Printemps des sciences 2008.

LE CHAPEAU DE HARRY POTTER.

Activité présentée par les étudiants de 3Npri de la HEFF.
Et leurs professeurs Annie GOOVAERTS et Anne BACCU.

Une collaboration de

- LA CELLULE INFOR-SCIENCES/ULB

http://www.ulb.ac.be/inforsciences/newsletter/docs/index.html/

- L'UREM/ULB

http://dev.ulb.ac.be/urem/

- LA HEFF CATÉGORIE PÉDAGOGIQUE

110 Boulevard Lemonnier 1000 Bruxelles

http://www.brunette.brucity.be/cf/LISsupF.cfm

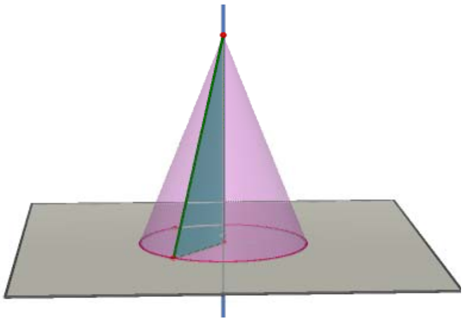
Première phase : le cône.

Objectifs : Définir un cône de révolution.
Développer la surface latérale d'un cône.

Déroulement et matière:

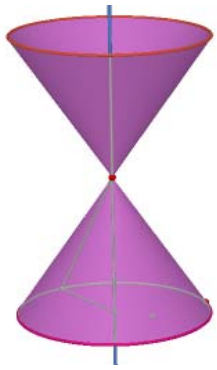
a) Mise en situation.
Harry Potter prend sa baguette magique par un bout, l'autre bout décrit un cercle. Il aperçoit une forme et décide d'en faire un chapeau.

Fig 1



b) Observation, analyse et description de la forme.
La forme obtenue est un solide.
Aucune face n'est un polygone, c'est un corps rond.
Il possède un sommet et 2 faces ; l'une en forme de disque, la base et l'autre non plane, la face latérale. Il a une arête en forme de cercle. On l'appelle le cône.
Il est engendré par la rotation d'un segment de droite autour d'un axe (passant par le sommet et le centre du disque de base), on dit que c'est un solide de révolution. Le segment qui engendre le cône est une génératrice du solide
Remarque : Un cône mathématique(Fig 2) est une surface engendrée par une droite génératrice passant par un point d'un cercle et un point fixe extérieur au plan de ce cercle, le sommet du cône. Il s'agit donc d'une surface illimitée.

Fig 2



Le cône solide est une partie de cône mathématique limitée par le sommet et un plan coupant toutes les génératrices et ne comprenant pas le sommet. En particulier, si ce plan est perpendiculaire à l'axe, le cône solide est de révolution.
Nous nous intéressons ici au cas particulier du cône de révolution mais certaines propriétés restent vraies dans un cas plus général.

Nous allons fabriquer un chapeau par atelier de 3 à 5 enfants. Il faut en faire un patron.

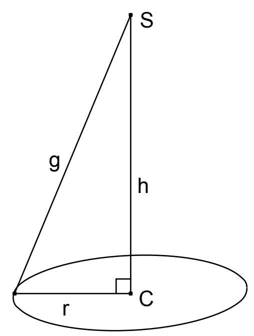
c) Développement de la surface latérale d'un cône (de révolution).
Si on découpe la surface latérale le long d'une génératrice, on peut la mettre à plat. On observe que tous les points du cercle de base sont à égale distance du sommet. Le

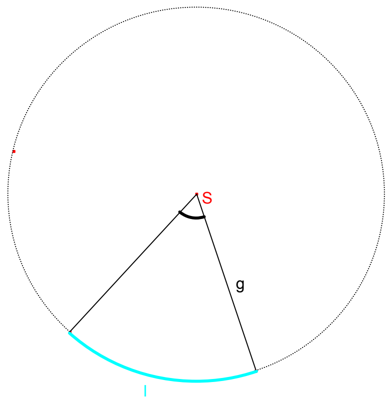
développement de la surface latérale est donc un secteur circulaire d'un cercle dont le centre correspond au sommet du cône et le rayon à la longueur g d'une génératrice. La longueur de l'arc de cercle qui le limite égale celle du cercle de la base (2π r).
L'angle au centre est proportionnel à la longueur de l'arc. On peut donc calculer l'angle du secteur en fonction de la longueur du cercle de base ou de son rayon r à partir de la relation « un arc d'une longueur de 2πg correspond à un angle au centre de 360°».

la longueur de l'arc (cm)	Angle (degrés)
$2\pi g$	360°
x r/g.	x r/g
$2\pi r$	360° x r/g.

où
r= rayon du disque de base
g= longueur de la génératrice.

