PROBLEMATHS
4 février 2008

Voici les 4 derniers énoncés de cette année académique:

Problemath 10

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que $f'(x) = f(2008 - x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Problemath 11

Combien l'équation $sin(sin(sin(sin(sin\ x)))) = \frac{x}{3}$ possède-t-elle de solutions $x \in \mathbb{R}$?

Problemath 12

On appelle diagonale d'un polygone plan toute droite joignant deux sommets non consécutifs. Si on trace toutes les diagonales d'un polygone plan convexe (non nécessairement régulier) de 21 sommets, il y aura toujours au moins deux de ces diagonales qui feront un angle mesurant moins de 1°. Vrai ou faux ?

Problemath 13

Alice et Bob sont deux brillants mathématiciens. On choisit deux entiers distincts x et y dans l'ensemble $\{2, 3, 4, \ldots, 98, 99\}$ et on fournit à Alice leur somme et à Bob leur produit. Le dialogue suivant s'engage alors:
- Alice: "Je sais que tu ne peux pas déterminer x et y".
- Bob: "Effectivement, mais ce que tu viens de dire me permet de déterminer x et y".
- Alice: "Alors, moi aussi je connais x et y".
Que valent x et y?

Les solutions doivent nous parvenir au plus tard le vendredi 14 mars à 14h. Pour rappel: vous pouvez les déposer dans une boîte aménagée à cet effet dans le local 2.08.109 au 8ème étage du Bâtiment NO à la Plaine, ou dans la boîte aux lettres qui se trouve sur la porte du bureau d'Anne Delandtsheer (Bâtiment U, porte A, 5ème étage) à la Faculté des Sciences Appliquées au Solbosch, ou encore les envoyer par e-mail à jdoyen@ulb.ac.be.

Solution du Problemath 7.
On montre facilement que les rayons des cercles successifs vérifient la récurrence $r_1 = 1$, $r_{n+1} = r_n cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ pour tout $n \geqslant 1$, donc

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} r_n &= lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} cos\frac{\pi}{2^k} = lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \frac{sin\frac{\pi}{2^{k-1}}}{2\ sin\frac{\pi}{2^k}} \\ &= lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \frac{sin\frac{\pi}{2}}{sin\frac{\pi}{2^n}} = \frac{2}{\pi} lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2^n}}{sin\frac{\pi}{2^n}} = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

Ont fourni une solution correcte:
H.P. BUI (élève de $6^{\text{ème}}$ à l'Athénée Robert Catteau), G. KERG (élève de $6^{\text{ème}}$ à l'Athénée de Luxembourg), I. CHARLIER, M. GHEYSENS (BA1 Maths), M. LENAERTZ (BA1 Informatique), M. AMEZOUAK, M. MARTINS PINTO (BA1 Polytech), A. DEKERCKHEER, R. DENDIEVEL (BA3 Maths), W. DE DONDER (Ingénieur), C. FESTRAETS, C. VAN HOOSTE (Profs de Maths), DUPONT avec T (Détective), J.C. JUNCKER (Premier Ministre Luxembourgeois) et DIEU(divinité, créateur).

Solution du Problemath 8.
Soit $q_0 = (a, b, c, d)$ le quadruple initial. Posons $q_{n+1} = f(q_n)$ pour tout $n \epsilon \mathbb{N}$. On va démontrer que, pour n suffisamment grand, $q_n = (0, 0, 0, 0)$. Notons d'abord que, si M_n désigne le maximum des composantes du quadruple q_n, alors $M_n \geqslant\ M_{n+1}$ pour tout $n \epsilon \mathbb{N}$, car $|x - y| \leqslant \max\,(x, y)$ pour tout $x, y \epsilon \mathbb{N}$. En particulier, pour tout $n \epsilon \mathbb{N},\ M_n \leqslant M_0 = \max\,(a, b, c, d)$.
Prouvons maintenant que (*) toutes les composantes de q_{4k} sont divisibles par 2^k. Il est facile de vérifier que (*) est vrai pour $k = 1$, c'est-à-dire que toutes les composantes de q_4 sont paires, quelles que soient les parités des entiers a, b, c, d composant le quadruple initial q_0 : si par exemple q_0 est du type (p, p, p, i) (où p et i représentent respectivement des entiers pairs et impairs), on obtient, après 4 itérations de f:

$$(p, p, p, i) \to (p, p, i, i) \to (p, i, p, i) \to (i, i, i, i) \to (p, p, p, p).$$

D'autre part, si la propriété (*) est vraie pour q_{4k}, elle l'est aussi pour q_{4k+4} : en effet, si toutes les composantes de q_{4k} sont divisibles par 2^k, alors $q_{4k} = (x, y, z, t) = 2^k(x', y', z', t')$ où $x', y', z', t' \epsilon \mathbb{N}$ et

$$q_{4k+4} = f^4(q_{4k}) = f^4(2^k(x', y', z', t')) = 2^k f^4(x', y', z', t'),$$

donc (*) est vraie pour q_{4k+4} puisque toutes les composantes de $f^4(x', y', z', t')$ sont paires, comme on l'a montré ci-dessus.
En particulier, (*) implique que, pour tout $k \epsilon \mathbb{N}$, M_{4k} est divisible par 2^k. Mais on a vu que M_{4k} est majoré par $M_0 = \max\,(a, b, c, d)$. En prenant k suffisamment grand, on en déduit que $M_{4k} = 0$, c'est à dire que $q_{4k} = (0, 0, 0, 0)$.

Ont fourni une solution correcte:
H.P. BUI (élève de $6^{\text{ème}}$ à l'Athénée Robert Catteau), G. KERG (élève de $6^{\text{ème}}$ à l'Athénée de Luxembourg) et J.C. JUNCKER (Premier Ministre Luxembourgeois).

Solution du Problemath 9.
Soient $1 + \frac{\pi^4}{5!} + \frac{\pi^8}{9!} + \frac{\pi^{12}}{13!} + \ldots = p$ le numérateur et $\frac{1}{3!} + \frac{\pi^4}{7!} + \frac{\pi^8}{11!} + \frac{\pi^{12}}{15!} + \ldots = q$ le dénominateur de la fraction considérée. La série

$$(*) \qquad \pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \frac{\pi^7}{7!} + \ldots = \ sin\ \pi = 0$$

étant absolument convergente, la série formée de ses termes positifs et celle formée de ses termes négatifs sont toutes deux convergentes, d'où on déduit que p et q sont des nombres réels bien définis. D'autre part, comme (*) est absolument convergente, on voit en réarrangeant ses termes que $p\pi - q\pi^3 = sin\ \pi = 0$, donc $p\pi = q\pi^3$ et par conséquent $\frac{p}{q} = \pi^2$.

Ont fourni une solution correcte:
H.P. BUI (élève de $6^{\text{ème}}$ à l'Athénée Robert Catteau), G. KERG (élève de $6^{\text{ème}}$ à l'Athénée de Luxembourg), M. GHEYSENS, C. LONARDO (BA1 Maths), N. FLAGOTHIER, M. MARTINS PINTO (BA1 Polytech), S.REXHEP (BA2 Maths), R. DENDIEVEL (BA3 Maths), W. DE DONDER (Ingénieur), C. FESTRAETS, C. VAN HOOSTE (Profs de Maths), DUPONT avec T (Détective), J.C. JUNCKER (Premier Ministre Luxembourgeois) et DIEU (divinité, créateur).