Du cube au ballon de football

....

pour aboutir à la Terrre.

Animation de géométrie

présentée par Jacques LEFEBVRE
aidé de Charlotte BOUCKAERT

niveau : De la 3ème à la 6ème primaire

ULB UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES, UNIVERSITÉ D'EUROPE

UREM

Sommaire

Durée de l'activité: 2 heures Code : BRU21 Lieu: bâtiment NO / local N4-117

Description de l'activité	Quelques rappels à propos des polygones (jusqu'à l'hexagone). Présentation et constructions de quelques polyèdres (cube, prisme, pyramide) Constructions à partir de papier, de patrons et de pailles. Découverte et présentation des polyèdres réguliers Relation d'EULER Le ballon de foot : passage de l'icosaèdre à l'icosaèdre tronqué.
Objectifs pédagogiques	Découverte de la géométrie spatiale et des solides à partir de nombreux modèles.
Pré-requis des élèves	Notion de base de géométrie : Points, Segments de droite, angles. Droites parallèles, droites perpendiculaires, angles droit. Utilisation d'une latte. Utilisation d'un rapporteur(pour les 5èmes et 6èmes)

Matériel de l’élève :

Latte
Rapporteur.
Bâton de colle
Papier collant.
Une paire de ciseaux pour papier.
Crayon.
Marqueur.

Matériel fourni :

Pour chacun :

Feuilles de papier et patron d’un prisme ou d’une pyramide.

Par table :

Pailles.
Différents polygones :
- 6 triangles équilatéraux.
- 4 carrés.
- 4 pentagones réguliers.
- 3 hexagones réguliers.

Sur des tables :

Modèles de solides.
Ballon de football.

Affiché :

Carte d’Europe.

Introduction :

La géométrie est une partie des mathématiques qui étudie les figures du plan et les solides, leurs transformations ou déformations.

Les figures planes :

1. Qu'est ce qu'une figure plane ?

   Une figure plane pourrait être défini comme une figure que l'on peut représenter entièrement sur une feuille de papier.

2. Liste de figures planes vues en primaire :
   → les élèves énumèrent les figures planes étudiées en classe :

   triangle,
   quadrilatères : carré, rectangle, parallélogramme, losange, trapèze.
   Pentagone, hexagone.
   Cercle, disque.

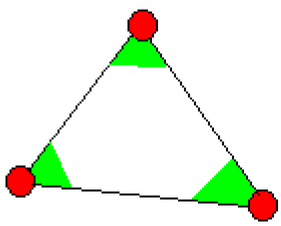
3. Classifications des figures planes :

   On va considérer uniquement les figures formées de points et de (segments de) droites. On élimine ainsi les figures « courbes » : le cercle et le disque.

   Les segments de droites formants les figures se nomment ***côtés***.
   Ces côtés se coupent des points nommés ***sommets***.
   Les coins à l'intérieur des figures s'appellent ***angles***.

   Commençons par « la plus petite » c'est à dire par la figure fermée comportant le moins de points et de (segments de) droites.

   3a Le triangle :
   Figure plane fermée formée de trois segments de droite.

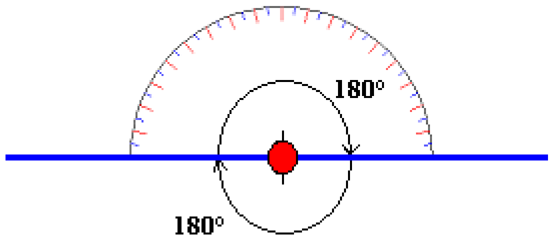


La figure possède :
3 sommets.
3 côtés.
3 angles .

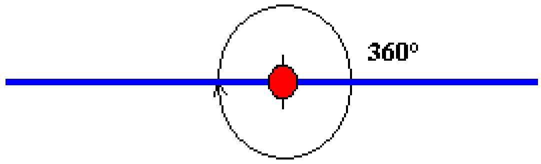
On mesure les côtés avec une *latte* graduée en centimètres (unité de longueur)
On mesure les angles avec un *rapporteur* gradué en degré (unité de mesure d'un angle).

Etude des angles d'un triangle :

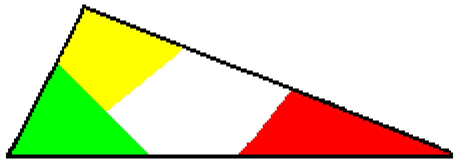
→ les élèves tracent sur une feuille une droite et un point sur cette droite. En plaçant le centre du rapporteur en ce point, il recherchent l'angle formé .au dessus de la droite. De même pour l'angle du dessous.

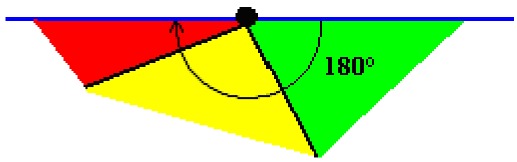


Conclusion : L'angle total mesure 360°



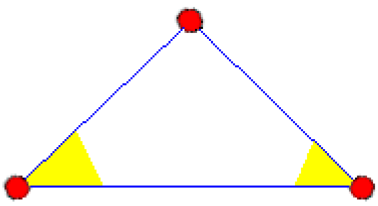
On calcule la somme des mesures des angles d'un triangle quelconque en plaçant les angles d'un modèle suivant une ligne droite..



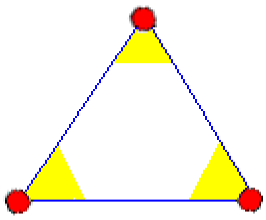


Conclusion :
La somme des mesures des angles d'un triangle vaut 180°

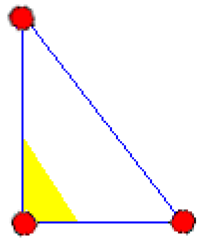
On distingue plusieurs types de triangles :



Les triangles isocèles :
Deux côtés égaux et deux angles égaux.



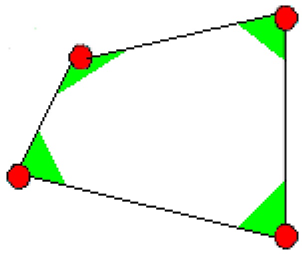
Les triangles équilatéraux :
Deux côtés égaux et deux angles égaux

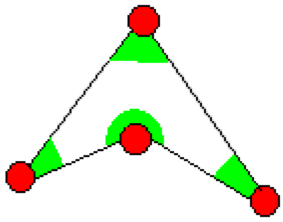


Les triangles rectangles avec un angle droit.

3b Les quadrilatères plans :

Figure plane fermée formée de quatre segments de droite.