Rem : La génératrice g, la hauteur h du cône et le rayon r de la base sont liés par la relation de Pythagore $g^2=h^2+r^2$. (Deux de ces données permettent de calculer la 3ème).

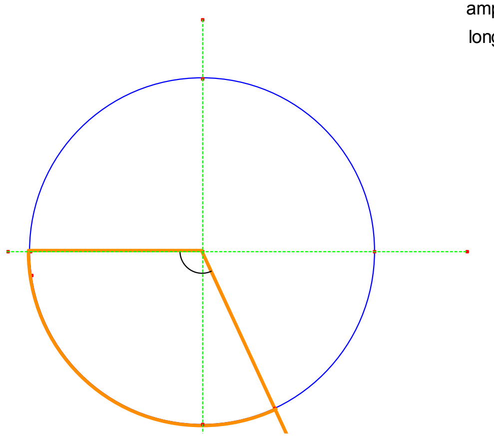




Le problème à résoudre ici est de calculer l'angle nécessaire connaissant la circonférence de base (tour de tête à mesurer) et la longueur g de la génératrice (celle de la baguette)
Exemple : Pour une génératrice (baguette) de 28cm et un tour de tête de 50cm, l'amplitude de l'angle au centre est de 360° X 50 / (2π X 28) = 102°.

Aide méthodologique
Il faut d'abord faire comprendre que l'angle est proportionnel à la longueur de l'arc.
La proportionnalité peut être expliquée à l'aide d'un éventail ou d'une décoration de crème glacée en papier abeille.
Calcul illustré avec Cabri : exposé\proportion angle-arc.fig

rayon = 4,00 cm pi*r = 12,58 cm
amplitude: 115,0 °
longueur de l'arc: 8,04 cm



	amplitude	longueur
1	122.9	8.59
2	90.0	6.29
3	180.0	12.58
4	270.0	18.87
5	120.0	8.39
6	60.0	4.20
7		

Deuxième phase : les sections planes du cône.

Objectifs : Découvrir des droites et des courbes planes sur la surface du cône.
Reproduire des coniques par pliage et/ou par construction.
Placer ces coniques et une droite sur le cône.

Déroulement :

a) Mise en situation.
Harry Potter aperçoit un faisceau lumineux plan qui éclaire son chapeau en y formant des dessins. Il décide de décorer son chapeau avec des perles de lumière. Les dessins sont différents selon l'orientation du plan lumineux. A réaliser avec un faisceau formant un plan lumineux éclairant un cône translucide. Voici les différentes possibilités :

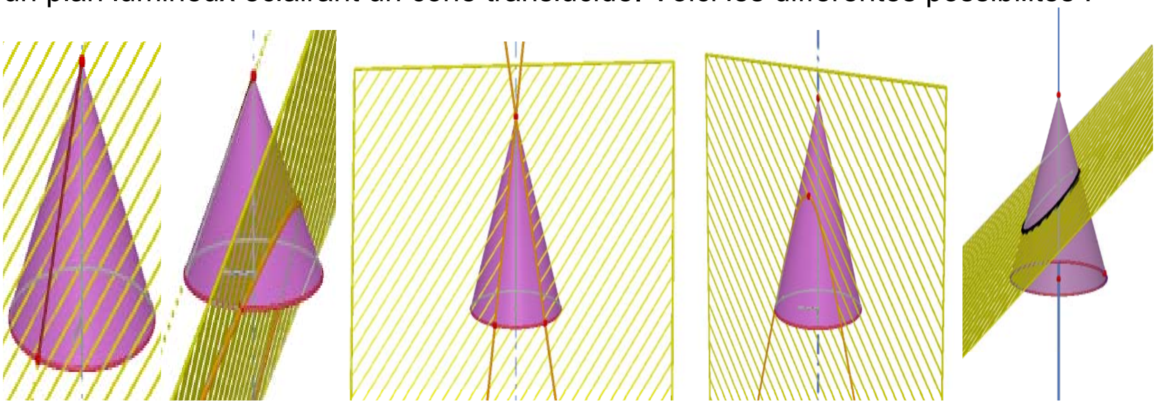
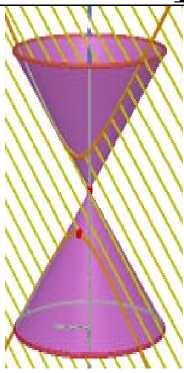


