

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUE ELEMENTAIRE

LES POLYNÔMES, CES BONS A TOUT FAIRE.

Francis BUEKENHOUT

0. Introduction.

A partir de la 3ème année les polynômes constituent un sujet d'intérêt permanent du cours de mathématique de l'enseignement secondaire. Ils fournissent notamment des exemples variés de fonctions sur lesquelles s'appuie l'important chapitre d'Analyse. Ils fournissent un apport analogue dans l'étude des espaces vectoriels. Ils constituent un outil privilégié dans l'initiation et le perfectionnement du calcul algébrique. En fait, on les retrouve un peu partout. En Combinatoire, c'est le binôme de Newton. En trigonométrie, la formule la plus importante à savoir $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ camoufle le polynôme $y^2 + z^2 - 1$. De même, le théorème de Pythagore camoufle le polynôme $x^2 + y^2 - z^2$. Comment s'explique cette omniprésence ? Très simplement. Les polynômes sont une émanation naturelle et inévitable de l'addition et de la multiplication réunies, c'est-à-dire des propriétés des nombres usuels ou si on préfère un langage plus précis, de la structure d'anneau commutatif. Il est significatif que des équations polynomiales apparaissent massivement dès l'époque des Babyloniens.

Dès lors nous ne serons plus étonnés de voir les polynômes envahir nos classes à partir de la 3ème. Nous serons plutôt étonnés de leur absence en 1ère et en 2ème et c'est par là que nous commencerons un examen plus systématique de la question.

1. Les polynômes en 1ère année.

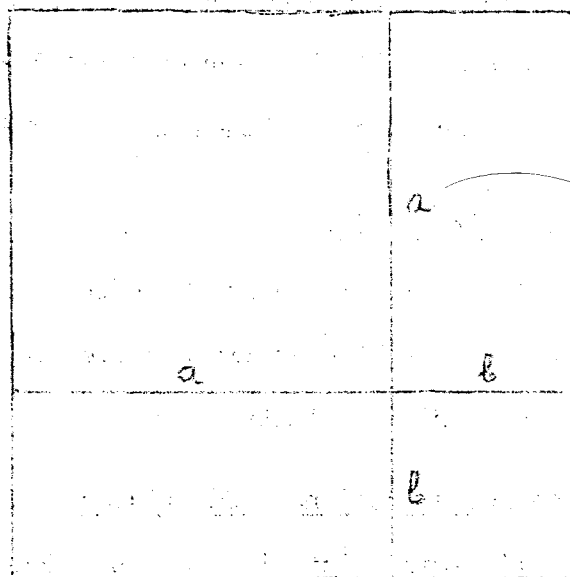
Y a-t-il des traces de polynômes dans le programme actuel remanié ou non ? C'est certain. Nous les voyons apparaître en liaison avec des situations géométriques d'une part et des situations algébriques d'autre part.

1.1. Polynômes émergeant de situations géométriques.

C'est ici que se situe l'origine historique des polynômes. Habitué comme nous le sommes à une vision formelle de ceux-ci basée sur des notations algébriques, nous

pourrions croire qu'ils n'ont pu s'introduire qu'à la Renaissance. Or nous l'avons déjà dit, des équations polynomiales sont résolues couramment par les scribes babyloniens il y a 4 000 ans environ. Chez eux, comme chez les Grecs plus tard, notre x^2 est l'aire d'un carré de côté x et notre x^3 est le volume d'un cube de côté x . Voici également la meilleure approche pédagogique du sujet. Il ne faut pas attendre d'avoir vu les puissances qui sont au programme en ce qui concerne \mathbb{N} et \mathbb{Z} mais utiliser au contraire les aires et volumes (également au programme) pour motiver l'introduction d'expressions telles que x^2 et x^3 . C'est donc l'acquis de l'école primaire (aire, volume) qui servira de base à l'introduction de puissances et ainsi de polynômes (une expression qu'il ne faudra pas encore utiliser). Quelles activités peut-on proposer aux élèves ?