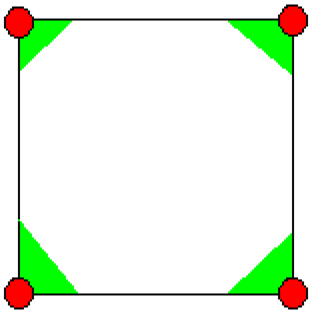


La figure possède :
- 4 sommets.
- 4 côtés.
- 4 angles .

Les plus connus sont :

Le carré :

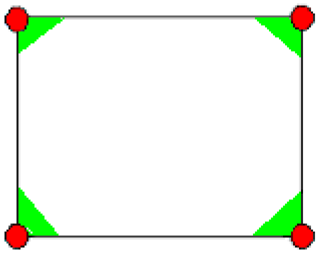
Quadrilatère ayant quatre côtés égaux et quatre angles droits.



La figure possède :
- 4 sommets.
- 4 côtés qui sont égaux.
- 4 angles qui sont des angles droits.

Le rectangle :

Quadrilatère ayant quatre angles droits.

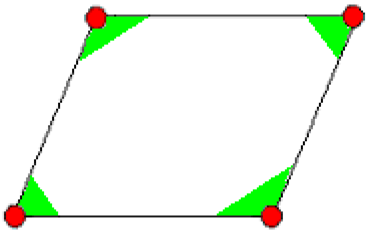


La figure possède :

- 4 sommets.
- 4 côtés.
- 4 angles qui sont des angles droits.

Le parallélogramme :

Quadrilatère ayant des côtés opposés sont parallèles deux à deux .

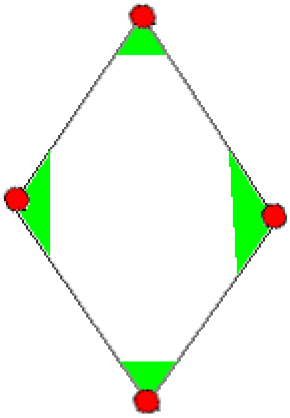


La figure possède :

- 4 sommets.
- 4 côtés qui sont parallèles2 à 2 .
- 4 angles.

Le losange :

Quadrilatère dont les côtés ont tous la même longueur.

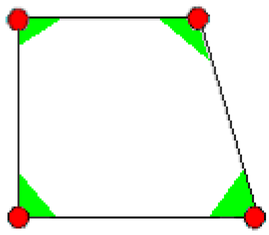


La figure possède :

- 4 sommets.
- 4 côtés qui sont égaux .
- 4 angles .

Le trapèze :

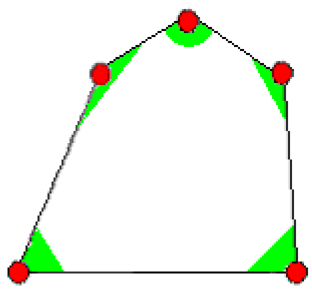
Quadrilatère dont deux côtés opposés (appelés bases) sont parallèles.

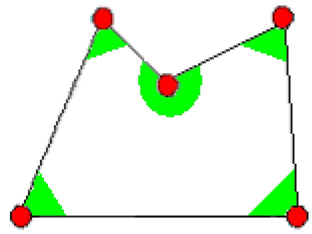


La figure possède :
- 4 sommets.
- 4 côtés dont deux sont parallèles. .
- 4 angles .

3c. Les pentagones :

Figure plane formée de cinq segments de droite.

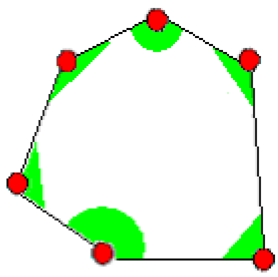


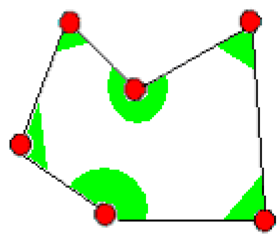


La figure possède :
- 5 sommets.
- 5 côtés.
- 5 angles .

3d. Les hexagones :

Figure plane formée de six segments de droite.





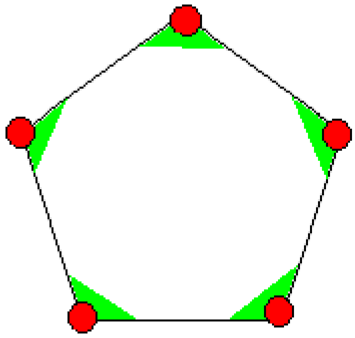
La figure possède :
- 6 sommets.
- 6 côtés.
- 6 angles .

On donne à toutes ces figures un nom plus général : le nom de polygones

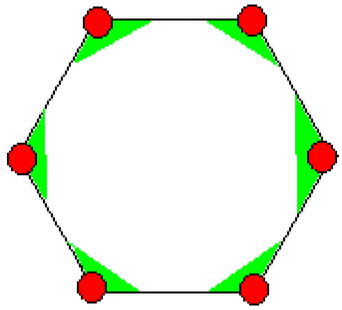
4. Les polygones réguliers :

Parmi ces polygones, ont ne va considérer que ceux qui ont des côtés et des angles égaux. On ne prendra ainsi que :

- Les triangles équilatéraux.
- Les carrés
- Les pentagones formés de quatre côtés égaux et de quatre angles égaux.



- Les hexagones formés de cinq côtés égaux et de cinq angles égaux.



On nommera ces dernières figures des polygones réguliers.
On élimine ainsi : le rectangle, le parallélogramme, le losange, le trapèze.

→ présenter différentes figures et demander aux élèves s'ils sont réguliers ou non , le nom pour les côtés, sommets et angles.

→ construction avec des pailles : chaque élève construit un triangle avec 3 pailles et un carré avec quatre pailles.

Les solides :

1. Qu'est ce qu'un solide ?

   Un solide est une construction fermée faite à partir de polygones.