Fig 3 fig 4 fig 5 fig 6 fig 7

b) Observation, analyse et description des sections.
Nous nous intéressons au cas de plans qui ont plus d'un point commun avec le cône.
Les formes obtenues sont des lignes situées dans un plan, ce sont des sections planes du cône, des coniques.
Selon la position du plan on peut avoir une courbe, une droite ou deux droites* :*
Fig 3 une génératrice : le plan est tangent au cône (il passe par le sommet).
Fig 4 une parabole: le plan est sécant et strictement parallèle à une génératrice.
Fig 5 deux génératrices sécantes au sommet : le plan est sécant et passe par le sommet
Fig 6 une hyperbole : le plan est sécant et strictement parallèle à 2 génératrices.
Fig 7 une ellipse : le plan coupe toutes les droites génératrices.

**Remarque : Un cône solide (ici le chapeau) ne donne que des segments et des arcs limités de courbes tandis que le cône mathématique fournit les droites et les courbes complètes. Dans le cas de l'hyperbole on n'aperçoit qu'une seule branche tandis qu'un cône mathématique donne les 2 branches de l'hyperbole. Comparer la fig 8 à la fig6.*

Fig.8



c) Construction des coniques.

1) par pliage.

Feuille de consignes pour l'ellipse et l'hyperbole:

- ❖ Choisir un point, C, et tracer un cercle de centre C
- ❖ Choisir un point P, pas trop près de C et qui n'appartient pas au cercle
- ❖ Plier la feuille de façon à amener le point P sur le cercle
- ❖ Marquer le pli
- ❖ Répéter ce pliage de nombreuses fois en amenant le point P sur d'autres points du cercle pour faire apparaître une courbe

NB : ceux qui placent le 2ème point à l'intérieur du cercle obtiennent une ellipse, les autres (point à l'extérieur du cercle) une hyperbole.

Feuille de consignes pour la parabole:

- ❖ Tracer une droite d et choisir un point, F en dehors de d
- ❖ Plier la feuille de façon à amener le point F sur la droite.
- ❖ Marquer le pli
- ❖ Répéter ce pliage de nombreuses fois en amenant le point P sur d'autres points de la droite pour faire apparaître une courbe

2) par dessin.

Chacun dessine la conique superposable à celle de son pliage.

Feuille de consignes pour dessiner l'ellipse du jardinier:

- ❖ Marquer sur un bristol, 2 points situés à même distance que les 2 points C et P du pliage.
- ❖ Déterminer la longueur de la ficelle (= rayon du cercle): piquer une punaise dans la corde et l'enfoncer au point C, tendre la corde et transpercer la ficelle avec l'autre punaise à l'endroit où la ficelle coupe le cercle.
- ❖ Enfoncer les deux punaises munies de la ficelle dans les 2 points marqués sur le bristol.
- ❖ Tendre la corde avec la pointe du crayon et tracer une courbe en déplaçant le crayon

💣 : La corde doit être bien tendue mais attention de ne pas arracher les punaises.

Feuille de consignes pour dessiner l'hyperbole

- ❖ Marquer sur un bristol, 2 points situés à même distance que les 2 points C et P du pliage.
- ❖ Attacher les bouts de 2 cordes (> rayon du cercle) par un nœud.
- ❖ Piquer une punaise dans l'autre extrémité d'une corde et l'enfoncer au point C.

- Tendre par le noeud les 2 cordes superposées et transpercer la 2ème corde avec l'autre punaise à l'endroit où la ficelle coupe le cercle.
- Enfoncer les deux punaises munies des ficelles dans les 2 points marqués sur le bristol.
- Tendre les cordes à partir du nœud, la première en ligne droite l'autre en ligne brisée par la pointe du crayon et tracer une courbe en déplaçant le nœud.

: Les cordes doivent être bien tendues mais attention de ne pas arracher les punaises.