Un 1er thème est constitué par l'exploration de l'aire d'un carré (ou volume de cube) dont le côté vaut $2x$, $x + 1$ et finalement $x + y$. Les fameux produits remarquables de 3ème année comme $(x + y)^2 = \dots$, $(x + y)^3 = \dots$ semblent aujourd'hui totalement coupés de leur interprétation géométrique et dès lors d'une motivation importante accessible aux élèves. Rappelons donc la signification géométrique de $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ par un dessin qui se dispense de toute explication (pour les cubes on pourra faire réaliser des modèles aux élèves ...)



$a + b$

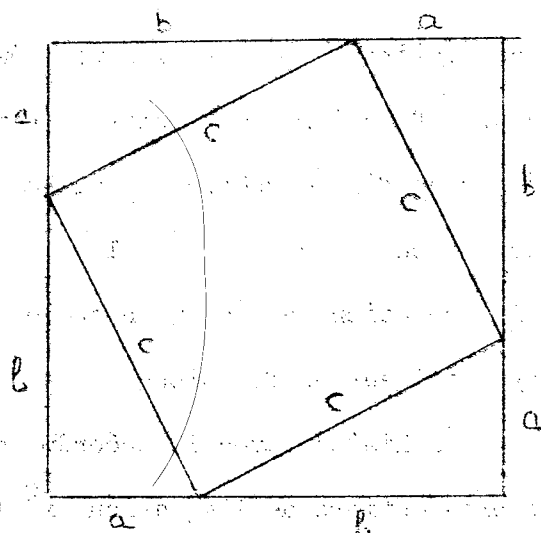
Un 2ème thème étroitement lié au précédent consiste à demander s'il y a un carré dont l'aire est double de celle d'un carré donné de côté x . Bref si on donne un carré d'aire x^2 , peut-on trouver un carré d'aire $2x^2$?

Ceci revient à trouver un nombre dont le carré vaut 2, bref à introduire et explorer $\sqrt{2}$. C'est par cette voie que les irrationnels se sont introduits en mathématique et les Grecs se sont longtemps refusé à accepter ces nombres. N'est-ce pas également une bonne approche pédagogique avant l'étude systématique des racines carrées prévue en 3ème ?

Le professeur ne devrait pas ignorer non plus que la duplication du cube c'est-à-dire finalement la construction de $\sqrt[3]{2}$, a fait l'objet d'un des problèmes les plus célèbres de l'histoire des mathématiques. Les Grecs désiraient ramener toutes leurs constructions à des tracés n'utilisant que la règle et le compas, c'est-à-dire des tracés de droites et de cercles. Il fallut attendre près de 2 000 ans pour que les progrès de l'algèbre permettent à Wanzel (1837) de prouver que cette construction est impossible. Aujourd'hui, ce résultat est présenté communément comme une des applications de la théorie des extensions de champs et de la théorie de Galois. (une bonne référence est : Stewart-Galois theory - Chapman, Londres).

Un 3ème thème lié aux carrés et aux aires est le célèbre théorème de Pythagore, une application splendide des idées précédentes, à traiter également dès la 1ère année.

La démonstration des pythagoriciens est parfaitement adaptée à ce niveau



Il suffit d'admettre que la somme des angles d'un triangle vaut 2 droits, pour prouver que la figure intérieure au dessin ci-dessus est bien un carré et dès lors les axiomes (implicites ici) de l'aire montrent que

$$(a + b)^2 = 4\left(\frac{ab}{2}\right) + c^2 \text{ ou } c^2 = a^2 + b^2$$

Il est rare de rencontrer des questions aussi spectaculaires dans le cours de mathématique.

1.2. Polynômes émergeant de situations numériques.

Nous avons vu comment motiver les puissances. Le programme prévoit une étude de \mathbb{N} et \mathbb{Z} en ce qui concerne addition, multiplication, puissances.

Soit E un de ces ensembles structurés (plus tard on pourra les remplacer par \mathbb{Q} et \mathbb{R}). Notons en passant l'effort d'abstraction exigé en représentant des objets différents par la même lettre E .

