Les démonstrations : une vision génétique et en spirale

Francis Buekenhout
Université libre de Bruxelles

1. Introduction

1.1. D'abord des références (mais pas toutes)

Voici quelques livres qui m'ont longuement ou brièvement inspiré et qu'il me semble intéressant de faire circuler. Ce n'est pas à proprement parler la bibliographie de mon exposé et encore moins celle de mon sujet. L'ordre adopté est aléatoire.

- Imre Lakatos. 1976. Proofs and refutations. The logic of mathematical discovery. Cambridge University Press.

  Un grand classique. Passionnant. Le dialogue des arguments et des définitions qui s'adaptent pour que les démonstrations fonctionnent. En filigrane, une belle histoire des polyèdres. Tout à fait dans l'esprit "génétique et en spirale". Existe en traduction française (référence*).

- Lee V. Stiff et Frances R. Curcio (éditeurs). 1999. Developing mathematical reasoning in Grades K-12. 1999 Yearbook. National Council of Teachers of Mathematics.

  Un livre qui tombe bien à propos et qui couvre le raisonnement de 5 à 17 ans. Constitué d'articles indépendants élaborés pour la plupart par des professeurs ayant fonctionné sur le terrain. D'une richesse considérable. Notamment par la foule de références qu'il sera cependant difficile de réunir chez nous.

- Daniel J. Velleman. 1994. How to prove it. A structural approach. Cambridge University Press.

  Un cours pour apprendre à démontrer. Au niveau de la fin du secondaire et du supérieur. Met l'accent sur le fait qu'une démonstration, tout comme un programme informatique, possède une structure qu'il est possible et utile de faire apparaître dans son exposé.

- André Antibi. 1988. Étude sur l'enseignement de méthodes de démonstration. Enseignement de la notion de limite : réflexions, propositions. Thèse du Doctorat d'État. IREM de Toulouse.

  Très intéressant. Concerne l'enseignement des démonstrations pour un large public d'élèves et étudiants à la fin du secondaire et au début du supérieur.

  Merci à Alfred Warbecq qui me l'a fait découvrir.

- Commission Inter-Irem "Histoire et épistémologie des mathématiques". 1989. La démonstration mathématique dans l'histoire. IREM de Besançon et IREM de Lyon.

  Un livre essentiel par la richesse de la documentation historique analysée en 1ère main par de nombreux auteurs et par la pertinence de la réflexion. Avec, en tête d'affiche, notre Nicolas Rouche et sa conclusion qui vaut le détour génétique et en spirale, citée plus loin dans le présent texte.

- A.G. Hamilton. Logic for mathematicians. 1978. Cambridge University Press.

  Très clair et abordable. Pour l'enseignement supérieur.

- Harold P. Fawcett. 1938. The nature of proof. A description and evaluation of certain procedures used in a senior high school to develop an understanding of the nature of proof. National Council of Teachers of Mathematics.

  Un livre bien intéressant élaboré sur le terrain et qui a mon âge. Toujours disponible au NCTM et pas cher.

- Roger B. Nelsen. 1993. Proofs without words. Exercises in visual thinking. Mathematical Association of America.

  Un "must" ... Les démonstrations par l'image et sans texte. Il y a un deuxième volume que je ne possède pas.

- Pour la Science. 1990. La mathématique des jeux. Belin. Paris.

  Passionnant. Pour nous rappeler que la logique, le raisonnement et les démonstrations peuvent s'exercer très simplement à l'occasion de jeux que tous les enfants pratiquent à l'insu de leurs profs pendant les vacances et les jours de pluie.

- Martine Cnudde et Georges Delande. 1992. Apprendre à démontrer au cours de géométrie. 200 exercices résolus à l'usage des degrés d'observation et de transition de l'enseignement secondaire et des écoles normales. Éditions Erasme.

  Cocorico ! C'est du belge et du bon. Un livre conçu sur le terrain de nos classes avec un bon équilibre tenant compte des possibilités d'adolescents et des nécessités de la rigueur. Un outil utilisable aujourd'hui et trop peu connu. Usage direct possible dans les classes malgré l'apparition de nouveaux programmes entretemps.

- Monique Parker. 1994. Plaidoyer pour une logique informelle. Math. Péda. 95, 53-64.

  D'accord, ceci n'est pas un livre mais c'est la faute à Magritte. Un petit article qui peut rendre bien des services. La logique fut longtemps formelle dans son enseignement. Il importe qu'elle se transmette et se constitue chez l'élève de manière informelle.

- Michel Demal. 1998. Géométrie des transformations à l'école primaire. CREM, Nivelles.

  Pas un livre, mais un texte fondamental pour notre sujet dans lequel l'auteur expose en 30 pages les traits essentiels de l'enseignement qu'il a développé avec des collaboratrices pour de nombreuses classes de la 1ère à la 6ème primaire et ce depuis environ 15 ans.

1.2. Les mathématiques traversent un âge d'or.

C'est le constat d'un des grands mathématiciens de Belgique actuels : Pierre van Moerbeke, professeur à l'UCL que j'ai entendu sur ce sujet il y a quelques années.

Ce constat est largement partagé. Des grands résultats spectaculaires "tombent" régulièrement et ce mouvement s'accélère. Il suffit de penser dans le désordre au théorème de Fermat, à la classification des groupes simples finis, aux théorèmes de Gödel, au théorème des 4 couleurs, à la conjecture de Kepler et à une foule d'autres résultats. Il ne serait pas hasardeux d'élaborer une liste prestigieuse comprenant au moins un grand résultat par an depuis 1900. L'expliquer serait autre chose.

Et ce siècle aura vu la naissance de l'informatique, science nouvelle et véritable rouleau compresseur. Science mathématique ?! Il aura vu aussi la naissance et le développement de la Recherche Opérationnelle, la discipline strictement mathématique possédant le plus d'applications avec la Statistique.

Dans cette explosion, la démonstration occupe une place centrale, incontournable, omniprésente. Elle figure parmi l'essentiel des mathématiques. Avec les concepts ! Et avec quelques aspects que je ne cherche pas à cerner ici. La démonstration est la grande méthode d'investigation par excellence des mathématiques.

A vrai dire, l'informatique a fait exploser en mathématique une autre méthode scientifique essentielle qui est l'expérimentation, pratiquée depuis toujours mais aujourd'hui accessible à grande échelle. De plus, elle intervient de manière spectaculaire et massive dans une foule de démonstrations. Peut-on vraiment parler d'un théorème des 4 couleurs ? Du théorème de Hales (1998) prouvant la conjecture de Kepler ? On peut voir dans l'avènement de l'outil informatique dans la mathématique, l'annonce d'un nouvel âge d'or selon les uns et de l'apocalypse selon d'autres. Ce n'est pas l'objet de mon exposé.

La démonstration quant à elle, s'est fortifiée. Elle a permis d'établir plus solidement et souvent de dépasser de nombreux résultats du passé. Prenant sans cesse plus de confiance, des individus ou des collectifs ont élaboré des démonstrations de plus en plus longues et de plus en plus difficiles. Les dizaines de pages sont une banalité et il n'est pas rare de se trouver dans les centaines voire plus. La classification des groupes simples finis, un monstre évalué à 15.000 pages par D. Gorenstein, le "prophète" de cette croisade, est soumise depuis quelques années à une révision, à une preuve de deuxième génération qui fera baisser le nombre de pages à 5000 environ dans quelques années. Il existe d'importants développements de troisième génération. On apprendra à évaluer les longueurs de démonstrations en termes plus fins qu'un nombre de pages.