NB : le traçage de l'hyperbole à la ficelle peut s'avérer difficile car il nécessite une certaine habilité. On peut alors utiliser les mêmes consignes que pour la parabole.

Feuille de consignes pour dessiner la parabole:
- Courber le fil électrique en suivant la courbe.
- Reporter sur un bristol en suivant le tracé du fil électrique.

3) traçage sur le chapeau.

Feuille de consignes pour réaliser des gabarits.
- Découper le bristol le long du trait.
  Pour l'ellipse procéder en poinçonnant le long du trait.
  NB : On peut découper un bristol le long d'un cercle (=ellipse particulière).
- Prendre un par un les gabarits et pour chacun :
  les placer pour qu'ils s'adaptent au cône
  tracer légèrement la courbe en se guidant du gabarit
- Placer des gommettes (perles de lumière) le long du trait.

Synthèse à l'aide de CABRI : pliages ellipse_hyperbole.fig
Parabole pli_lieu.fig

On peut expliquer par superposition des segments [AE] et [EP] dans le pliage ou commenter les fichiers Cabri qui « justifient » les constructions et définissent les coniques en temps que lieu.

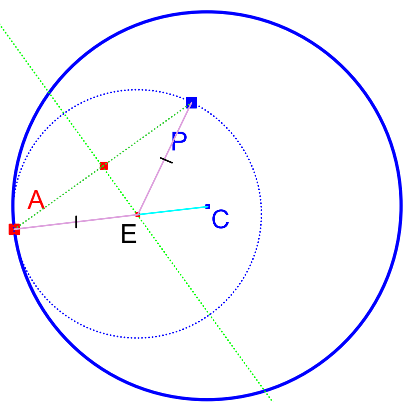
Lien entre l'ellipse par pliage et l'ellipse du jardinier.

P est fixe à l'intérieur du cercle.

Bouton pour faire apparaître la courbe.

Si tu déplaces A tu obtiens plusieurs pliures qui enveloppent une courbe

E est un point de l'ellipse.
|CA| =|CE|+|EA|
=|CE|+|EP|
=longueur de la corde.



Une ellipse est le lieu des points dont la somme des distances à 2 points fixes, les foyers (C et P), est constante.

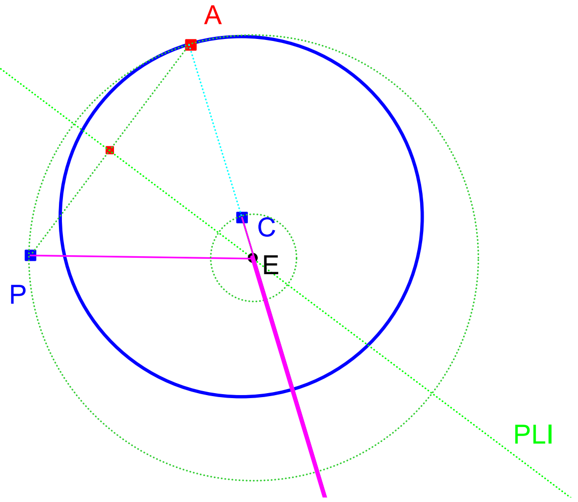
Lien entre l'hyperbole par pliage et l'hyperbole à la ficelle.

P est fixe à l'extérieur du cercle.

Bouton pour faire apparaître la courbe.

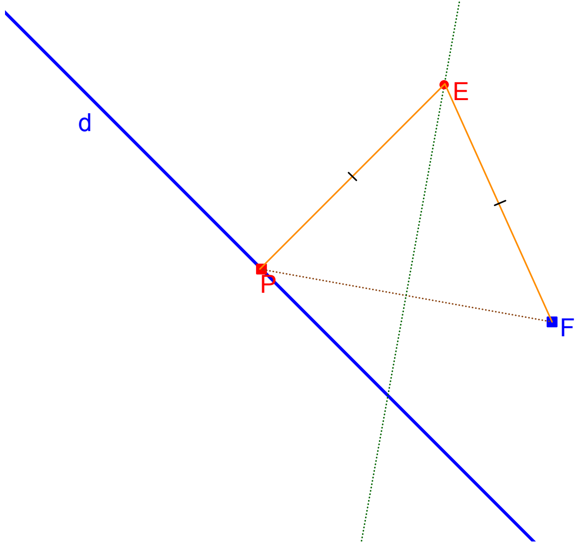
Si tu déplaces A tu obtiens plusieurs pliures qui enveloppent une courbe

E est un point de l'hyperbole.
|CA| = |EA| - |CE|
= |EP| - |CE|
=différence de longueur des 2 cordes.