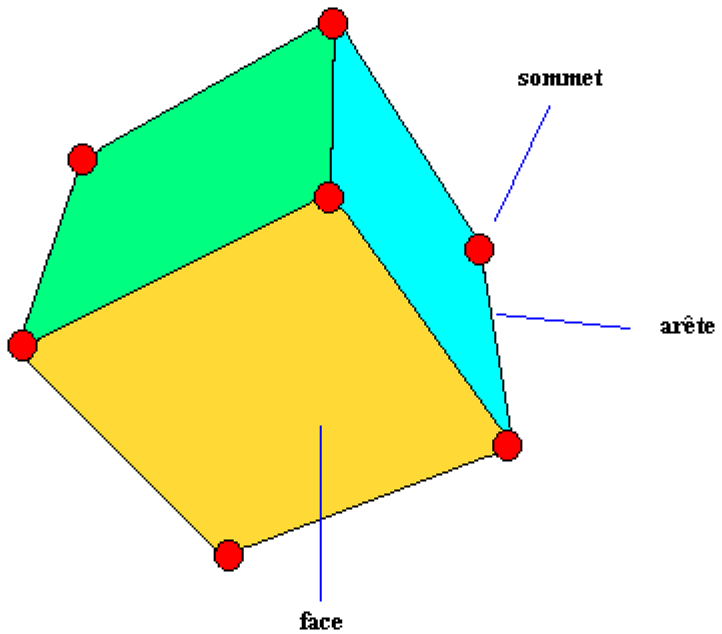
2. Quels sont ces solides ?

   → les élèves donnent le nom de solides découverts en classe.

   Prisme, pavé (parallélépipède) , pyramide, cube.
   Cylindre, cône, sphère.

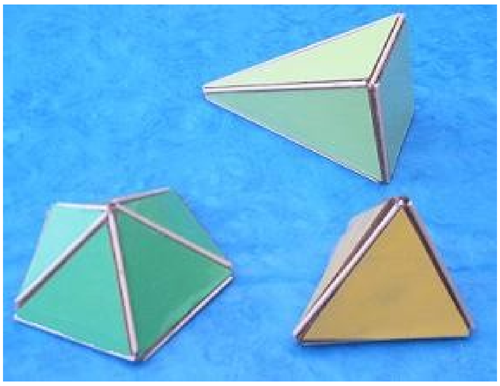
3. Classifications des solides :

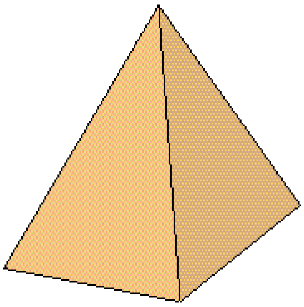
   On envisage ici les solides fermés construits avec des polygones.
   On élimine ainsi les figures « rondes » tels que le cylindre, le cône et la sphère.

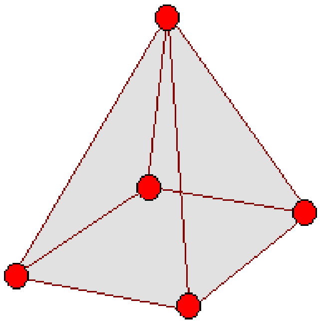


Les polygones formant le solide se nomment ***faces***.
les côtés et sommets de ces faces étant appelés respectivement ***arêtes*** et ***sommets***.

3a. La pyramide:

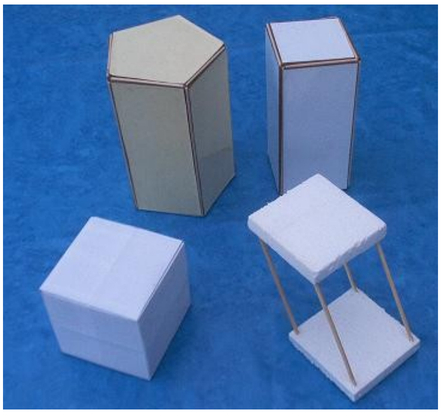


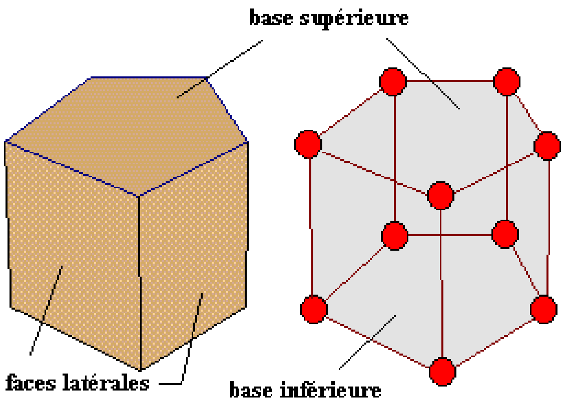




Une pyramide est un solide obtenu en reliant les sommets d'un polygone (la base) à un point (hors de la base) nommé sommet de la pyramide. Les faces latérales obtenues sont ainsi des triangles.

3b. Le prisme :

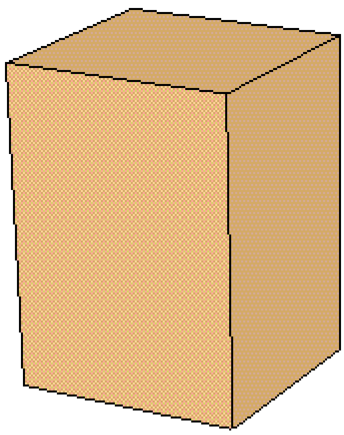
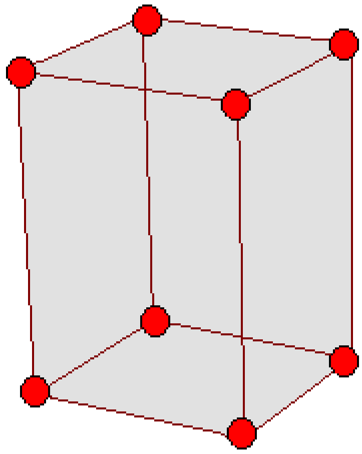




Un *prisme* est un solide constitué par deux polygones identiques appelés bases et parallèles complété par des parallélogrammes, des rectangles ou des carrés joignants les arêtes des bases. Ces derniers sont les faces latérales.

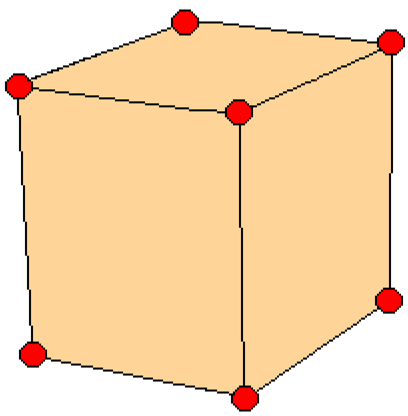
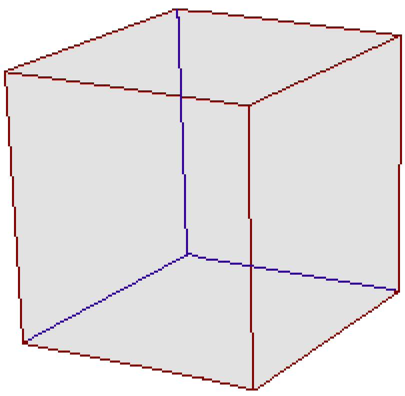
Cas particulier :

- *Le pavé(parallélépipède rectangle):*

Un pavé est un prisme dont toutes les faces sont des rectangles ou des carrés.