1.3. Une invention des Grecs.

L'usage écrit explicite et systématique des démonstrations apparaît dans l'Antiquité Grecque. De manière précise, elle éclate soudain dans les Éléments d'Euclide et dans d'autres oeuvres de ce mathématicien, vers

- 300 pour autant que nous puissions en juger fidèlement sur base de textes parvenus jusqu'à nous.

Des travaux récents de Karine Chemla (CNRS, Paris) montrent que des démonstrations écrites explicites apparaissent également (de manière supposée indépendante du courant grec) dans les travaux du grand mathématicien chinois Liu Hui (vers +260).

Par ailleurs, il me semble qu'un large consensus se dégage pour penser que des travaux mathématiques plus anciens que nous possédons par écrit ou non, ont donné lieu à des démonstrations transmises par voie orale ou non explicitées. C'est une donnée à manier prudemment mais d'une importance cruciale pour mon sujet à savoir le développement d'une conception génétique des démonstrations. Il existe des travaux permettant de concevoir, prudemment je le répète, une préhistoire des démonstrations. L'essentiel ici est de noter que ce point de vue requiert effectivement une conception non figée de ce qu'est une démonstration.

1.4. Quand y a-t-il démonstration?

Dès qu'il y a un raisonnement déductif. Un seul suffit. Au point de vue génétique et au point de vue de la logique mathématique.

1.5. Le point de vue génétique

Il est basé sur l'idée que les notions mathématiques naissent et qu'elles évoluent tant dans l'histoire de l'humanité que dans celle des individus. Que leur naissance est précédée d'une gestation. Qu'il importe de retracer et de comprendre les étapes de cette évolution afin d'aider tous les intéressés dans leur maîtrise progressive des notions. Qu'il faut cesser de considérer les mathémaiques et les démonstrations comme des produits achevés et figés.

1.6. Les démonstrations pour tous ?

En ce qui concerne les mathématiques et les démonstrations en particulier, je vois d'ici l'ironique objection muette ou non de quelques-uns.

Bravo pour l'âge d'or des mathématiques mais l'élève moyen ne deviendra pas un mathématicien. Et le professeur quant à lui manque de temps pour quitter des rails déjà bien difficiles à suivre.

Ma conviction est qu'un enseignement génétique des démonstrations, c'est-à-dire un souci pour le raisonnement déductif est accessible dès le plus jeune âge et tout simplement indispensable à tous. Raisonner sans aucun doute, chacun conviendra que c'est nécessaire. Mais raisonner déductivement ? C'est moins visible je le conçois mais je répète ma conviction et je vais tenter d'en éclairer les motifs.

1.7. Léonard de Vinci (1452-1519)

Un des plus grands hommes de tous les temps. Pas tellement reconnu comme mathématicien ce qui est dommage à mon sens. J'en livre une citation très forte. Elle est de deuxième main et j'aimerais la vérifier. Elle provient du "Trattato della pittura" (année ?).

"Aucune occupation de l'esprit humain ne peut s'appeler une science vraie si elle ne procède pas par des démonstrations (preuves ?) mathématiques."

Il ne fait aucun doute que la déduction participe des sciences et des techniques. Déterminer le moment et les circonstances de l'éclipse solaire du 11 août 1999 dans nos régions relève notamment de la déduction. C'est un exploit devenu banal pour les astronomes. Et reconnu par tous. A comparer avec des élucubrations foireuses et méprisables dont les médias se font tristement l'écho. Gérer les ressources alimentaires journalières d'une population de plusieurs millions de personnes exige une prévision précise et particulièrement complexe à laquelle la déduction participe. Le diagnostic médical n'est pas exclusivement déductif mais la déduction y participe de manière importante. Former longuement un futur médecin à la déduction n'est certainement pas un luxe.

1.8. La vie de tous les jours (Août 1999)

Vécu sur la route des vacances, en Suisse, dans un hôtel. "Chaque coupon donne droit, dans le cadre d'un séjour (à partir d'une nuit), à un cocktail sans alcool par personne et par chambre." Quel était donc le sens du mot "et" ? Pour ma part, je n'ai pas osé déduire de cet énoncé que ma femme et moi aurions droit chacun à un cocktail. Nous l'avons eu sans discussion. J'ai renoncé à écrire cet énoncé avec des quantificateurs.

1.9. Faut-il encore habituer nos élèves à démontrer ?

C'est la première question posée par le comité d'organisation du Congrès. Comment douter de la réponse, de ma réponse ? Pourtant le doute existe. Et je crains que les démonstrations ne soient largement en voie d'évacuation ou déjà évacuées. J'espère me tromper. Sinon, les irréductibles iront se réfugier à Mons sous la conduite de Michel Demal qui anime déjà la résistance avec des enfants et d'autres.

1.10. Le message de Michel Demal.

C'est difficile les démonstrations ? Bien sûr. Faut-il évacuer pour autant ? Si c'est essentiel, ce que je crois, il faut travailler pour faciliter.

Il y a de bons exemples. Demal et des collaborateurs en nombre non négligeable pratiquent la démonstration avec des enfants à partir de 6 ans et de manière systématique durant toute l'année scolaire de la 1ère à la 6ème primaire. Par des jeux, rien que des jeux. Mathématiques. Inventés et créés pour la géométrie. C'est une expérience déjà riche et à vrai dire incroyable. Mais vraie. Il faut forcément adopter une vision génétique des démonstrations. Et la développer en spirale. Il y faut autant de patience que dans l'apprentissage de la natation. Au moins une séance par semaine, avec obstination, sans jamais douter du résultat final, sans se décourager. Sur base d'une analyse fine de tous les enchaînements. En se disant bien que rien n'est donné dans les têtes. Demal dit que rien n'est gratuit mais que tout peut et doit être expliqué et enseigné. Par "petites démonstrations" successives, élaborées ensemble avec la participation de tous, discutées en petits groupes, avec du matériel, sans rechercher la rédaction formelle mais en mettant progressivement la logique en place. En jouant. La stratégie de développement de Michel Demal est basée sur quatre spirales entrelacées :

- la spirale des objets (ou formes) géométriques;
- la spirale des transformations;
- la spirale de la logique formelle;
- la spirale de la méthode scientifique.

Les enfants y prennent beaucoup de plaisir. L'enjeu est de taille. Il s'agit ni plus ni moins de mieux raisonner. Ce n'est pas l'apanage des mathématiciens. C'est vital dans un monde scientifique et technique de plus en plus complexe. Bronzer ? Oui. Mais pour combien de temps. Réfléchir et raisonner correctement, c'est pour la vie.

1.11. Que pense la base de tout ceci ?

Y croit-elle ? Est-elle motivée par la perspective qu'offrent les démonstrations ? La loi du moindre effort n'est-elle pas de mise ?

Avant de conclure sur l'état de la base, un "petit sondage" pourrait nous éclairer. Pour bien faire, il faudrait évidemment le conduire sur une plus grande échelle et dans des conditions plus efficaces. La SBPM est-elle armée pour le faire ?

2. Sondage sur les démonstrations

Question 1. Votre expérience la plus avancée avec des démonstrations au cours de vos études (entourer ce qui convient) :
Humanités. École normale (instituteur). Régendat. Licence. Doctorat.

Question 2. Votre position personnelle vis-à-vis des démonstrations, indépendamment de cours suivis ou à donner :
Vous aimez ça : OUI, NON, ABS.