Dans E on dispose des opérations symbolisées par

$$a + b = c, \quad ab = c, \quad a^b = c$$

Si on fixe un des éléments a, b, c et qu'on laisse varier les 2 autres (en les remplaçant par x, y) on obtient les fonctions suivantes :

$$y = x + b, \quad x + y = c \text{ ou } y = -x + c$$

$$y = ax, \quad xy = c \text{ ou } y = \frac{c}{x}$$

$$y = a^x, \quad y = x^b, \quad x^y = c$$

Bref on introduit ainsi de manière naturelle, les polynômes $ax + b$ avec $a = \pm 1$ et x^n sans compter d'autres fonctions notamment l'exponentielle qu'on est tout de même surpris de voir rejeter en fin de rhétorique alors que le concept est mûr dès qu'on dispose de la notion de puissance et de celle de fonction.

Si on ne fixe rien dans les relations du début on obtient les polynômes à 2 indéterminées $z = x + y, z = xy$ et d'autres fonctions.

Voici un autre thème. En liaison avec le théorème de Pythagore on peut rechercher des solutions en nombres entiers de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$, les élèves décou-

vriront $3^2 + 4^2 = 5^2$ comme les Anciens et d'autres solutions avec l'aide d'une machine. On verra que les solutions ne sont pas si nombreuses.

Ici aussi, le professeur doit savoir que la question a donné lieu à un problème célèbre demeuré non résolu à ce jour. C'est le fameux "grand théorème" de Fermat (réf. Pour la Science - déc.78). Il consiste à prouver que si x, y, z sont des naturels non nuls tels que $x^n + y^n = z^n$ et $n \in \mathbb{N}$ alors $n \leq 2$.

1.3. Quelles activités proposer aux élèves ?

La découverte présentée par le professeur est intéressante mais l'essentiel est de faire travailler les élèves. Deux thèmes nous paraissent très appropriés. D'abord le maniement de carrés et de cubes en liaison avec le dessin et le modèle, où le formalisme algébrique devrait trouver un de ses appuis les plus solides. Ensuite l'étude de fonctions par des graphiques, des calculs de valeurs, l'utilisation de tables et de machines, et même des graphiques à 3 dimensions. Il n'est pas très difficile et si amusant de découvrir le graphique de $z = xy$ en forme de selle de cheval. Techniquement on peut utiliser des tiges plantées dans une plaque de polystyrène ou des coupes réalisées en carton. Le lien avec le cours de géographie pourrait être fait utilement. En ce qui concerne les graphiques, on pourra utiliser une technique utilisée avec succès à l'Ecole Decroly, tout comme celles qui précèdent, depuis plusieurs années. Les élèves réalisent le graphique d'une même fonction avec des unités différentes et des axes non perpendiculaires. Après quoi, on compare les résultats obtenus et on constate que les extrema et la croissance sont localisées "pareillement" partout. On peut également faire étudier des taux d'accroissement et préparer ainsi la dérivée.

Les professeurs estimeront sans doute que tout ce qui précède ne doit pas être enseigné en 1ère année et ne peut l'être faute de temps. Il va de soi que rien ne doit être systématique à ce stade. Nous souhaitons montrer les riches possibilités, les nombreuses coordinations verticales entre années d'études et horizontales entre divers chapitres d'une même année. Il est clair aussi que chacun des thèmes propo-

sés peut être repris en 2ème année et bien plus tard encore; les questions importantes et les grands problèmes sont de tous les âges.

2. Les polynômes en 2ème année.

Nous venons de voir que tout ce qui précède demeure largement valable, en particulier à partir de l'étude de \mathbb{Q} . Un autre point du programme peut être exploité. Il s'agit de la composition de fonctions.

Exemple. On a rencontré les fonctions

$$f : x \rightarrow x + 2$$

$$g : x \rightarrow x^2$$

et on en a dressé les graphiques.

Grâce à la composition, on découvre

$$g \circ f : x \rightarrow (x + 2)^2$$

$$f \circ g : x \rightarrow x^2 + 2$$

et on peut les étudier à leur tour graphiquement. On voit ainsi de nouveaux polynômes s'introduire.

Cette opération sur les fonctions amènera peut-être l'étude d'autres opérations comme

$$f + g : x \rightarrow x^2 + x + 2$$

dont le graphique s'obtient très simplement à partir de ceux de f et g .