- *Le cube :*

Un cube est un prisme dont toutes les faces sont des carrés.

→ *les élèves recherche les prismes, pyramides et pavé et les classent sur une table.*
Construction d'un prisme ou d'une pyramide à partir d'un patron.
Construction d'une pyramide à base triangulaire à partir de 4 triangles de pailles.
Construction d'un cube des carrés de pailles

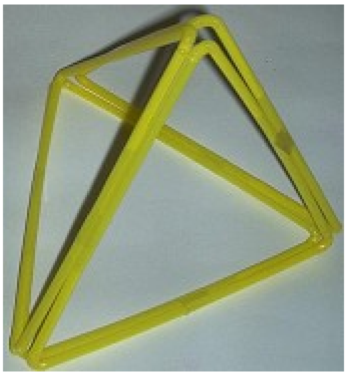
3c. Les solides à faces identiques.

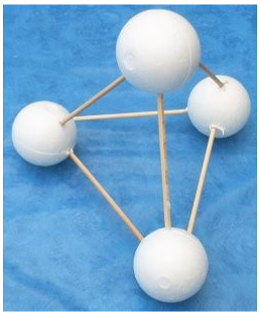
- Les solides avec des triangles en leur sommet :

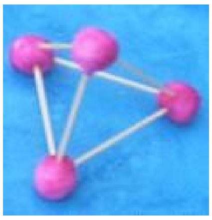
→ Construction de «toit »

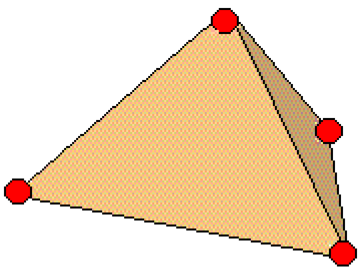
Les élèves essayent de construire un toit avec 3,4,5 triangles équilatéraux
Recherche des solides ayant 3,4,5 triangles équilatéraux. en leur sommet et classement de tels solides sur une table.

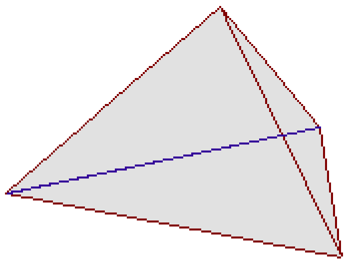
Les solides avec trois triangles équilatéraux en leur sommet :



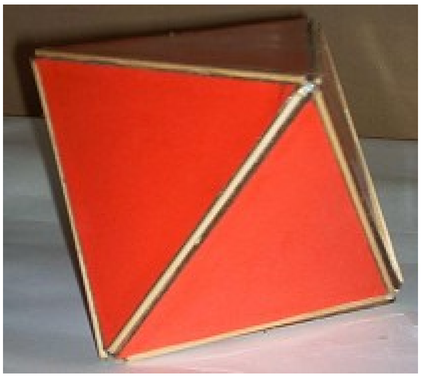
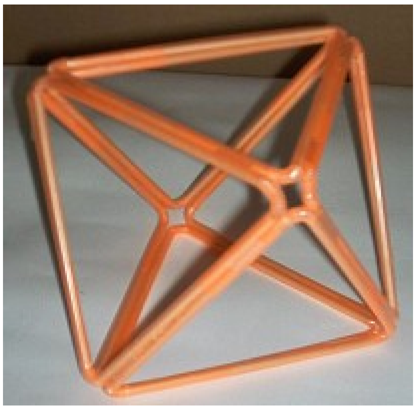


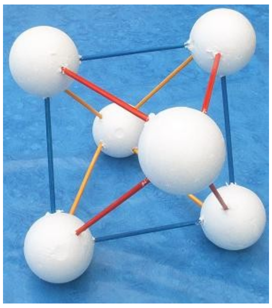
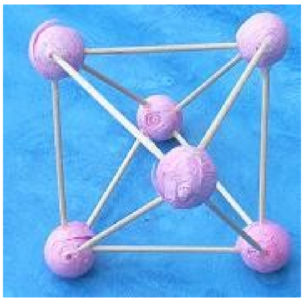


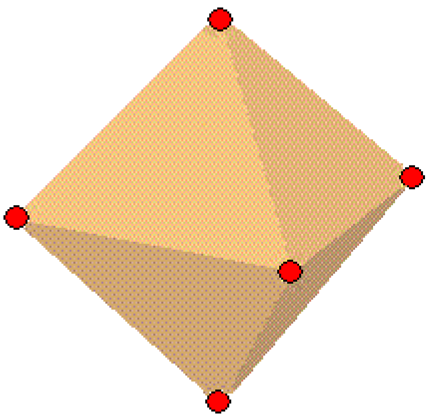
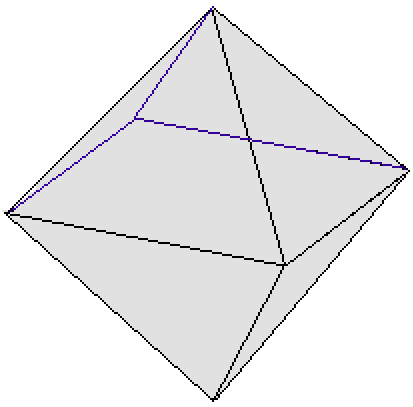




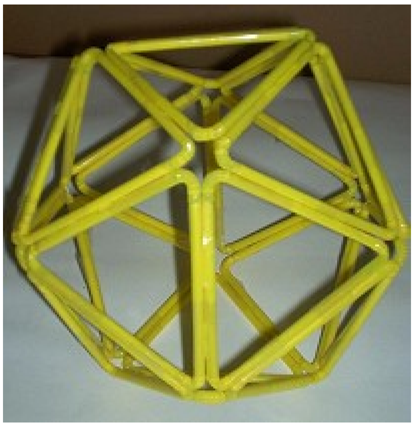
Les solides avec quatre triangles équilatéraux en leur sommet :