Question 3. En tant que professeur, futur professeur, ancien professeur vous estimez qu'il faut :
- donner des démonstrations : OUI, NON, ABS;
- faire apprendre des démonstrations : OUI, NON, ABS;
- faire vérifier des démonstrations : OUI, NON, ABS;
- faire chercher des démonstrations : OUI, NON, ABS.

Question 4. Pour vous, il n'y a pas de mathématiques sans démonstrations. OUI, NON, ABS.

Question 5. Une démonstration peut-être élaborée et communiquée par une succession d'images (un film) sans texte et sans commentaire. OUI, NON, ABS.

Question 6. Une démonstration peut consister en un dessin unique. OUI, NON, ABS.

Question 7. Des démonstrations ont existé avant l'invention de l'écriture. OUI, NON, ABS.

Question 8. Des démonstrations sont possibles à l'école primaire. OUI, NON, ABS.

Question 9. Des démonstrations sont indispensables à l'école primaire. OUI, NON, ABS.

3. Le cas de Sir Christopher Zeeman

(d'après une interview parue dans "European Mathematical Society Newsletter", 30, 1998, 14-19).

Zeeman est anglais et c'est un cas ! Ce n'est ni un chanteur populaire, ni un joueur de football transféré pour quinze millions de livres, ni un magnat de la presse, ni un grand propriétaire terrien et il ne s'est pas jeté du haut de la Tour de Londres en étant retenu seulement par les bretelles. Un mathématicien. Et anobli par la reine. Rien à voir avec les démonstrations ? Patience. En 1978, il est invité par la "Royal Institution" à faire des "Christmas Lectures" pour des enfants. L'événement sera couvert par la télévision (BBC) et fera l'objet de six heures d'émission durant des heures de grande audience. Durant les mois précédents, le dialogue s'engage entre Zeeman et la BBC.

Zeeman : "Les mathématiques sont une histoire de théorèmes et de démonstrations."

BBC : "Oh mais nous ne pouvons pas vous avoir devant un tableau et tournant le dos à la caméra."

Zeeman : "C'est OK. Dans ce cas, j'utiliserai un rétroprojecteur et je ferai face au public."

BBC : "Non non. Ce serait trop comme une salle de classe. Vous ne comprenez pas. Voyez-vous, le but de la télévision est de divertir."

Zeeman : "Oh oui, les démonstrations peuvent être très divertissantes et inspirantes et belles."

BBC : "Nous vous conseillons fermement de ne donner aucune démonstration."

Zeeman : "J'insiste pour donner des démonstrations."

BBC : "Nous vous défendons de donner des démonstrations."

Zeeman : "Bien, vous pouvez vous jeter dans le fleuve car je suis payé par la Royal Institution pour faire des cours à des jeunes gens et vous n'êtes pas forcés de le retransmettre si vous ne le voulez pas."

BBC : "Très bien, vous gagnez. Montrez-nous vos démonstrations."

Les leçons eurent beaucoup de succès.

4. Philosophie des démonstrations.

4.1. Une des grandes difficultés

Une des grandes difficultés dans l'enseignement des démonstrations est qu'elles constituent une méthode d'étude et de découverte des mathématiques et pas un objet du moins dans la majeure partie de cette étude. De ce fait, elles demeurent souvent à l'arrière-plan même quand on est plongé dans...une démonstration. En l'absence du formalisme rituel qui les accompagne elles demeurent en quelque sorte invisibles.

Des étudiants de 2ème licence m'ont dit, en groupe, cette année, qu'ils ne sont guère entraînés à produire des démonstrations. Je leur ai dit que c'est vrai et faux à la fois. Ils ont cette pratique sans en prendre conscience. Quand elles sont explicitement présentes le sens des démonstrations échappe à une majorité de pratiquants faute d'être jamais analysé.

Dans deux manuels (de 2ème et 3ème secondaire) dont je suis coauteur, un chapitre entier s'appelait "démontrer" pour insister sur l'action plutôt que la contemplation.

Un point de vue différent, plus élevé, est précisément de considérer les démonstrations comme un objet d'étude et d'aborder leur sens. On entre alors dans la philosophie ou, ce que je ne tenterai pas, dans la théorie mathématique de la démonstration. Je me suis intéressé à la philosophie des démonstrations depuis les années 1960 quand, jeune diplômé, je me suis mis à réfléchir aux mathématiques donc à leur philosophie. J'ai lu beaucoup. J'ai collectionné des textes, rédigé moi-même, fait des exposés et j'ai constitué au fil du temps trois gros dossiers accompagnés de livres.

4.2. Surprise.

J'ai découvert avec une surprise naïve que ce thème est l'un des plus fréquentés de la philosophie mathématique. Plus surprenant encore. C'est un sujet très fréquenté de la didactique des mathématiques et de son histoire. J'ai compris peu à peu que je partageais la surprise de mes ancêtres et contemporains mathématiciens depuis l'invention-découverte de cet outil redoutable et redouté au sein de la Grèce Antique (Thalès).

Cette époque nous a notamment laissé les Éléments d'Euclide dans lesquels cette méthode est systématisée dans un ensemble structuré d'environ 450 Propositions (Théorèmes). Ce livre figure parmi les plus grands "best-sellers" de tous les temps. Malgré le slogan de Dieudonné: "A bas

Euclide", ce dernier tient bon et nous énerve souvent quand un collègue ne veut rien voir d'autre. Il faut le redire, l'histoire des démonstrations commence avec Euclide mais elle ne s'achève pas avec lui. En fait, il ne fait guère de doute que la démonstration est présente de manière implicite non-écrite dans les développements mathématiques écrits de cultures plus anciennes et pour ma part, je crois comme d'autres à une mathématique du néolithique mais ceci est une autre ... préhistoire.

Pour demeurer prudent, j'affirme donc que depuis Euclide au moins, la démonstration figure au centre de la science mathématique et qu'elle en constitue la méthode principale sinon unique. J'en profite pour signaler une thèse récente remarquable : Olivier Keller. 1998. Préhistoire de la géométrie : la gestation d'une science d'après les sources archéologiques et ethnographiques. Thèse de doctorat. Paris.

5. Comment enseigner les démonstrations ?

Et toujours plus de questions posées par les organisateurs du Congrès.

5.1. J'ai déjà répondu partiellement plus haut.

Comme la natation ! Dans l'eau. Chaque semaine pendant 5 ans. Comme la lecture ! Chaque ... jour. Dans les textes. Il faut habituer les moins de trois ans aux livres. Il faut qu'ils les aiment. Il faut habituer les moins de 5 ans au raisonnement et les moins de 10 ans aux enchaînements de raisonnements. Il faut qu'ils les aiment, qu'ils en perçoivent le pouvoir, leur pouvoir. Il faut, comme dans tout ce qui importe, une patience infinie, féliciter, corriger, critiquer gentiment et ... montrer l'exemple.

5.2. Mais comment ?

"De question en question" comme dit le GEM. L'enfant demande nécessairement "Pourquoi?". Il faut entretenir cette flamme. L'éducation l'étouffe trop souvent.

5.3. Mais encore ?

Il faut des jeux, toujours des jeux. Même chez les ados ? Bien sûr. C'est très sérieux de jouer mais il faut en percevoir la portée. Pas de fausse honte.

Cet enjeu semble faire son chemin. Jouer pour mieux raisonner. Les jeux ne manquent pas. Les manuels n'en comportent guère.