Tout ceci devrait être motivé par des problèmes concrets et ne pas être parachuté tel quel. La composition se motive surtout par les transformations du plan. Quand elle a été acceptée on peut la transférer aux fonctions comme ci-dessus. On peut aussi introduire un problème ad-hoc. Voici un énoncé vieux de 4 000 ans.

Une aire A consiste en la somme de deux carrés et vaut 1 000. Le côté d'un carré vaut $\frac{2}{3}$ du côté de l'autre diminué de 10. Quels sont les côtés du carré ?

Ceci livre les équations $x^2 + y^2 = 1000$

avec $y = \frac{2}{3}x - 10$

d'où on tire $\frac{13}{9}x^2 - \frac{40}{3}x - 900 = 0.$

Tout ceci n'est-il pas à la portée d'élèves de 2ème ? Il ne faut pas pour autant leur faire résoudre l'équation du 2ème degré. L'étude expérimentale du trinôme permettra de découvrir peu à peu et de vérifier ensuite que $x = 30$.

3. Les polynômes en 3ème année.

Cette fois les choses sérieuses commencent car les polynômes sont au programme. Le professeur va notamment se heurter au délicat problème de la définition car il y a deux notions de polynômes et il est clair à voir les manuels et les programmes que cette situation est embarrassante car nul ne l'aborde de manière explicite. Nous allons donc oublier les élèves pendant un moment et songer davantage aux professeurs.

3.1. Les deux notions de polynôme.

Nous venons de voir qu'historiquement les polynômes s'introduisent par des équations ou par des fonctions. C'est la première notion que nous allons discuter. On rencontre dans les traités d'algèbre, une notion quelque peu différente que nous appellerons polynôme formel. Voyons d'abord comment définir la 1ère.

Les fonctions polynômes sur \mathbb{R} peuvent être définies comme certaines applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Plus précisément, si $n \in \mathbb{N}$ et si a_0, a_1, \dots, a_n sont des éléments de \mathbb{R} , alors

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

est une fonction polynôme sur \mathbb{R} .

Au lieu de \mathbb{R} on peut partir de \mathbb{Z} , \mathbb{Q} et plus généralement d'un anneau commutatif.

Nous y reviendrons.

Il est clair que cette notion doit être enseignée et qu'elle est centrale pour le cours de mathématique. Ses applications exigent l'acquisition d'une intuition selon laquelle x et $f(x)$ sont perçus comme des variables, la 2ème dépendant de la 1ère et celle-ci étant souvent le temps ce qui devra nous inciter à remplacer régulièrement x par t .

Voici quelques données supplémentaires sur l'anneau des fonctions polynômes sur \mathbb{R} (ou sur un anneau commutatif A) qui ont un intérêt pédagogique certain. Si f et g sont des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} on peut définir

$$f + g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x) + g(x)$$

$$f \cdot g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x) \cdot g(x)$$

et l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} (ou de A dans A) est un anneau commutatif pour ces opérations, anneau que l'on note A^A . L'anneau des fonctions polynômes sur A est un sous-anneau de l'anneau A^A et la chose remarquable est que ce sous-anneau est engendré par des fonctions très simples :

les fonctions constantes $f_c : x \rightarrow c$ où $c \in K$

et la fonction identique $g : x \rightarrow x$.

Il est clair que par produits et additions répétées de ces fonctions on peut obtenir une fonction polynôme quelconque. Enfin cette vision permet d'aborder les fonctions polynômes à 2 indéterminées sur \mathbb{R} : il suffit de remplacer dans la construction précédente, A par l'anneau des polynômes sur \mathbb{R} , en d'autres termes à admettre que les coefficients deviennent eux-mêmes des fonctions polynômes.

Notons encore que l'anneau des fonctions polynômes est fermé pour l'opération de composition.

Quand on ouvre un traité d'algèbre de niveau universitaire ce n'est jamais sous la forme de fonctions que l'on introduit les polynômes. On y définit plutôt un polynôme formel en une indéterminée, à coefficients dans un anneau commutatif A (et ensuite on passe à plusieurs indéterminées) : c'est une suite

$$(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$$

d'éléments de A presque tous nuls (tous nuls à l'exception d'un nombre fini d'entre eux). On définit alors une addition et une multiplication sur ces polynômes. Ensuite, on pose

$$(1, 0, 0, \dots, 0, \dots) = 1$$

$$(0, 1, 0, \dots, 0, \dots) = x$$

$$(0, 0, 1, 0, \dots) = x^2$$

et on démontre que

$$(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

ce qui nous ramène à la notation classique.