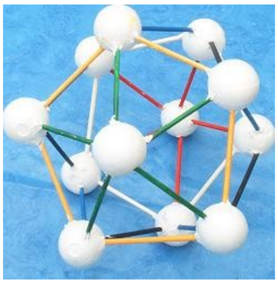



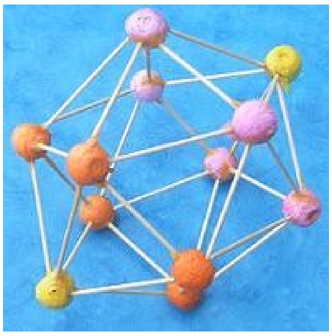



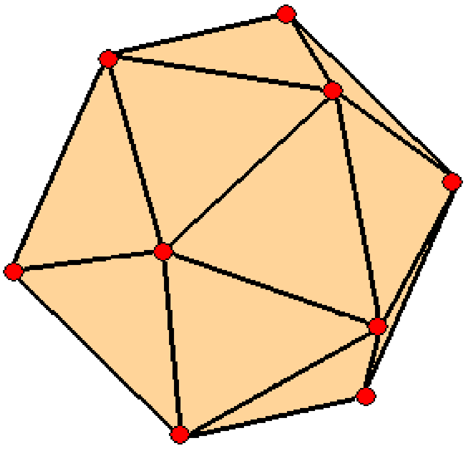



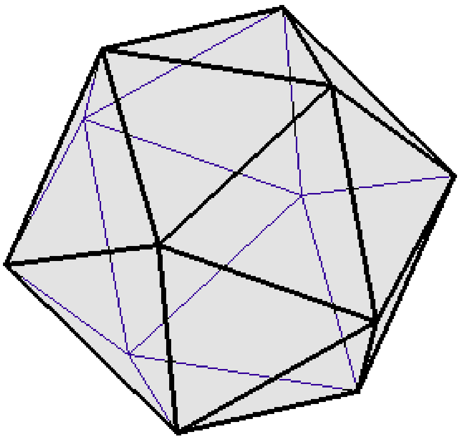
Les solides avec cinq triangles équilatéraux en leur sommet :



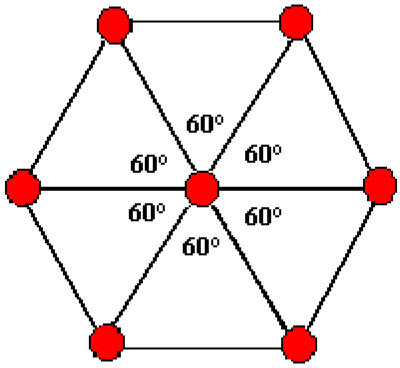








→Les élèves essayent maintenant de construire un toit avec 6 triangles équilatéraux.
Pas possible : on a un pavage du plan.



Pas de possibilité d'avoir un « toit » avec 6 triangles :

Les six triangles sont équilatéraux. Leurs angles sont tous égaux. Comme la somme des mesures des angles d'un triangle vaut 180°, chacun a pour mesure 60° (3 x 60° = 180°).
Ainsi les 6 triangles associés en un sommet couvrent le plan (6 x 60° = 360°)

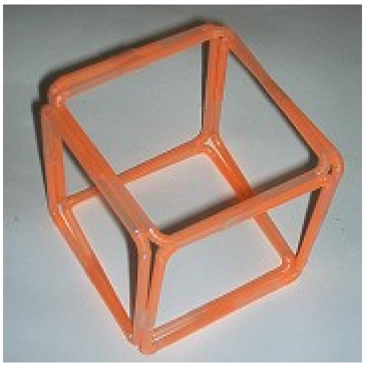
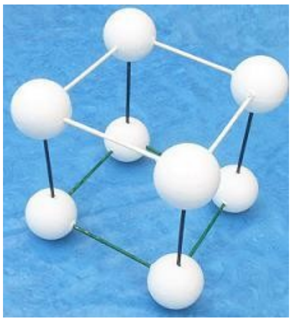
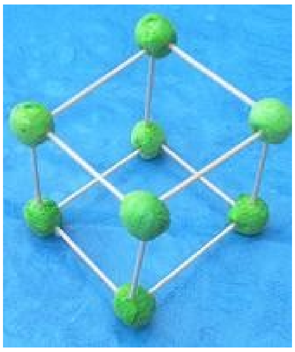
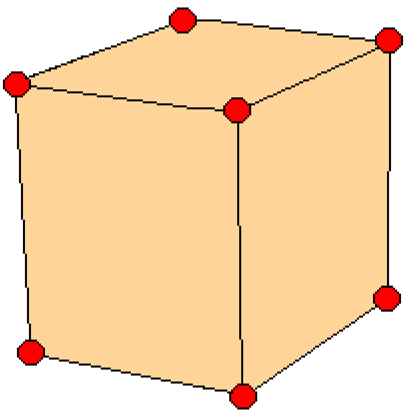
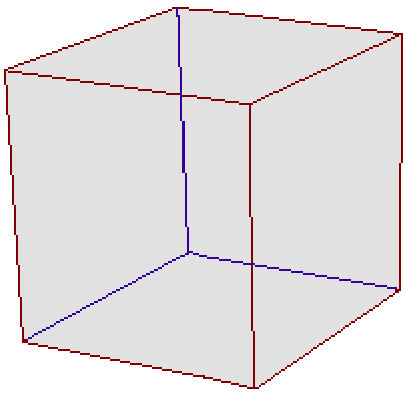
- Les solides avec des carrés en leur sommet :

  → Construction de «toit »

  les élèves essayent de construire un toit avec 3 carrés

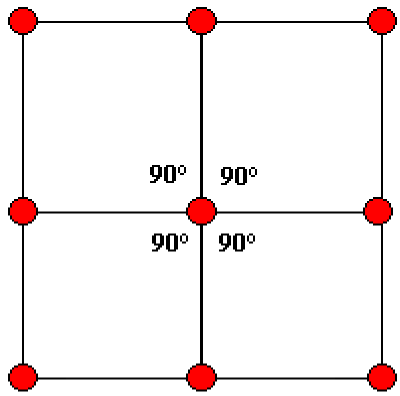
  Recherche des solides ayant 3 carrés en leur sommet et classement de tels solides sur une table.

Les solides avec trois carrés en leur sommet : le cube

→ Les élèves essayent maintenant de construire un toit avec 4 carrés

Pas possible : on a un pavage du plan.



Pas de possibilité d’avoir 4 carrés formant un « toit » :

Les angles d’un carrés mesurent tous 90°.