Mes coauteurs et moi avions naguère (vers 1980) pratiqué de la sorte. Sans être pris au sérieux je crois. Un bon jeu qui est trop difficile doit être simplifié. Par le prof. Sur le terrain. C'est indispensable. L'expérience fait retenir quels sont les meilleurs jeux : ceux qui accrochent, qui marchent et qui font progresser sur les spirales mathématiques qui sont le véritable but. On ne joue pas pour jouer mais pour avancer dans les programmes. Pour que les maths se fassent dans la joie. Je demeure prêt à animer une séance de ce genre pour un groupe d'élèves à partir de la 4ème.

5.4. Les démonstrations : à quel niveau ?

A tous les niveaux. A quel âge petit Louis a-t-il commis sa 1ère déduction ? Question essentielle. Je ne peux répondre. Certainement avant 6 ans. Avant la maternelle même. Et si ce n'est pas le cas ? Hélas, "tout se joue avant 6 ans" et ce n'est pas en 1ère candidature qu'il faut parler d'égalité des chances. C'est avant 3 ans.

Seulement, cette idée-là dérange tout le monde : les pédagogues, les enseignants, les politiciens et ... les victimes, parents et jeunes plus âgés. Les sciences cognitives font leur révolution. L'intelligence fait l'objet d'études étonnantes dans le monde vivant y compris les plantes.

Oserais-je dire pour autant que mon beau sapin raisonne (et que l'écho résonne ...) ? Non. Ce que j'essaie de dire est qu'il faut lutter contre deux slogans :

– on ne pourrait pas apprendre à démontrer avant l'âge de 13-14 ans;

– les démonstrations ne concernent qu'une élite (donc personne car il est curieusement devenu insultant d'être élitiste).

En revanche, il faut non seulement croire à l'extraordinaire potentiel cognitif de chacun (sauf handicap) mais le développer. C'est vital pour tous.

5.5. Les démonstrations sont-elles nécessaires ou superflues ?

Je crois avoir déjà répondu. Si la communauté des professeurs de mathématique de l'enseignement public est convaincue que les démonstrations sont superflues nous sommes mûrs pour trois conséquences. Un cours de maths lui-aussi superflu ou réduit à peu de choses, des cours-remèdes au début du supérieur (dont l'idée voire la nécessité émerge déjà) et ... un enseignement privé pour nantis. Voilà où conduirait une démagogie effrénée. Toute ressemblance avec un pays existant ou ayant existé serait purement fortuite.

5.6. A quel moment de la scolarité ?

J'ai répondu. Pour tous, toujours. Comme la lecture, l'écriture, le calcul, l'éducation physique ...
Surtout à l'école maternelle.
Surtout à l'école primaire.
Surtout à l'école secondaire.
Surtout dans la formation des professeurs.

5.7. Quand s'impose la démonstration ?

Chaque fois que se pose une question susceptible de progresser par le raisonnement. Et si la démarche n'aboutit pas ? C'est normal. Ne pas aboutir est la norme. Ce qui est extraordinaire, c'est qu'elle puisse aboutir avec les succès que l'on connaît. Le professeur, la maman expérimentés savent quand elle peut aboutir.

6. Le statut formel traditionnel des démonstrations.

6.1. Le stéréotype traditionnel

Le stéréotype traditionnel des démonstrations est dépassé complètement dans le sens où ce serait le seul cadre dans lequel se pratique la démonstration. C'est ce préjugé qui est dépassé. Le cadre traditionnel conserve néanmoins une grande valeur. Dans les mathématiques avancées qui se publient, il se pratique à grande échelle. Décrivons-le brièvement.

Tout commence par l'apparition du mot THÉORÉME qui est une sorte de signal. Il y a des synonymes tels que PROPOSITION ou LEMME. Le théorème comprend un ÉNONCÉ. C'est ce qu'on retient plus tard en vue de l'appliquer dans d'autres situations.

Dans l'énoncé on distingue deux parties.

La première est ce qu'on appelle l'HYPOTHESE qui peut comporter plusieurs propriétés. Ce sont les données. Ce qui s'y trouve peut-être considéré comme vrai dans tout le texte couvert par le théorème. C'est le point de départ d'une sorte d'excursion qui est la démonstration.

La deuxième partie est ce qu'on appelle la THESE. Elle peut comporter plusieurs propriétés. C'est le point d'arrivée assigné. Le but est de relier l'hypothèse à la thèse par une suite finie d'inférences (de déductions) dont les points d'arrivée successifs peuvent être considérés comme vrais du fait que l'hypothèse est vraie. A la fin, la thèse est vraie aussi.

Après l'énoncé du théorème, on va à la ligne et on écrit DÉMONSTRATION. Alors, l'excursion commence. Elle est basée sur un très petit nombre (trois) de règles simples gouvernant l'inférence à savoir le passage de certains énoncés vrais à d'autres qui le deviennent. Cette grammaire est bien la plus simple qu'on puisse concevoir. C'est la LOGIQUE FORMELLE codifiée depuis Aristote. La grande difficulté est rarement expliquée. Les hypothèses portent sur l'un ou l'autre concept. Il importe de savoir ce qu'il signifie. De quoi parle-t-on ? L'énoncé ne le dit pas. C'est supposé connu avant. Le plus souvent on est déjà censé connaître des propriétés vraies du concept vues auparavant. En vérité, l'hypothèse comporte une partie explicite et une partie cachée non explicite qui mobilise la connaissance, la mémoire et l'imagination. La FIN de la démonstration est marquée d'un signe distinctif tel que C.Q.F.D. ou, de plus en plus souvent aujourd'hui, d'un petit carré blanc.

6.2. La partie cachée

La partie cachée d'un texte démonstratif représente la difficulté majeure de la lecture ou de la recherche.

Un effort pédagogique en vue de la réduire et d'entraîner des élèves à la "démonstration pure" m'a amené à proposer la pratique démonstrative dans le cadre d'un jeu tel que le mastermind. Cela fonctionne très bien dans les classes. Mais l'idée n'a guère été suivie. Les détracteurs ont beau jeu : le but de l'enseignement mathématique n'est pas de jouer au mastermind. C'est un procès d'intention. Mon but était d'utiliser le mastermind pour apprendre ce qu'est une démonstration.

6.3. Les concepts.

J'ai déjà déclaré que les concepts occupent une place prépondérante en mathématique. Si on oublie les démonstrations, il peut demeurer les concepts. Quand on exerce l'oeil critique du 20ème siècle vis-à-vis d'un texte élémentaire du passé ou actuel, c'est presque toujours du côté de la précision et de la pertinence des définitions que se situent les difficultés. Les définitions doivent pouvoir être utilisées dans des démonstrations...

Voici un exemple qui m'est raconté par deux jeunes amis, l'un régent, l'autre licencié. Dans l'ouvrage comportant l'essentiel du cours de mathématique au premier degré dans une des meilleures écoles de Wallonie-Bruxelles on lit: "Un polyèdre est un solide ne pouvant jamais rouler quand on le dépose sur une table." J'ai bien compris. Exemple: une pomme.

6.4. L'expression.

Une autre difficulté bien connue est d'exprimer correctement ses idées au sein d'une démonstration. Et, dans un stade suivant, de les exprimer par écrit. Il n'y a pas d'activité qui invite davantage à une expression claire, précise et correcte. N'est-ce pas une formation cruciale dans notre société de communication ?

En résumé, j'estime qu'il ne faut pas jeter purement et simplement les démonstrations ainsi formalisées. Elles ne perdent rien de leur valeur proverbiale et millénaire qui a fait des Éléments d'Euclide un modèle universellement admiré et imité. Les professeurs qui sont satisfaits de cette activité doivent la poursuivre. Tous devraient l'apprendre au moins à titre personnel, s'y exercer et rédiger eux-mêmes. Pourquoi ? Parce qu'ils sont professeurs de mathématique et que la mathématique fonctionne comme ça.

