramenée à celle des Q-ensembles sans points doubles. Tous les Q-ensembles finis non dégénérés sont déterminés par le théorème suivant.

Théorème. *Soit P un espace projectif fini de dimension $n \geqq 2$ et d'ordre k et Q un Q-ensemble non dégénéré de P. Alors Q est un ensemble quadratique sauf exception. Les exceptions sont:*

a) *$k=2$ et Q est le complémentaire d'un hyperplan ou le complémentaire d'un hyperplan et d'un point;*

b) *$n=2$ et Q est la réunion d'un ensemble quadratique sans points doubles Q' et d'un point commun à toutes les tangentes de Q'.*

Démonstration. 1) Si $n=2$ et Q n'est pas un ensemble quadratique il existe un point $p \in Q$ qui n'est sur aucune tangente. Donc toute droite passant par p contient exactement deux points de Q et Q est de cardinal $k+2$. Q ne contient aucune droite, sinon Q serait la réunion d'une droite et d'un point ce qui est visiblement impossible. Donc $Q_p = \{p\}$ pour tout $p \in Q$ et $Q - \{p\}$ est un ensemble quadratique Q' dont toutes les tangentes passent par p.

2) Pour tout p, q appartenant à Q on a $\dim Q_p = \dim Q_q$. Il suffit de prouver que Q_p et Q_q ont même cardinal. Si la droite $p+q$ n'est pas contenue dans Q et si D est une tangente en p, le plan $D+q$ contient une seule tangente D' passant par q car $(D+q) \cap Q$ est un ensemble quadratique.

(Si cette section plane n'a pas de point double, cela résulte de 1) et si elle a un point double, cela résulte d'un raisonnement fort simple.) Il est clair que l'application $D \to D'$ établit une correspondance biunivoque entre l'ensemble des tangentes par p et l'ensemble des tangentes par q. Si $p+q$ est contenue dans Q il suffit de montrer qu'il existe un point r de Q tel que $p+r$ et $q+r$ ne soient pas contenus dans Q. L'hypothèse contraire obligerait toute sécante par p, à couper Q_q en un point de Q et Q_q serait au moins un hyperplan contenu dans Q puisque p n'est pas double. De ce fait Q serait dégénéré.

3) Dorénavant nous supposons toujours que Q n'est pas un ensemble quadratique et que $n>2$. Grâce à 2) tout point $p\in Q$ est dans un plan Π ne contenant aucune tangente de Q.

4) Si $\dim Q_p \geqq 1$, il existe une tangente à Q non contenue dans Q. En effet, si D est une droite contenue dans Q et $p\in D$, soit Π un plan passant par p et ne contenant aucune tangente à Q. Alors $\Pi\cap Q$ est un Q-ensemble sans tangentes car il n'a aucun point double et on peut appliquer 2). Par tout $q\in\Pi\cap Q$ passe une et une seule droite de $(\Pi+D)\cap Q$ et ces droites se coupent deux à deux. Il en résulte que $(\Pi+D)\cap Q$ possède un point double et par ce point passe visiblement une tangente non contenue dans Q, sinon on aurait $Q=P$ et Q serait un ensemble quadratique.

5) On a $k=2$. Considérons d'abord le cas où $n=3$. Alors $\dim Q_p=0$ ou 1 pour tout $p\in Q$. Si $\dim Q_p=1$, toutes les tangentes passent par un même point a en vertu de 1) car elles se coupent deux à deux et ne sont pas coplanaires. Le point a ne peut appartenir à Q car il serait double. La réunion de Q et de $\{a\}$ est un Q-ensemble Q' dépourvu de tangentes.

Il y a k^2+k+2 points dans Q'. Le nombre de plans de P qui contiennent trois points de Q' est $(k^2+k+2)\,(k^2+k+1)\,(k^2+k)/(k+2)\,(k+1)\,k$ d'où on déduit que $k+2$ divise 12 et que $k=2$, 4 ou 10. Mais $k=10$ est impossible si $n=3$. Si $k=4$, il y a 77 plans qui coupent Q' et 8 qui sont disjoints de Q'. Il y a 22 points dans Q'. Soit D une droite qui est disjointe de Q'. Tout plan contenant D et qui rencontre Q' contient 6 points de Q'. Donc 6 devrait diviser 22 et on a $k=2$. Le cas où $n=3$ et $\dim Q_p=0$ se traite de la même manière, Q' n'étant autre que Q. En passant, on pourra rapprocher l'impossibilité prouvée ci-dessus pour $k=4$, de l'existence d'un système de Steiner de 22 points, ayant 77 blocs de 6 points tels que tout triple soit contenu dans un et un seul bloc.