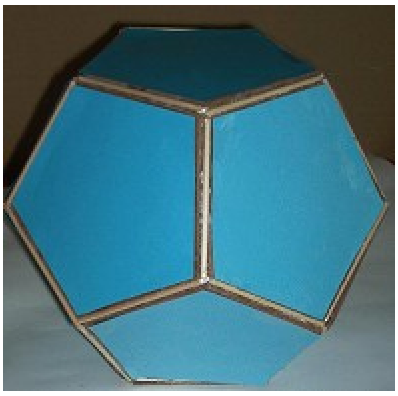
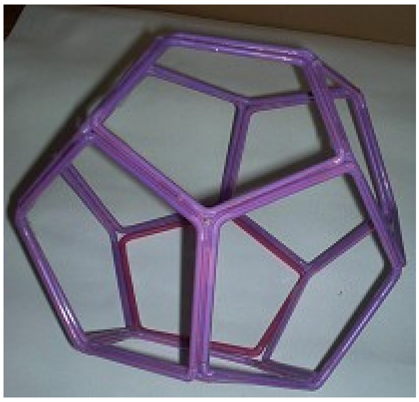
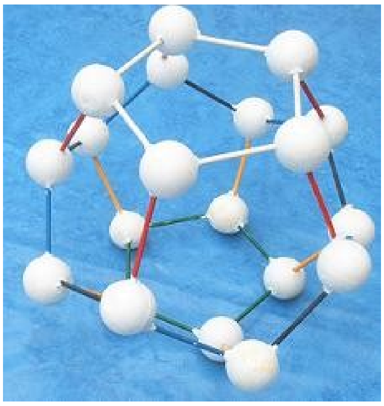
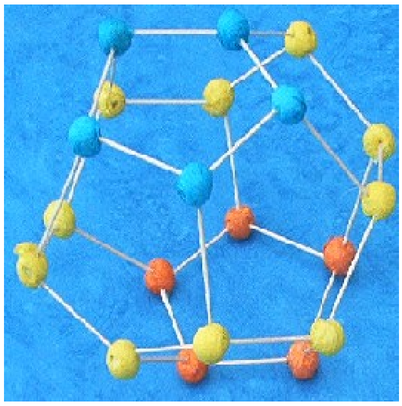
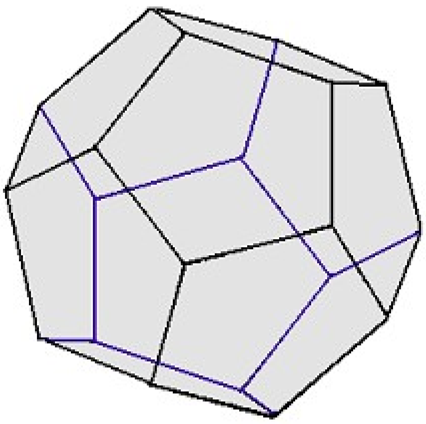
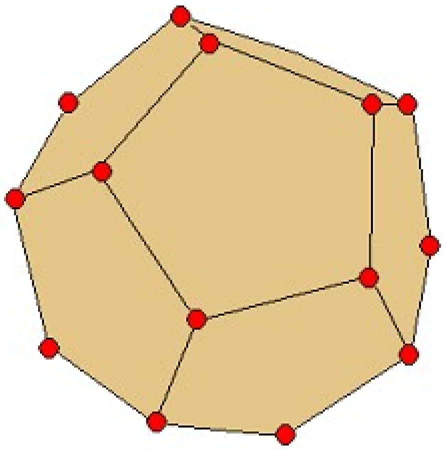
les 4 carrés associés en un sommet couvrent le plan (4x 90° = 360°)

- Les solides avec des pentagones en leur sommet :

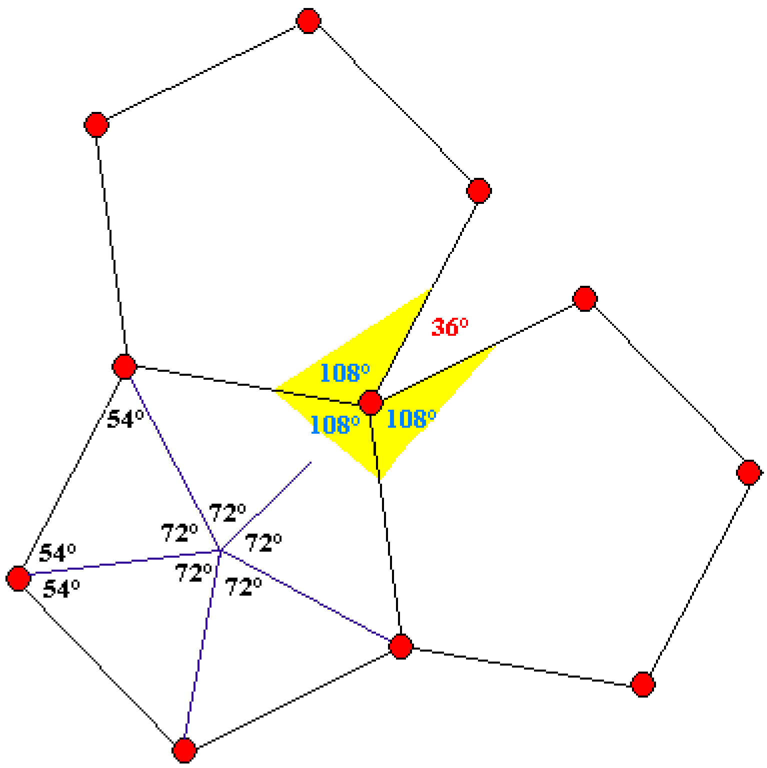
  → Construction de «toit »

  Les élèves essayent de construire un toit avec 3 pentagones.

  Recherche des solides ayant 3 pentagones en leur sommet et classement de tels solides sur une table.

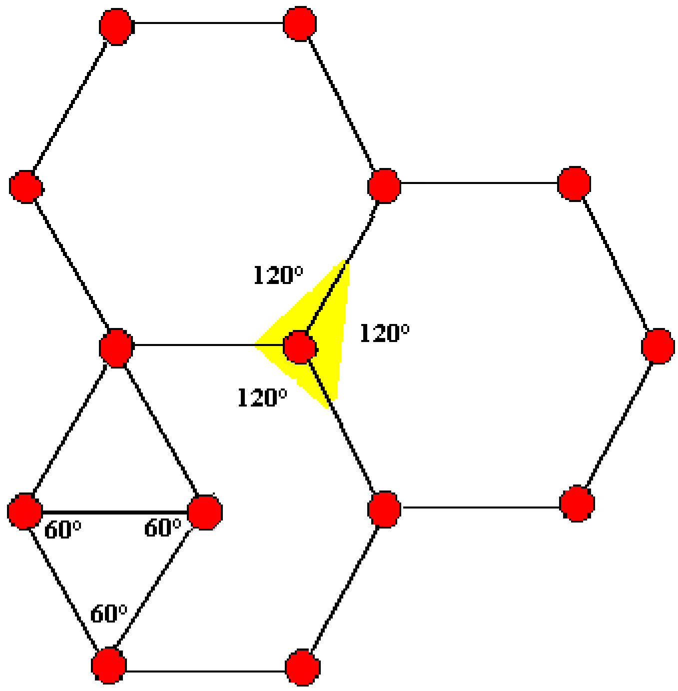
→ Les élèves essayent ensuite de construire un toit avec 4 pentagones. Pas possible.