7. Le point de vue génétique

7.1. Michel Demal :

"En logique, rien n'est donné, tout se construit". Tout se construit, longuement, patiemment, méthodiquement dès la petite enfance en misant sur l'extraordinaire potentiel cognitif sous-exploité. Le moteur : les questions. Notamment celles des enfants. La meilleure : "pourquoi"? On explique, on réfute et on argumente. Et au secondaire ? Pourquoi pas au minimum un chapitre spécifique de synthèse sur les démonstrations chaque année dans chaque classe ? La question qui doit encore agiter bien des professeurs est de cerner la nécessité de ce souci. A quoi ça sert ? Voici un grand témoignage d'une profondeur étonnante.

7.2. Le raisonnement plausible et G. POLYA.

La citation suivante fait partie d'un texte intitulé "Organisation du cours de Géométrie Analytique" que Jean Doyen et moi distribuons depuis une vingtaine d'années à la rentrée en 1ère candidature en sciences mathématiques et physiques à l'Université Libre de Bruxelles.

Nous déclarons d'abord : "Le raisonnement est évidemment au coeur de tous nos objectifs. Dans ce domaine capital, on se gardera d'adopter un point de vue étroit limitant le raisonnement à une suite de déductions logiques. Nous ne pouvons mieux faire ... que citer un texte magistral de G. POLYA emprunté à la préface de son livre "Les mathématiques et le raisonnement plausible. Gauthier-Villars, Paris 1958" traduit d'un livre en anglais paru en 1954."

Voici ce qu'écrit POLYA.

"Strictement parlant, toutes nos connaissances, en dehors des mathématiques et de la logique démonstrative (qui est, en fait, une branche des mathématiques), consistent en des hypothèses. Naturellement, il y a hypothèse et hypothèse. Il y a des hypothèses dignes de respect et de confiance comme celles qui sont exprimées par certaines lois générales des sciences physiques. Il y en a aussi qui ne sont dignes ni de confiance ni de respect et certaines d'entre elles sont irritantes quand on les rencontre dans la littérature. Entre ces extrêmes il y a toutes sortes d'hypothèses de types divers.
Nous assurons la validité de nos connaissances mathématiques par un **raisonnement démonstratif** tandis que nous justifions nos hypothèses par des **raisonnements plausibles.**
Une preuve mathématique est un exemple de raisonnement démonstratif, mais la preuve inductive du physicien, la preuve de l'homme de loi, fondée par exemple sur des indices de culpabilité, la preuve de l'historien, basée sur des documents, la preuve statistique de l'économiste appartiennent au raisonnement plausible. La différence entre ces deux types de raisonnement est grande et a des aspects multiples. Le raisonnement démonstratif est sûr, à l'abri des controverses et définitif. Le raisonnement plausible est hasardeux, il peut être controversé, il est provisoire. Le raisonnement

démonstratif pénètre les sciences aussi profondément que font les mathématiques mais tout comme les mathématiques, il est incapable, par lui-même, de conduire à des connaissances essentiellement nouvelles sur le monde qui nous entoure. Tout ce que nous apprenons de neuf sur ce monde implique l'intervention du raisonnement plausible, seul type de raisonnement dont nous fassions usage dans la vie courante. Le raisonnement démonstratif a des règles rigides, codifiées et clarifiées par la logique (formelle ou démonstrative) qui est la théorie du raisonnement démonstratif. Les règles du raisonnement plausible sont mouvantes et il n'en existe aucune théorie qu'on puisse comparer sous le rapport de la clarté, à la logique démonstrative ou pour laquelle un accord comparable puisse être réalisé.

Un autre point concernant ces deux espèces de raisonnement doit attirer notre attention. Chacun sait que les mathématiques offrent une occasion excellente d'apprendre le raisonnement démonstratif mais je prétends aussi qu'il n'existe aucun sujet, parmi les matières habituellement enseignées dans les écoles, qui puisse offrir une occasion comparable d'apprendre le raisonnement plausible. Et m'adressant à tous les étudiants que la chose intéresse, quel que soit leur degré de préparation, je leur dis: "Il faut certainement apprendre à démontrer, mais aussi **apprendre à deviner.** Cela peut sembler un peu paradoxal, aussi dois-je insister sur quelques points, afin d'éviter des malentendus possibles.

On considère les mathématiques comme constituant une science démonstrative. Mais ce n'est là qu'un de ses aspects. Les mathématiques achevées, présentées sous une forme définitive, paraissent purement démonstratives et ne comportent que des preuves. Mais les mathématiques en gestation ressemblent à toute autre connaissance humaine au même stade de développement. Vous devez deviner un théorème mathématique avant de le démontrer; vous devez deviner le principe général de la démonstration avant d'entrer dans les détails. Vous devez combiner les observations et vous fier à des analogies, vous devez essayer et essayer encore. Le résultat du travail créateur du mathématicien est un raisonnement démonstratif, une preuve; mais la preuve est découverte par un raisonnement plausible, elle est d'abord devinée. Si l'étude des mathématiques reflète, jusqu'à un certain point, les cheminements de la découverte, il faut y ménager une place pour l'art de deviner, pour l'inférence plausible.

Il y a, avons-nous dit, deux sortes de raisonnements, le raisonnement démonstratif et le raisonnement plausible. Permettez-moi de faire remarquer qu'ils ne sont pas contradictoires; au contraire, ils se complètent. Dans le raisonnement rigoureux, l'essentiel est de distinguer une preuve d'une présomption, une démonstration valable d'une tentative qui a échoué. Dans le raisonnement plausible, l'essentiel est de distinguer une présomption

d'une autre, une présomption plus raisonnable d'une présomption qui l'est moins. Si l'on songe attentivement à ces deux sortes de distinctions, elles deviennent plus claires l'une et l'autre. Un étudiant en mathématique vraiment sérieux, désireux de consacrer sa vie à cette discipline, doit apprendre le raisonnement démonstratif; c'est son métier et la marque distinctive de sa science. Mais s'il veut vraiment réussir, il doit aussi apprendre le raisonnement plausible; c'est de cette sorte de raisonnement que dépendra son travail créateur. L'étudiant moyen ou seulement amateur doit aussi goûter au raisonnement démonstratif: sans doute n'aura-t-il que rarement l'occasion de s'en servir directement, mais il doit acquérir un élément de comparaison qui puisse lui permettre de juger les prétendues preuves de toutes sortes qui lui seront offertes dans le monde où nous vivons actuellement. Par contre, dans tout ce qu'il entreprendra, il aura besoin du raisonnement plausible. De toute façon, un étudiant en mathématique ambitieux, quelles que puissent être ses préoccupations à venir, doit essayer d'apprendre les deux sortes de raisonnements, le raisonnement démonstratif et le raisonnement plausible.
Je ne pense pas qu'il existe une méthode absolument sûre pour apprendre à deviner. Au reste, si cette méthode existe, je ne la connais pas et je ne prétends certainement pas la décrire dans les pages qui vont suivre. L'utilisation efficace du raisonnement plausible est affaire de pratique, on l'apprend par l'imitation et l'habitude. J'essayerai de faire de mon mieux pour aider le lecteur désireux d'apprendre le raisonnement plausible, mais je ne peux lui offrir que des exemples à imiter et l'occasion de s'entraîner."