Le cas où $n>3$ se traite plus rapidement. Il résulte de 4) et 3) qu'il existe une variété linéaire à trois dimensions V passant par un point $p\in Q$, telle que $\dim(V\cap Q)_p \leqq 1$ et telle que V ne contienne aucune droite passant par p. Alors $V\cap Q$ est non dégénérée et on peut appliquer le cas $n=3$ pour conclure.

6) Si a, p, q sont des points non alignés tels que $p, q\in Q$, $p+q$ n'est pas contenue dans Q et $a\in Q_p\cap Q_q$ on a $a\in Q_x$ pour tout $x\in Q$.

La propriété s'établit par induction sur la dimension n de P.

Si $n=3$ la propriété a été explicitée en 5).

Si $n\geqq 3$, supposons qu'il existe un hyperplan H contenant p, q, x et ne contenant pas Q_p. Alors $H\cap Q$ est un Q-ensemble, $(H\cap Q)_p=H\cap Q_p$ n'est pas un hyperplan de H et de ce fait $H\cap Q$ n'est pas un ensemble quadratique et n'est pas dégénéré (H ne peut être tangent en aucun point de Q en vertu de nos hypothèses). L'hypothèse d'induction permet d'achever dans ce cas.

S'il n'existe aucun hyperplan tel que H ci-dessus, Q_p est contenu dans le plan $p+q+x$ et comme $p+q$ n'est pas dans Q_p on a $\dim Q_p=1$. Dans ce cas on montre à nouveau par 1) que toutes les tangentes se coupent deux à deux et passent de ce fait par un même point.

7) Q ne contient aucune droite. Sinon on pourrait réaliser les hypothèses de 6) ci-dessus avec la condition supplémentaire $a \in Q$ et a serait un point double.

8) On a $\dim Q_p < 1$ pour tout $p \in Q$. Supposons le contraire et soient $p, q \in Q$. La droite $p+q$ n'est pas contenue dans Q. Alors 1) et 6) permettent d'affirmer qu'il existe au moins une droite D telle que Q_x contient D pour tout $x \in Q$. Soit V la variété linéaire à 3 dimensions $D+p+q$. Alors $V \cap Q$ est un ensemble quadratique car $\dim (V \cap Q)_y = 2$ pour tout $y \in V \cap Q$. Comme Q ne contient aucune droite, $V \cap Q$ est un ovoïde dont tous les plans tangents passent par D. Il est bien connu que ceci est impossible.

9) Si $\dim Q_p = 0$, $P-Q$ est un hyperplan. C'est visiblement une variété linéaire du fait que $k=2$ et toute droite rencontre cet ensemble.

10) Si $\dim Q_p = 1$, les tangentes à Q passent par un même point a. On s'assure que $Q' = Q \cup \{a\}$ est encore un Q-ensemble. A présent Q' est le complémentaire d'un hyperplan grâce à 9) et la démonstration du théorème est achevée.

Bibliographie

1. Buekenhout, F.: Etude intrinsèque des ovales. Rend. Mat. **25**, 1–61 (1966).
2. Segre, B.: Lectures on modern geometry. Rome: Ed. Cremonese 1961.
3. Tits, J.: Ovoïdes à translations. Rend. Mat. **21**, 37–59 (1962).
4. – Ovoïdes et groupes de Suzuki. Archiv d. Math. **13**, 187–198 (1962).
5. – Géométries polyédriques finies. Rend. Mat. **23**, 156–165 (1964).
6. Veldkamp, F.: Polar geometry. Proc. Kon. Ned. Akad. A. 62. Indag Math. **21**, 512–551 (1959).

Dr. F. Buekenhout
Institut de Mathématique
Université Libre de Bruxelles
Bruxelles 5, Belgique

(Reçu le 19 Octobre 1968)