Cette définition a le mérite d'être parfaitement rigoureuse, de faire d'emblée le rapprochement avec les espaces vectoriels et de situer l'importance des monômes x^n comme base de cet espace vectoriel même si l'on n'éprouve pas le besoin d'explicitement ces notions. Elle a évidemment l'inconvénient d'être très abstraite et en fin de compte, de s'adresser à des personnes qui savent déjà ce qu'est un polynôme. Bien entendu, même dans les traités on s'empresse de ne travailler exclusivement qu'avec la notation classique. Certains pensent alors un peu naïvement que la difficulté est facile à surmonter. Il suffit de définir un polynôme comme une expression de la forme

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

avec laquelle on calcule de la manière habituelle. Ceci est évidemment plus satisfaisant pour l'intuition, seulement on perd la perfection rigoureuse du début car ici on ne peut donner un sens précis au symbole x utilisé et, à strictement parler, on n'a rien défini du tout.

Une question se pose encore. Quels sont les liens entre fonctions polynômes et polynômes formels ? Intuitivement, les liens sont évidents et on a tout de suite envie de parler de bijection. Soit A un anneau commutatif, $A[x]$ l'anneau des polynômes formels en une indéterminée sur A et $A(t)$ l'anneau des fonctions polynômes sur A . Alors on a une application immédiate

$$\alpha : A[x] \rightarrow A(t) \text{ qui applique } a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

sur la fonction

$$f : A \rightarrow A : t \rightarrow a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n$$

On prouve facilement que

$$\alpha(f + g) = \alpha(f) + \alpha(g)$$

$$\alpha(fg) = \alpha(f)\alpha(g)$$

de sorte que α est un morphisme (α conserve la structure). Mais α est-elle toujours une bijection ? La réponse est négative. Prenons le cas où A ne possède que deux éléments 0 et 1. Alors $A[x]$ est malgré tout un anneau infini. Par contre, $A(t)$ se réduit à 4 éléments et aucune bijection n'est possible en général. Toutefois, α est une bijection dès que A est un anneau intègre infini. (pour une démonstration, voir par ex. Godement - Cours d'Algèbre, Hermann).

Dans les cas classiques, les deux anneaux sont donc isomorphes. Où réside alors la différence ? Dans le cas des fonctions, il est question de variables, en particulier x est une variable, alors que dans le polynôme formel x désigne un polynôme particulier mais bien déterminé et il apparaît donc plutôt comme non variable !

3.2. Que faut-il enseigner ?

La véritable question est de savoir si le polynôme formel doit être enseigné. Le programme ne se prononce pas en toute clarté. Il le fait de manière implicite en parlant de "polynômes à coefficients réels et fonctions polynômes" mais les directives méthodologiques sont muettes sur cette distinction.

Les manuels ne sont pas plus explicites. Leurs auteurs sont généralement conscients de la distinction que fait le programme et ils s'adaptent à celui-ci mais il est clair qu'ils en sont gênés car la distinction n'est pas explicitée et surtout aucune raison n'est apportée à cette distinction.

Quels avantages y a-t-il donc à introduire les polynômes formels ? Passons les rapidement en revue.

1) on écrit volontiers

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x} = \frac{(x-2)(x-1)}{x(x-1)} = \frac{x-2}{x}$$

Ces égalités de fractions rationnelles ne posent aucun problème sur le plan formel. S'il s'agit de fonctions, la 2ème égalité est quelque peu abusive car la dernière

fonction est définie par $x = 1$ et la 1ère pas. Les polynômes formels évitent donc d'ajouter $x \neq 1$ derrière les deux égalités ci-dessus. On avouera que le gain est mince en regard des efforts consentis pour maîtriser deux notions au lieu d'une.

