PROBLEMATHS

25 octobre 2007

Problemath 4

Etant donné un carré unité, les quatre disques de rayon 1 centrés aux sommets du carré déterminent à l'intérieur de celui-ci quatre quadrants(quarts de disque). Que vaut l'aire du quadrilatère curviligne qui est l'intersection de ces quatre quadrants?

Problemath 5

On constitue une file d'attente devant un guichet en attribuant au hasard à n personnes des tickets numérotés de 1 à n. Quelle est la probabilité que deux personnes données soient à distance d (=soient séparées par d-1 personnes) dans cette file? Quelle est la distance la plus probable entre ces deux personnes? Quelle est la moyenne (pondérée par les probabilités) de la distance entre ces deux personnes (= l'espérance mathématique de leur distance)?

Problemath 6

Pour quel(s) entier(s) $n > 0$ le nombre $2^8 + 2^{11} + 2^n$ est-il le carré d'un entier?

Les solutions doivent nous parvenir au plus tard le vendredi 16 novembre à 16h.

Solution du Problemath 1.
Le cercle C a pour équation $x^2+y^2 = 2x$. La droite joignant les points $a(0,r)$ et b $(\frac{1}{2}r^2, \frac{1}{2}r\sqrt{4-r^2})$ a pour équation $y = \frac{1}{r}(\sqrt{4-r^2}-2)x+r$ et coupe l'axe des x au point d'abscisse $r^2/(2-\sqrt{4-r^2}) = 2+\sqrt{4-r^2}$ qui tend vers 4 lorsque r tend vers 0. Par conséquent, le point p tend vers le point $(4,0)$.

Ont fourni une solution correcte:
H.P. BUI(élève de 6ème à l'Athénée Robert Catteau), G. KERG(élève de 6ème à l'Athénée de Luxembourg), O.BOES, C. GENIN, M. GHEYSENS, C. LONARDO, J. MEYER(BA1 maths), V. LOODTS(BA1 physique), M. LENAERTZ(BA1 informatique), M. AMEZOUAK, X. GHEYSSENS, J.P. IRAGUHA, M. MARTINS PINTO, S. MEUREE, G. NISOL, C. OLI, F. THONAR(BA1 polytech), C.DE BACKER, C. DEKONINCK, J. ROBE(BA2 polytech), A. DEKERCKHEER, R. DENDIEVEL, A.KIEFER(BA3 maths), B. DEVILLE, T. VANAUDENHOVE (BA3 polytech), K. MADRANE (5èmeannée polytech), S. MASSON (licencié en maths U. Mons-Hainaut), W. DE DONDER (ingénieur), C. FESTRAETS, C. VAN HOOSTE(profs de maths), DUPOND avec D et DUPONT avec T(détectives), J.C. JUNCKER(premier ministre luxembourgeois) et DIEU(divinité, créateur).

Solution du Problemath 2.
L'expression donnée peut s'écrire

$$f(x) = \sqrt{(x-1)+2\sqrt{x-1}+1} + \sqrt{(x-1)-2\sqrt{x-1}+1}$$
$$= \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}$$
$$= \sqrt{x-1}+1+|\sqrt{x-1}-1|$$

Comme $\sqrt{x-1}-1$ est ≤ 0 pour $1 \leq x \leq 2$ et est > 0 pour $x > 2$, il en résulte que $f(x)$, qui n'est pas définie pour $x < 1$, vaut 2 sur l'intervalle$[1,2]$ et vaut $2\sqrt{x-1}$ pour $x > 2$.

Ont fourni une solution correcte:
H.P. BUI(élève de $6^{\text{ème}}$ à l'Athénée Robert Catteau), G. KERG(élève de $6^{\text{ème}}$ à l'Athénée de Luxembourg), O.BOES, I. CHARLIER, C. GENIN, M. GHEYSENS, C. LONARDO, J. MEYER(BA1 maths), V. LOODTS(BA1 physique), X. GHEYSSENS, M. MARTINS PINTO, V. STAICU, F. THONAR(BA1 polytech), S. REXHEP(BA2 maths), C. DE BACKER, J. ROBE(BA2 polytech),R. DENDIEVEL, A.KIEFER(BA3 maths), B. DEVILLE, T. VANAUDENHOVE (BA3 polytech), S. MASSON (licencié en maths U. Mons-Hainaut), C. FESTRAETS, C. VAN HOOSTE(profs de maths), DUPOND avec D et DUPONT avec T(détectives), J.C. JUNCKER(premier ministre luxembourgeois) et DIEU(divinité, créateur).

Solution du Problemath 3.

Posons $p(n) = n^2 + n + 41 \quad et \quad N = \Pi_{k=0}^{39} \; p(k)$

$$\begin{aligned} \text{Alors } p(N+k) &= (N+k)^2 + (N+k) + 41 \\ &= N^2 + 2kN + k^2 + N + k + 41 \\ &= N(N+2k+1) + p(k) \end{aligned}$$

Comme $p(k)$ divise N pour tout $k \in \{0, 1, ..., 39\}$, on en déduit que $p(k)$ divise $p(N+k)$ pour chacune de ces valeurs de k. Mais $p(N+k) > p(k) > 1$, donc $p(N+k)$ n'est pas un nombre premier pour ces 40 valeurs consécutives de $N+k$. Nicola FLAGOTHIER (BA1 polytech)a montré avec un ordinateur que n^2+n+41 n'est pas un nombre premier pour les 40 entiers $n \in [1204431, 1204470]$. Notons qu'il est facile de généraliser le raisonnement ci-dessus pour prouver que, quel que soit le polynôme non constant $p(n)$ à coefficients entiers et quel que soit l'entier $M > 0$, il existe M valeurs consécutives de n telles que $p(n)$ ne soit pas un nombre premier.

Ont fourni une solution correcte:
H.P. BUI(élève de $6^{\text{ème}}$ à l'Athénée Robert Catteau), G. KERG(élève de $6^{\text{ème}}$ à l'Athénée de Luxembourg), O.BOES, C. GENIN, M. GHEYSENS(BA1 maths), N. FLAGOTHIER, G. NISOL (BA1 polytech), S. REXHEP(BA2 maths), J. ROBE(BA2 polytech), S. MASSON (licencié en maths U. Mons-Hainaut), W. DE DONDER (ingénieur), C. FESTRAETS, C. VAN HOOSTE(profs de maths), DUPOND avec D et DUPONT avec T(détectives), J.C. JUNCKER(premier ministre luxembourgeois)et DIEU (divinité, créateur).