Un texte tellement admirable et profond qui est loin d'être assimilé par le milieu mathématique près de 50 ans plus tard. Il est peut-être possible de le commenter à la lumière d'acquis nouveaux mais c'est une autre histoire. Je me bornerai à signaler qu'à mon sens le raisonnement déductif conçu de manière génétique et le raisonnement plausible interfèrent dans beaucoup d'activités sans que le pratiquant cherche à les séparer.

7.3. Niveaux d'intensité de présence mathématique

Le point de vue génétique doit prendre en compte des niveaux de conscience et de mathématisation effective.

Selon R. Eglash dans African Fractals : Modern Computing and Indigenous Design, Rutgers University Press, 1999 (dont j'ai pris connaissance jusqu'ici par un résumé seul) on peut identifier un spectre de présence de mathématiques dans une culture. Des structures inconscientes (comme chez les abeilles) "ne comptent pas comme connaissances mathématiques, même si nous pouvons utiliser les mathématiques pour les décrire." Des structures intentionnelles, comme des plans de décoration, peuvent impliquer des mathématiques de manière implicite (comme dans une graduation) ou bien de manière explicite (comme dans des patrons ou des règles nommés), ou même comme des règles pour la manière de combiner des patrons (comme dans des mathématiques appliquées de sortes différentes). Finalement, les "mathématiques pures" comprennent des théories abstraites expliquant les raisons pour lesquelles les règles fonctionnent et comment trouver de nouveaux patrons.

Il est possible d'envisager des variations sur les idées d'Eglash. Les structures inconscientes me paraissent acceptables. Elles interfèrent sans aucun doute avec les autres niveaux au cours de l'activité. Par ailleurs, la notion de conscience dans divers organismes vivants fait l'objet de travaux en sciences cognitives qui peuvent surprendre nos points de vue traditionnels dans ce domaine. Les "mathématiques" des abeilles sont-elles vraiment inconscientes ? J'en doute. Je me réfère à "Pour la Science", Décembre 1988, n° Spécial sur "L'intelligence". Je serais donc personnellement plus nuancé que le résumé cité ci-dessus. Il n'empêche que l'idée de base d'Eglash est remarquablement éclairante. Les niveaux de conscience me semblent notamment bien adaptés à la psychologie de la démonstration.

8. Le développement en spirale

8.1. Le développement d'un enseignement en spirale

Le développement d'un enseignement en spirale est presque automatique dans ce sujet. La simple déduction doit se rencontrer très tôt chez le petit enfant qui en exprime le résultat. L'observateur-parent (bien entraîné) constate qu'il y a eu déduction. Elle demeure forcément inconsciente pour l'enfant. Ce stade survivra durant toute la vie. Il est poussé plus loin à certains moments, rendu conscient.

Pourquoi ? Pour le systématiser, pour le rendre plus performant. Le moteur nous l'avons déjà dit : poser des questions, toujours des questions. Il y a des étudiants à l'université qui lisent une page de syllabus sans se poser une seule question et qui poursuivent de la sorte.

Comment pourraient-ils réussir ? Il faut toujours lire en se posant des questions. Un raisonnement c'est bien. Un enchaînement de raisonnements c'est mieux. Le médecin qui effectue un diagnostic procède à la fois par déduction et par raisonnement plausible. Mais le fil de sa démarche est déductif. Souvent, le professeur ne demande que la réponse. Pour certaines questions, la bonne réponse est le signe d'un raisonnement probablement correct. Dans d'autres cas, le professeur demande une explication. Plus difficile encore, il demande une explication écrite. La critique personnelle, celle d'un groupe, celle d'un professeur s'exerce sur le résultat, sur l'explication orale, sur l'explication écrite. Elle s'exerce sur le sens des concepts utilisés. Le niveau de conscience augmente. La logique se creuse.

8.2. L'hypothèse et la démonstration

Il y a une spirale de l'hypothèse. Comment vient-elle ? Nous prenons de l'information. En écoutant, en touchant, en voyant, en lisant, en puisant dans notre mémoire. Nous la prenons de manière sélective compte tenu de nos besoins, compte tenu d'une question. Nous "lisons" en quelque sorte la "réalité" en l'interprétant. Nous stockons cette information en mémoire où elle rejoint parfois, souvent même, des informations "liées", de nature analogue ou "proche". Nous traitons ces informations et nous les modifions. Ainsi se constituent: question, données ou hypothèse et résultats qui s'adjoignent aux hypothèses à l'occasion de nouvelles questions.

Certains résultats permettent l'oubli effectif de nombreuses informations antérieures qu'ils permettent en fait de reconstituer facilement par un nouveau traitement si nécessaire. Ils permettent de ne pas encombrer la connaissance. C'est l'ébauche de ce qu'on appelle un théorème.

Nous oublions ces antécédents à l'exception d'une chaîne qui le justifie. C'est une démonstration.

D'autres choix de repères, de "théorèmes" sont possibles. Pour un "théorème" donné divers chemins ou "démonstrations" sont concevables. Tout ceci fonctionne en "réseau". La mathématique est un fait social. A l'usage, certains théorèmes et certaines démonstrations s'imposent par diverses qualités, comme des "chefs" en quelque sorte. Il est bien connu qu'une foule de problèmes de géométrie sont inabordables sans le théorème de Pythagore ou alors à un "prix" prohibitif.

La mémoire joue un rôle permanent. Elle accompagne la question, la prise d'information relevante, le traitement en vue de répondre à la question, la conservation du résultat, l'application à la "réalité" initiale, l'évaluation du résultat et son usage ultérieur. Elle est cruciale pour la constitution de "socles de compétences".

8.3. Résumé de techniques de démonstration

Ce qui suit est un remarquable précis de techniques qui peuvent être engagées progressivement et au fil des années dans l'apprentissage des démonstrations.

D'après Daniel J.Velleman. How to prove it. A structured approach. Cambridge U.P. 1994.

Pour démontrer une thèse de la forme:

1. P implique Q:
   (a) Supposer que P est vrai et démontrer Q.
   (b) Prouver la contraposée c'est-à-dire, supposer que Q est faux et démontrer que P est faux.
2. Non P:
   (a) Réexprimer comme une déclaration positive.
   (b) Utiliser une démonstration par l'absurde c'est-à-dire supposer que P est vrai et tenter d'atteindre une contradiction.
3. P et Q:
   Démontrer P et Q séparément. En d'autres termes, traiter P et Q comme des thèses séparées.
4. P ou Q:
   (a) Utiliser une démonstration par cas. Dans chaque cas, démontrer soit que P est vrai, soit que Q est vrai.
   (b) Supposer que P est faux et démontrer que Q est vrai, ou supposer que Q est faux et démontrer que P est vrai.
5. P est équivalent à Q:
   Démontrer que P implique Q et que Q implique P en s'inspirant de 1.
6. Pour tout x on a P(x):
   Soit x un objet arbitraire. Il faut démontrer que P(x) est vrai. Si la lettre x désigne déjà quelque chose dans la démonstration, il faut utiliser une autre lettre pour désigner l'objet arbitraire.
7. Il existe un x tel que P(x).
   Trouver une valeur de x pour laquelle P(x) est vrai et démontrer P(x) pour cette valeur de x.

8. Il existe un et un seul x tel que P(x).
   (a) Démontrer "Il existe un x tel que P(x)" (Existence) (voir 7.) et pour tout y et tout z tels que P(y) et P(z) il suit y=z. (Unicité).
   (b) Démontrer l'énoncé équivalent "Il existe x tel que P(x) et pour tout y, P(y) implique y=x".
9. Pour tout nombre naturel n, on a P(n):
   (a) Induction mathématique: démontrer P(0) (cas de base) et pour tout naturel n, si P(n) alors P(n+1) (étape d'induction).
   (b) Induction forte: Démontrer que pour tout naturel n, pour tout $k < n$, on a P(k) implique P(n).