2) En fait, le seul véritable avantage réside à mon sens dans l'effort d'abstraction exigé. Le polynôme formel est plus abstrait que la fonction polynôme; il permet de dégager l'essentiel de la notion de polynôme. Il est clair que la marche vers l'abstraction est un trait majeur et dominant de toute l'évolution des mathématiques et que le professeur doit en faire un objectif de son enseignement. En ce qui concerne les niveaux d'abstraction du sujet polynôme on pourrait distinguer :

- a) exemples "concrets" de polynômes comme l'aire du carré en fonction de la longueur d'un côté. Ici les coefficients du polynôme sont fixés et la variable x a une signification "concrète"
- b) exemples de polynômes comme x^2 (x ne représente plus rien en particulier)
- c) polynôme général. Il faut envisager une infinité d'objets à la fois. C'est un pas difficile, un choc dont l'élève ne se remettra qu'après deux années d'efforts (les trinômes $ax^2 + bx + c$ sont étudiés en 4ème, en partie pour atténuer ce choc) et il est probable que certains ne s'en remettent jamais.

d) polynôme formel. En raison de la difficulté de c) nous pensons que d) ne devrait pas être abordé avant la 4ème et que son absence totale dans les humanités ne serait pas très gênante.

3.3. Et les anneaux ?

Faut-il introduire la structure d'anneau ? Voilà une autre étape dans la marche vers l'abstraction qu'on peut situer ci-dessus après c). Au lieu de laisser varier les coefficients dans \mathbb{R} on les laisse varier dans un anneau A . Faut-il atteindre ce stade dans les humanités ? Ceci me paraît plus utile que l'introduction du polynôme formel notamment en vue de définir les polynômes à 2 indéterminées sur A qui sont des polynômes à une indéterminée sur $A[x]$ (ou $A(t)$). Mais il est clair à

nouveau qu'une grande prudence s'impose. Toujours est-il que le professeur doit être conscient que la théorie de la divisibilité par $x - a$ et l'algorithme d'Euclide (quotient et reste) demeurent valables pour un anneau commutatif quelconque, avec les démonstrations habituelles. Nous renvoyons à nouveau, à l'excellent traité de Godement pour plus de détails.

3.4. Et les élèves ?

Nous avons finalement discuté la question des polynômes à une altitude que les élèves ne peuvent atteindre en 3ème année. Qu'est ce qui importe pour eux ?

- 1) Entretenir les objectifs fixés en 1ère et 2ème année.
- 2) D'abord d'arriver à une vision générale des fonctions polynômes au travers de très nombreux exemples
- 3) Ensuite de calculer de manière intensive dans l'anneau des polynômes, un des buts étant de prolonger les techniques de calcul vues dans l'anneau \mathbb{Z} à des ensembles de fonctions.
- 4) Enfin, il faut poursuivre l'exploration des représentations graphiques de fonctions.

Ces objectifs ne doivent pas être menés dans cet ordre mais alterner, l'un épaulant l'autre.

4. Les polynômes en 4ème année.

Une fois de plus, les considérations développées ci-dessus demeurent largement valables en 4ème année. Nous ne reprendrons pas les notions relatives aux anneaux qui deviennent certainement plus pertinentes à ce niveau.

Nous examinerons plutôt quelques thèmes d'activités intéressantes inspirées par le programme.

- 1) La virtuosité, la rapidité et la précision du calcul devraient être un objectif pédagogique majeur faute de quoi l'élève souffrira parfois plusieurs années des mauvaises habitudes prises à ce stade. Il est fréquent de voir des étudiants en mathématiques excuser une interrogation écrite insuffisante en disant qu'ils ont

fait des fautes de calcul mais qu'ils connaissaient la matière.

2) Nous voudrions insister sur l'intérêt des décompositions en facteurs. On continue à associer algèbre et calcul, calcul et algorithme c'est-à-dire mécanisation, de manière plus ou moins consciente. Or le calcul et l'algèbre peuvent faire place aussi à l'imagination créatrice. C'est là que les décompositions en facteurs sont particulièrement intéressantes. Ce ne sont pas des calculs mécaniques. Le professeur peut collectionner des exercices difficiles de ce type et en faire l'objet à l'occasion d'un problème de recherches susceptible d'attirer les meilleurs élèves.