Si du centre d'un pentagone je joints les sommets, j'obtient 5 triangles isocèles. Les 5 angles au centres couvrent le plan et mesurent ensemble 360°. Ainsi, chaque angle des triangles situés au centre du pentagone valent 72° (360° / 5 = 72°) . Comme la somme des mesures des angles d'un triangle vaut 180°, les deux autres angles de chaque triangle isocèle mesure chacun 54° . (180°-72°=108° et comme les angles sont égaux 108°/2 = 54°).
Les angles de 3 pentagones associés en un sommet mesurent 324° (3 x 108°). Il reste donc un angle de 56° (360°-324°) qui ne peut convenir pour avoir un quatrième pentagone.

- Les solides avec des hexagones en leur sommet :

  → Construction de «toit »
  les élèves essayent de construire un toit avec 3 hexagones. Pas possible : on a un pavage du plan.



Si du centre d'un pentagone je joints les sommets, j'obtient 6 triangles équilatéraux. Les 6 angles au centres couvrent le plan et mesurent ensemble 360°. Ainsi, chaque angle des triangles valent chacun 60° (360° /6=60°).
Chaque angle de l'hexagone est mesure donc 120°.
Ainsi Les angles de trois hexagones associés en un sommet couvre tout le plan (120° x 3 = 360°)

- Les solides avec des autres polygones en leur sommet :

Il n’est pas possible de construire d’autre solides avec des polygones dont le nombre de côtés est supérieur à six .

Type de polygone	*Angles au centre*	*Angles du polygone*
Pentagone (5 côtés)	360° / 5 = 72°	180° - 72° = 108°
Hexagone (6 côtés)	360° / 6 = 60°	180° - 60° = 120°
Octogone (8 côtés)	360° / 8 = 45°	180° - 45° = 135°
Décagone (10 côtés)	360° / 10 = 36°	180° - 36° = 144°

Plus il y a de côtés, plus les angles des polygones sont grands et ainsi supérieurs à 120°. On ne peut alors former des « toits » avec de tels polygones.

- **Conclusion :**

  Il y a uniquement 5 solides avec pour faces des polygones réguliers identiques :

  Les solides avec 3, 4 ou 5 triangles en chaque sommet.
  Le solide avec 3 carrés en chaque sommet.
  Le solide avec 3 pentagones en chaque sommet.

  Ces cinq solides se nomment polyèdres réguliers.

4. Recherche du nombre de faces, de sommets et d'arêtes parmi les solides découverts :

- *Pyramide de base triangulaire:*
  Nombre de faces :
  base : un triangle.
  Faces latérales : 3 triangles
  Total : 4 faces.
  Nombre de sommets :
  3 sommets de la base et le sommet de la pyramide.
  Total : 4 sommets.
  Nombre d'arêtes :
  3 arêtes du triangle de la base.
  3 arêtes qui relient le sommet de la pyramide.
  Total : 6 arêtes.

- *Pyramide de base carrée* :
  Nombre de faces :
  base : un carré.
  Faces latérales : 4 triangles
  Total : 5 faces.
  Nombre de sommets :
  4 sommets de la base et le sommet de la pyramide.
  Total : 5 sommets.
  Nombre d'arêtes :
  4 arêtes du carré de la base.
  4 arêtes qui relient le sommet de la pyramide.
  Total : 8 arêtes.

- *Pyramide de base pentagonale* :
  Nombre de faces :
  base : un pentagone.
  Faces latérales : 5 triangles
  Total : 6 faces.
  Nombre de sommets :
  5 sommets de la base et le sommet de la pyramide.
  Total : 6 sommets.
  Nombre d'arêtes :
  5 arêtes du pentagone de la base.
  5 arêtes qui relient le sommet de la pyramide.
  Total : 10 arêtes.

- *Pavé de base carrée :*
  Nombre de faces :
  bases : 2 carrés.
  Faces latérales : 4 rectangles
  Total : 6 faces.
  Nombre de sommets :
  4 sommets de la base inférieure.
  4 sommets de la base supérieure.
  Total : 8 sommets.
  Nombre d'arêtes :
  4 arêtes du carré de la base inférieure.
  4 arêtes du carré de la base supérieure.
  4 arêtes qui relient les sommets des bases.
  Total : 12 arêtes.

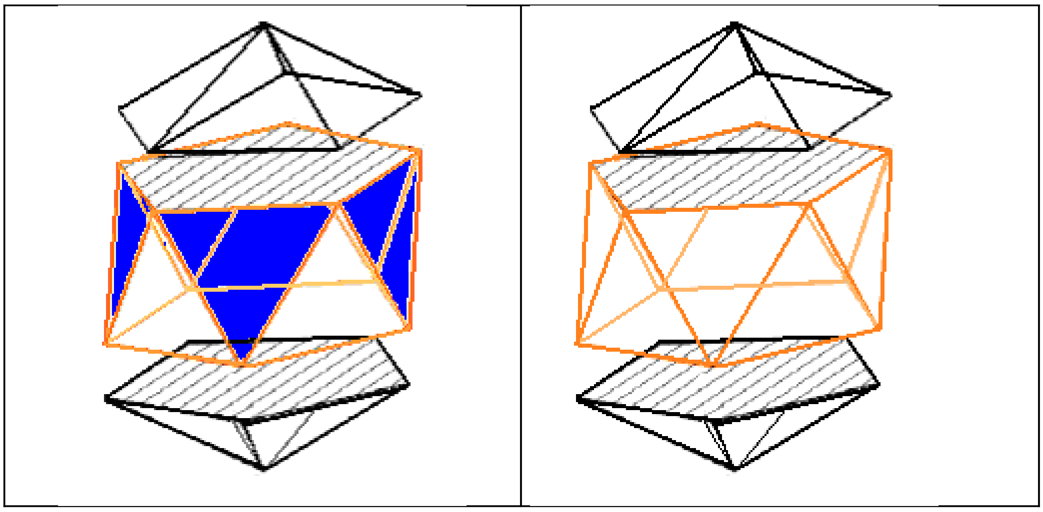
- *Prisme de base pentagonale :*
  Nombre de faces :
  bases : 2 pentagones.
  Faces latérales : 5 rectangles
  Total : 7 faces.
  Nombre de sommets :
  5 sommets de la base inférieure.
  5 sommets de la base supérieure.
  Total : 10 sommets.
  Nombre d'arêtes :
  5 arêtes du carré de la base inférieure.
  5 arêtes du carré de la base supérieure.
  5 arêtes qui relient les sommets des bases.
  Total : 15 arêtes.