Pour utiliser une donnée de la forme:

1. P implique Q:
   (a) Si on donne également que P est vrai ou si on peut démontrer que P est vrai, alors on peut conclure que Q est vrai.
   (b) Utiliser la contraposée: si on sait que Q est faux ou si on peut démontrer que Q est faux, on peut conclure que P est faux.
2. Non P:
   (a) Réexprimer comme un énoncé positif.
   (b) Dans une démonstration par l'absurde, on peut atteindre une contradiction en démontrant que P est vrai.
3. P et Q
   Traiter ceci comme deux données: P est vrai, et Q est vrai.
4. P ou Q:
   (a) Utiliser une démonstration par cas. Dans le premier, supposer que P est vrai et dans le deuxième, supposer que Q est vrai.
   (b) Si on sait que P est faux ou si on peut démontrer que P est faux, on peut conclure que Q est vrai. De même, si on sait que Q est faux ou qu'on peut le démontrer on peut en conclure que P est vrai.
5. P est équivalent à Q:
   Traiter ceci comme deux données: d'une part P implique Q et d'autre part, Q implique P.

6. Pour tout x on a P(x):
   On peut remplacer x par n'importe quelle valeur a et conclure que P(a) est vrai.

7. Il existe x tel que P(x) est vrai:
   On peut introduire dans la démonstration une nouvelle variable xo et supposer que P(xo) est vrai.

8. Il existe un et un seul x tel que P(x) est vrai.

   On peut introduire dans la démonstration une nouvelle variable xo et supposer que P(xo) est vrai. En

   outre, pour tout y pour lequel P(y) est vrai, il est vrai que y=xo.

Techniques qui peuvent être utilisées dans toute démonstration :

1. Une ou plusieurs démonstrations par l'absurde. On suppose la thèse fausse et on dérive une contradiction.
2. Démonstration par cas : on considère plusieurs cas exhaustifs ce qui signifie que tout possibilité est couverte par un des cas. On démontre la thèse dans chaque cas.

Remarques.

1. **Vive les démonstrations par l'absurde.** Bien des professeurs luttent contre les démonstrations par l'absurde. C'est une exigence inutile et même nuisible. Si je conjecture une thèse, il est prudent et sain de me demander ce qui arrive dans le cas où cette thèse serait fausse. **C'est une base essentielle de l'esprit critique.** Je crois que ... et si c'était faux ?
2. **Vive les divisions en cas fructueuses.** Bien des professeurs luttent contre les divisions en cas. Bien entendu, il ne faut pas diviser en neuf cas si trois suffisent. Mais si la division en neuf cas permet de conclure il s'agit bel et bien d'une victoire. Les démonstrations longues de nombreuses pages exigent souvent des divisions en cas successives. Il arrive plus d'une fois qu'une division en cas ayant permis la percée donne lieu plus tard à une preuve n'utilisant pas cette approche.

3. Au cours d'une démonstration par l'absurde, il peut arriver qu'un argument intermédiaire se fasse par l'absurde et ainsi de suite.

4. Tout ce qui précède manque d'exemples. C'est une synthèse.

5. Quelles sont les grandes règles de la logique régissant la déduction ?

   (a) Si P est vrai et que P implique Q alors Q est vrai.

   (b) Si P est faux alors "non P" est vrai.

   (c) Si P est vrai alors "non P" est faux.

Que Gödel me pardonne!

9. Et la rigueur ?

9.1. Génétique et en spirale !

La rigueur n'échappe pas à ces "lois". Elle a évolué dans le temps. Celle du 20ème siècle n'est pas celle d'Euclide et d'autres. On peut trouver et on a trouvé matière à améliorer la plupart des travaux antérieurs. Il n'est pas possible de pratiquer à l'école, la même rigueur que dans les mathématiques avancées.

Reprenant les thèses de Demal, j'affirme que la rigueur n'est ni donnée, ni gratuite, qu'elle se construit.

Le texte qui suit concerne divers aspects de notre exposé: l'aspect génétique et le développement en spirale. Il rappelle le rôle crucial du sens, un aspect que j'ai manqué d'expliciter. Il met justement l'accent sur une rigueur en étapes.

9.2. Des conclusions de Nicolas Rouche

D'après "Prouver : amener à l'évidence ou contrôler des implications ?" dans Commission Inter-Irem "Histoire et épistémologie des mathématiques". 1989. La démonstration mathématique dans l'histoire. IREM de Besançon et IREM de Lyon. "Que tirer pratiquement de tout ceci, et qui soit utile dans les classes ?" Trois idées nous paraissent surnager.

a) Prouver, démontrer ne sont pas choses bien définies, qui se laisseraient prendre dans une formule. Cela s'apprend par étapes, des étapes marquées chacune non seulement par un changement (le plus souvent un accroissement) de l'univers du sens, mais encore par une modification du rapport au sens, des modes d'accès à l'ensemble des référents. Il est sans doute inopportun d'aborder n'importe quelle étape prématurément, c'est-à-dire sans que le sens et donc la motivation suivent, et peut-être plus encore de sauter des étapes.

b) A chaque étape sa forme de rigueur, sur laquelle il faut insister. On peut se tromper de rigueur en forçant dans une étape déterminée la rigueur d'une étape plus avancée. Il y a des étapes anté-euclidiennes où la rigueur s'appuie sur des dessins bien faits, des gestes, ... Il faut y veiller et ne pas instaurer à ce moment la rigueur euclidienne, encore moins la rigueur hilbertienne.

c) Une source de méprise sur la rigueur et sur son appropriation à chaque étape de la formation mathématique semble bien être la conception assez répandue selon laquelle la démonstration serait univoquement définie et qu'en particulier elle exclurait le recours à toute donnée empirique. A cela s'ajoute qu'elle devrait être enseignée à partir d'un certain âge, et enfin qu'avant cet âge on trouverait surtout des intuitions et pas de rigueur. Or la rigueur est non seulement possible, mais s'impose à chaque stade : est-elle autre chose que le sérieux de la pensée ?

9.3. Une autre citation: Brandford (1913)

Je reprends ici une citation faite dans l'excellent modèle d'enseignement génétique offert par E. Wittmann, Géométrie élémentaire et réalité. Introduction à la pensée géométrique. Didier Hatier, Bruxelles, 1998 traduit de l'allemand par Charlotte Bouckaert et Micheline Citta-Vanthemsche. Le texte cité est dû à B. Brandford (1913).

"Je pense que c'est un fait que la grosse majorité des professeurs est fermement convaincue que les mathématiques se différencient des autres sciences, non pas tellement par leur degré de rigueur mais plutôt parce qu'une démonstration mathématique serait absolument rigoureuse, tandis qu'une autre démonstration ne serait qu'approximativement rigoureuse. Le tort causé par cette conviction à tous les niveaux de l'enseignement des mathématiques est, je crois, incalculable ... La perfection attribuée aux mathématiques et à la logique pour leur clarté est une vision qui repose sur une illusion, pas sur une réalité".

9.4. L'opinion de Jean Dieudonné

Comment ne pas citer ce grand mathématicien et historien des mathématiques qui a tant réfléchi aux aspects philosophiques du sujet. J'emprunte un extrait au livre "Pour l'honneur de l'esprit humain", 1987, Hachette, Paris dont bien d'autres pages seraient relevantes ici dans une version amplifiée. L'analyse très intéressante qui précède cette conclusion concerne les mathématiques avancées et mêmes achevées (jusqu'à rebondissement éventuel).