Une hyperbole est le lieu des points dont la (valeur absolue de la) différence des distances à 2 points fixes, les foyers (C et P), est constante.

Lien entre la parabole par pliage et sa définition comme lieu



déplacer le point rouge sur la droite d.

|PE|=|FP|

Bouton pour faire apparaître la courbe.

Bouton pour dessiner la courbe.

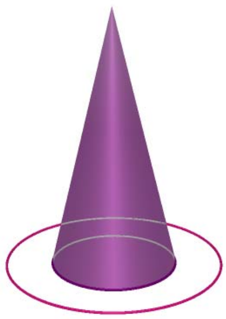
Une parabole est le lieu des points équidistants d'un point fixe F, le foyer, et d'une droite fixe d.

Annexes.

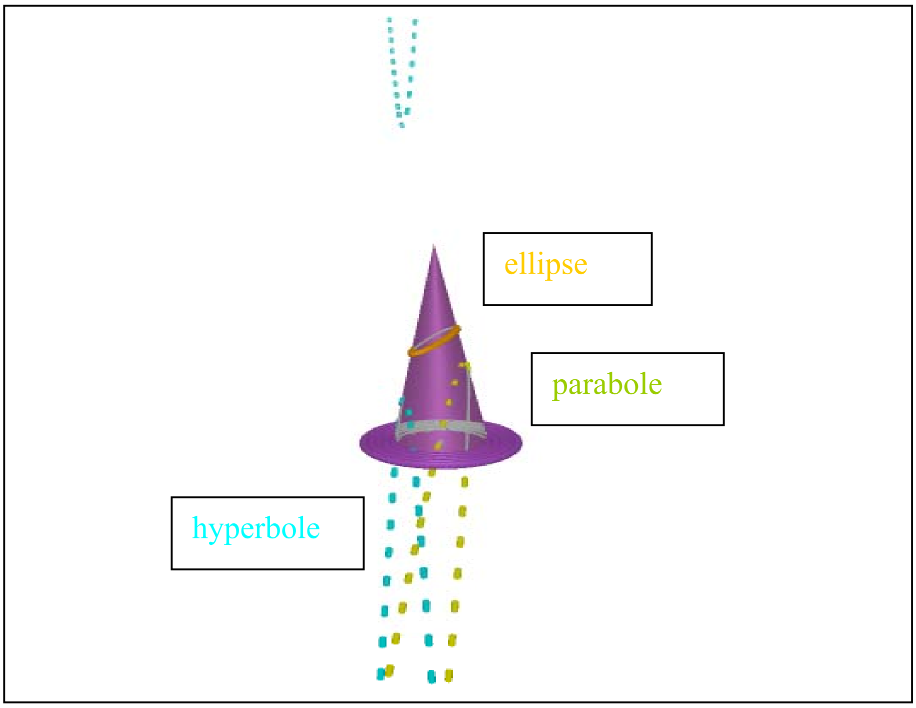
✓ Activités en réserve :

1) Reconnaître les courbes obtenues sur les photos ou les objets présentés.
   Ceci permet de faire un lien entre mathématique et environnement.
2) Expliquer des propriétés intéressantes des rayons passant par un foyer de l'ellipse ou de la parabole (réflexion des rayons lumineux, ondes sonores ou hertziennes).
3) Faire un rebord au chapeau : il s'agit de le placer sur un support rond formé de 2 cercles concentriques le plus petit des 2 rayons étant celui de la base du cône.
   NB Percer le trou de la tête nécessite de calculer le rayon de la base. Coller le rebord nécessite de laisser des parties de l'intérieur du disque.

Fig.9



Voici un chapeau décoré d'une ellipse, d'une hyperbole et d'une parabole.
En réalité les courbes se prolongent au-delà du chapeau.



NB : Les courbes ont été définies de 2 façons : comme section plane du cône et comme lieu géométrique. On peut démontrer l'équivalence des définitions. Cela doit être fait pour que la théorie mathématique soit cohérente. De même, il faut prouver que les courbes obtenues par pliage sont bien les coniques annoncées. Pour des enfants de moins de 14 ans, nous nous contentons de constatations et de quelques justifications par déduction.