Exemple 1. J'avais demandé à des étudiants de licence de décomposer $x^5 + x + 1$ en facteurs à coefficients entiers. Nous avons vu une méthode permettant de traiter ceci de manière assez mécanique. A ma grande surprise, Mlle Magis proposa la magnifique solution suivante

$$\begin{aligned} x^5 + x + 1 &= \frac{x^6 - 1}{x - 1} - (x^4 + x^3 + x^2) \\ &= \frac{x^6 - 1}{x - 1} - x^2 \left(\frac{x^3 - 1}{x - 1} \right) \\ &= \frac{x^3 - 1}{x - 1} (x^3 + 1 - x^2) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1) \end{aligned}$$

Bel exemple d'imagination.

Celui-ci m'incite à faire de la propagande pour un produit remarquable qu'il ne faudrait pas omettre :

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

qu'on peut ou non voir en liaison avec les progressions géométriques.

Exemple 2. Décomposer $x^5 + x + 1$ en facteurs à coefficients entiers. C'est l'exercice précédent mais nous souhaitons aussi illustrer la méthode générale pour traiter ce problème quand il est entendu que tous les coefficients sont entiers.

On suppose d'abord que $f(x)$ se décompose en un facteur linéaire et un facteur du

4ème degré donc

$$x^5 + x + 1 = (ax + b)(cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g)$$

Le lecteur saisira la méthode en notant que $ac = 1$ et a, c sont entiers donc $a = c = 1$ ou $a = c = -1$ mais il est évident que ce dernier cas peut être écarté (pourquoi ?). On peut donc supposer $a = c = 1$. Ensuite $bc + ad = 0$ ou $b + d = 0$. On peut donc remplacer d par $-b$. On poursuit de la sorte et on arrive soit à une décomposition soit à une impossibilité. Mine de rien, on résout un système linéaire, mais un système particulièrement simple qui n'exige pas une théorie générale préalable.

3) Les représentations graphiques gardent toute leur importance. L'étude de celle-ci pour le trinôme du second degré devrait marquer deux tournants importants. D'abord on est amené à étudier pour la première fois, une classe infinie de fonctions au lieu d'une fonction à la fois. Encore un choc dont beaucoup d'élèves auront de la peine à se remettre et qu'il faudrait adoucir au maximum. Ensuite on est amené ou on devrait être amené à étudier les fonctions d'un point de vue global : intervalles de croissance et de décroissance, extrema. Qu'y a-t-il de neuf ici ? Auparavant on se sera probablement limité à des constructions de graphiques point par point. C'est une technique simple et importante qui doit être familière mais en 4ème il faut insister sur la nécessité d'adopter un nouveau point de vue et surtout convaincre l'élève de la puissance de celui-ci. En étudiant un graphique de fonction de manière empirique, on doit se limiter à un intervalle et on travaillera par exemple dans $[0, 100]$ alors que la fonction est maximale en $x = 1\ 000$. Le point de vue global permet en quelque sorte de prendre de l'altitude et de mieux voir la fonction. L'expérience prouve que de nombreux rhétoriciens n'ont pas vraiment compris ce point de vue et qu'ils sont passés par l'étude ultérieure de la dérivée sans en tirer aucun bénéfice.

4) L'équation du 2ème degré est un point important du programme. Pourquoi passer complètement sous silence la magnifique histoire des équations du 3ème, du 4ème et du 5ème degré. Qu'on me comprenne bien. Je ne demande pas d'enseigner les formules fournissant les racines de $x^3 + ax + b$ ni de faire résoudre de telles équations de manière systématique mais de signaler que cela existe, que les ma-