"Il est facile de conclure. Il ne peut y avoir de démonstration "rigoureuse" qu'au sein d'une théorie axiomatique, où objets et relations "primitives" ont été spécifiés, et les axiomes qui les relient énumérés de façon exhaustive; et si on ne tient pas compte des inadvertances ou négligences mentionnées en I) et II), cette condition nécessaire est aussi suffisante; "manque de rigueur" signifie exactement "manque de précision".

L'histoire corrobore cette affirmation dans tous les cas. Il n'y a jamais eu de controverse sur ce qu'est une démonstration "rigoureuse" en arithmétique; pas davantage en analyse après Weierstrass; pas davantage en topologie algébrique depuis 1950. Bien entendu, il n'est pas exclu que dans l'avenir, des mathématiciens veuillent développer une théorie sans la mettre sous forme axiomatique; jusqu'à ce qu'eux-mêmes ou d'autres arrivent à le faire, la théorie risquera d'être considérée comme "non rigoureuse" par la communauté mathématique".

10. Le point de vue constructiviste

Dans cet article, l'accent est souvent mis sur le fait que les notions mathématiques doivent être construites et sur le témoignage de Demal selon lequel c'est possible fort tôt pour les démonstrations. Le point de vue dit constructiviste est bien connu dans les sciences de l'éducation et je n'ai pas l'intention de le commenter longuement. La citation suivante va cependant dans ce sens. Je la trouve particulièrement éclairante. Elle est extraite d'une recension de livre parue dans les Notices de l'American Mathematical Society en May 1999. Le texte cité et traduit est dû à Ed. Dubinsky.

"Je voudrais proposer comme alternative une épistémologie constructiviste. Par constructivisme, je n'entends pas que les étudiants sont supposés découvrir les concepts mathématiques par eux-mêmes sans l'aide d'un professeur, bien que l'occasion pour les étudiants d'essayer de découvrir des idées mathématiques puisse être un outil pédagogique important, s'il est utilisé correctement. Ce que j'entends par ce terme est l'idée que

l'apprentissage des mathématiques requiert de l'individu qu'il construise des compréhensions mathématiques dans son propre esprit. Ceci peut se produire comme la conséquence d'expériences procurées dans une situation d'apprentissage et qui comprennent, mais ne sont pas restreintes à, des explications écoutées. Bien sûr, les compréhensions qu'un individu construit doivent être conséquentes avec les compréhensions tenues par des mathématiciens, mais elles ne peuvent être données par une personne à une autre. En fin de compte, elles doivent venir de l'apprenant, et l'enseignant ne peut donner que des occasions, des stimuli, et du soutien.
Le point d'un constructiviste, à l'opposé d'une épistémologie de la métaphore, est qu'il y a au moins l'espoir que si un apprentissage mathématique se produit en faisant des constructions mentales, nous pouvons essayer de trouver ce que ces constructions peuvent être et nous pouvons rechercher des moyens spécifiques (tels que l'écriture de programmes informatiques, le travail sur des tâches en groupes, l'écriture d'essais, etc.) pour aider les étudiants à faire des constructions spécifiques. Il y a en fait une quantité considérable de travail effectué le long de ces lignes, mais ceci est la matière d'une autre histoire".

11. Fausses démonstrations

On connaît beaucoup de démonstrations volontairement fausses non pas pour tromper le lecteur naïf mais pour développer son esprit critique ce qui est un des buts de l'enseignement de la démonstration et du reste des mathématiques. Chacun a rencontré un exemple: on montre que 1 est le plus grand nombre naturel, que tous les triangles sont isocèles, que $2 = -2$, que tous les points du plan sont alignés, etc. Il existe un livre classique reprenant exclusivement des situations de ce genre : E. A. Maxwell. Fallacies in mathematics. Cambridge University Press. 1959.
Ce thème n'est pas développé ici. Je le mentionne pour mémoire.

J'ai eu l'occasion il y a quelques années de faire un exposé de deux heures sur ce thème. Il amuse les professeurs mais l'avis unanime que j'ai rencontré est qu'on ne doit surtout pas introduire ce sujet dans les classes en raison du danger qu'il représente. Je n'en suis pas convaincu. Chercher l'erreur me semble très formateur. C'est certainement indispensable pour de futurs enseignants. Surtout, ne doit-on pas être strictement exercé à reconnaître ses propres erreurs ? En ce qui me concerne, ce débat n'est pas clos. **J'insiste sur un point : l'utilité pour tous et en tout temps de l'entraînement logique et démonstratif est notamment**

de réfuter les affirmations fausses et la mauvaise foi qui sont hélas notre pain quotidien. Exercer le sens critique pour se défendre de nombreuses agressions intellectuelles, notamment de règles qui chez de nombreux "chefs" varient de jour en jour.

12. Vingt questions de Lynn Arthur Steen

Je reviens à l'un des livres cités au début.

Lee V. Stiff et Frances R. Curcio (éditeurs). 1999. Developing mathematical reasoning in Grades K-12. 1999 Yearbook. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia.

Le dernier chapitre : Lynn Arthur Steen. Twenty questions about mathematical reasoning, 270-285.

L'auteur est un mathématicien réputé. Son étude est remarquable par une connaissance approfondie, par une foule de questions en nombre bien plus élevé que le titre ne l'indique, par de nombreuses réflexions et autres contributions et par les références. Certaines questions rejoignent les nôtres. Il faudrait comparer les éléments de réponse. Je ne prétends pas qu'eux se rejoignent. De nombreuses autres questions de Steen ne sont pas traitées ici. Il est intéressant, comme en mathématique, d'être parti d'un certain nombre de questions, de les avoir traitées sinon résolues et d'achever par des questions en nombre plus élevé. Une traduction s'impose mais le temps et l'énergie me manquent.

En signe de bonne volonté, voici les 20 titres de sections: ce sont les 20 questions annoncées dans le titre.

1. Le raisonnement mathématique est-il mathématique ?
2. Le raisonnement mathématique est-il utile ?
3. Le raisonnement mathématique est-il un but pertinent pour les mathématiques scolaires ?
4. Les enseignants peuvent-ils enseigner le raisonnement mathématique ?
5. Le raisonnement mathématique peut-il être enseigné ?
6. Les savoir-faire conduisent-ils à la compréhension ?
7. Le drill peut-il aider à développer le raisonnement mathématique ?

8. La démonstration est-elle essentielle aux mathémlatiques ?

9. Apprendre des démonstrations favorise-t-il le raisonnement mathématique ?

10. L"'anxiété mathématique" empêche-t-elle le raisonnement mathématique ?

11. Les activités coopératives favorisent-elles la compréhension individuelle ?

12. Les calculatrices et les ordinateurs peuvent-ils augmenter le raisonnement mathématique ?

13. Pourquoi tant d'étudiants estiment-ils que les mathématiques sont une culture étrangère ?

14. Le contexte est-il essentiel pour le raisonnement mathématique ?

15. Les étudiants doivent-ils réellement construire leur propre connaissance ?

16. Combien de mathématiques y-a-t-il ?

17. Comment notre cerveau fait-il des mathématiques ?

18. Notre cerveau est-il pareil à un ordinateur ?

19. La capacité pour les mathématiques est-elle innée ?

20. L'école vient-elle trop tard ?

Adresse de l'auteur :
Francis BUEKENHOUT
UREM CP 216
Université libre de Bruxelles
Bd du Triomphe
1050 Bruxelles