thématiciens ont affronté systématiquement ces problèmes à partir de la Renaissance. C'est une histoire bien connue mais pour la facilité du lecteur nous en reprendrons les grandes lignes. Peut-être est-il bon tout d'abord, de rappeler que la méthode de résolution de l'équation du second degré fut élaborée par les Babyloniens vers 1 600 av. J.C. et que le Grec Diophante (vers 250 après J.C.) fut le premier à manier ce problème avec des coefficients quelconques. La méthode est valable sur tout champ dans lequel $1 + 1 \neq 0$. En 1494 un traité d'arithmétique dû à Pacioli, s'achève en observant que la solution d'équations cubiques générales comme $x^3 + ax = b$ semble tout aussi impossible que la quadrature du cercle. Des cas particuliers étaient pourtant résolus dès l'Antiquité. On raconte que Fibonacci s'illustra dans un tournoi scientifique à la cour de l'empereur Frédéric II (13ème siècle) en prouvant que $x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ n'a pas de racines rationnelles. La question soulevée par Pacioli et ses développements successifs allaient constituer le problème majeur de l'algèbre durant plus de trois siècles jusqu'à ce que Galois y apporte une solution complète mais inattendue vers 1830. En moins de cinquante ans des mathématiciens italiens comme Tartaglia, Cardan et Ferrari allaient résoudre les équations du 3ème et du 4ème degré. A titre d'exemple pour

$$x^3 + ax + b = 0$$

la formule de Cardan (due en fait à Tartaglia qui fit jurer à Cardan de la garder secrète ce que ce dernier parvint à faire durant 10 ans ...) livre par exemple

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} \quad (1)$$

Les calculs nécessaires à l'élaboration de cette formule sont à la portée de l'enseignement secondaire.

Signalons en passant que c'est le maniement de cette formule pour $x^3 - 15x - 4 = 0$ qui possède la solution $x = 4$ et qui donne lieu dans (1) à $\sqrt{-121}$ qui amena Bombelli (16ème siècle) à manipuler pour la première fois des nombres complexes. Ceux-ci sont apparus comme une nécessité inéluctable dans l'étude des équations du 3ème degré (car $x = 4$ était après tout une solution entière) et non dans celle

du 2ème degré comme on fait semblant de le croire dans les manuels. L'équation du 4ème degré donne lieu elle aussi à une formule qui fait intervenir seulement des fonctions rationnelles des coefficients de l'équation et de radicaux de degré ≤ 4 portant sur de telles fonctions.

Ces succès éclatants devraient conduire les mathématiciens à la conviction qu'il existait une solution de l'équation du 5ème degré par radicaux et de nombreux efforts furent accomplis dans ce sens. Ce fut la gloire d'Abel de montrer vers 1825 que l'équation générale du 5ème degré ne peut être résolue par radicaux et ce fut celle de Galois d'achever la question pour les équations de degré n et surtout de fournir une condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation polynomiale soit résoluble par radicaux : un certain groupe de permutations associé à l'équation doit avoir une suite croissante finie de sous-groupes normaux commençant en 1 et se terminant avec le groupe, dans laquelle le quotient de deux sous-groupes consécutifs est un groupe commutatif. Ce résultat mettait fin au problème central de l'algèbre durant les siècles précédents et attirait l'attention sur des ensembles structurés comme les groupes qui allaient devenir le principal centre d'intérêt algébrique à notre époque.

5) L'espace des trinômes $ax^2 + bx + c$. Ce thème connu mais encore peu pratiqué dans les classes mérite l'attention car il établit le lien avec la géométrie vectorielle à 3 dimensions. Cet espace s'identifie à \mathbb{R}^3 dans lequel on distingue cependant des sous-ensembles particuliers : le plan $a = 0$ des "faux trinômes du second degré" et le cône $b^2 - 4ac = 0$ des trinômes à racines doubles. On peut comparer l'addition et la multiplication polynomiales avec des notions géométriques et interpréter des notions géométriques comme les droites, plans, parallèles en termes de polynômes.

5. Polynômes en 5ème et 6ème année.

A ce niveau, les polynômes devraient être devenus des cas particuliers de fonctions, particulièrement aisés à manipuler et finalement sympathiques. Le théorème de Mac Laurin tend à réduire toute fonction indéfiniment dérivable à

un polynôme (approché ou à un polynôme de degré infini c'est-à-dire une série). On peut aller jusqu'à élaborer tout le cours d'Analyse sur les polynômes en étudiant seulement les fonctions qui ont des approximations convenablement définies par des polynômes. Un tel exposé est fourni par Levi - Polynomials, Power series and Calculus, Van Nostrand. Ce n'est sans doute pas le lieu d'entrer dans plus de détails.