- *Cube :*
  Nombre de faces :
  Bases : 2 carrés.
  Faces latérales : 4 carrés
  Total : 6 faces.
  Nombre de sommets :
  4 sommets de la base inférieure.
  4 sommets de la base supérieure.
  Total : 8 sommets.
  Nombre d'arêtes :
  4 arêtes du carré de la base inférieure.
  4 arêtes du carré de la base supérieure.
  4 arêtes qui relient les sommets des bases.
  Total : 12 arêtes.

- *Polyèdre régulier ayant 4 triangles en chaque sommet :*
  Nombre de faces :
  Si l'on met le solide sur une « pointe » , on a :
  4 triangles en haut et 4 triangles en bas
  total : 8 faces.
  Nombre de sommets :
  2 sommets (un en haut et un en bas)
  4 sommets autour.
  Total : 6 sommets.
  Nombre d'arêtes :
  4 arêtes partant du sommet supérieur.
  4 arêtes partant de la « pointe ».
  4 arêtes tout autour.
  Total : 12 arêtes

- *Polyèdre régulier ayant 5 triangles en un sommet :*

  Nombre de faces :



Si l'on met le solide sur une « pointe » , on a :
5 triangles en haut formant une pyramide à base pentagonale
A chaque côté de ce pentagone est « accroché » un triangle.
On a alors 5 nouveaux triangles.
On peut faire de même pour les triangles du bas.
Total : 2 x (5 + 5) = 20 faces.

→ Vérification en mettant une étiquette numérotée sur chacune des faces.

Nombre d'arêtes :

D'après le modèle avec arêtes colorées :

Couleurs du modèle : blanc, vert, bleu, rouge, noir, jaune.

Il y a 5 arêtes de chaque couleur.

Total : 30 arêtes.

D'après le nombre de faces et le modèle «squelette ».

Il y a 20 faces.

Chaque faces est formée d'un triangle avec 3 côtés.

Total du nombre de côtés : 20 x 3 = 60 côtés.

Or chaque arête est formé de 2 cotés.

Total des arêtes : 60/2 = 30

Nombre de sommets :

D'après le modèle avec boules colorées :

Couleurs du modèle : jaune, bleu, orange.

Il y a 5 boules bleues, 5 boules oranges et 10 boules jaunes.

Total : 20 sommets.

D'après le modèle avec boules blanches :

Si l'on met le solide sur une « pointe » , on a :

Une boule en haut et cinq boules tout autour au niveau inférieur.

On peut faire de même pour le bas.

Total : 2 x (1 + 5) = 12 sommets.

- *Polyèdre régulier ayant 3 pentagones en un sommet :*

Nombre de faces :

Si l'on pose le solide sur une face , on a :

Bases : 2 pentagones.

A chaque côté du pentagone d'une base est « accroché » un autre pentagone, soit 10 faces supplémentaires.

Total : 12 faces.

→ Vérification en mettant une étiquette numérotée sur chacune des faces.

Nombre d'arêtes :

D'après le modèle avec arêtes colorées :

Couleurs du modèle : blanc, vert, bleu, rouge, noir, jaune.

Il y a 5 arêtes de chaque couleur.

Total : 30 arêtes.

D'après le nombre de faces et le modèle «squelette ».

Il y a 12 faces.

Chaque faces est formée d'un pentagone, polygone de 5 côtés.

Total du nombre de côtés : 12 x 5 = 60 côtés.

Or chaque arête est formé de 2 cotés.

Total des arêtes : 60/2 = 30

Nombre de sommets :

D’après le modèle avec boules colorées :
Couleurs du modèle : jaune, mauve, orange.
Il y a 2 boules jaunes, 5 boules oranges et 5 boules mauves.
Total : 12 sommets.

D’après le modèle avec boules blanches :
Si l’on pose le solide sur une face , on a :
5 sommets sur la base supérieure.
A chacun de ces sommets est « accroché » un nouveau sommet. On a ainsi 5 sommets supplémentaires.
5 sommets sur la base inférieure.
A chacun de ces sommets est également « accroché » un sommet. On a donc 5 sommet en plus.
Total : 4 x 5 = 20 sommets.

Nom des polyèdres réguliers:

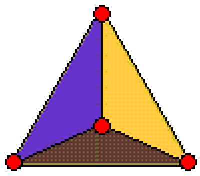
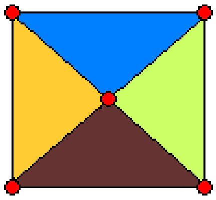
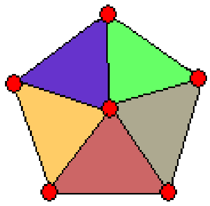
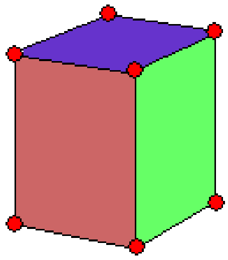
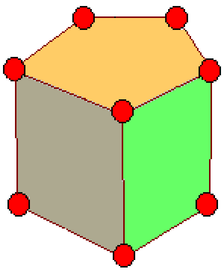
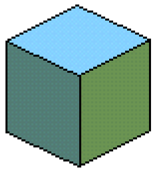
Le nom de ces cinq polyèdres dépend du nombre de faces :

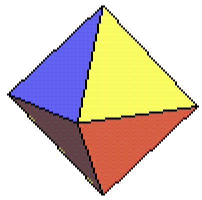
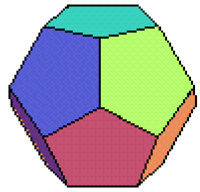
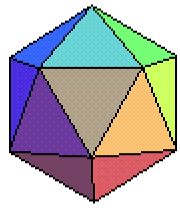
polyèdres à 4 faces : tétraèdre (4 se dit tetra en grec).
polyèdres à 6 faces : hexaèdre ou cube (6 se dit hexa en grec).
polyèdres à 8 faces : tétraèdre (8 se octa dit en grec).
polyèdres à 12 faces : tétraèdre (12 se dodeca dit en grec).
polyèdres à 20 faces : tétraèdre (20 se icosa dit en grec)

→ On peut mettre en face de chaque polyèdre son nom sur la table des modèles.

5. Relation entre le nombre de faces, sommets et arêtes :

Nous allons résumer nos calculs précédents dans un tableau :

nom	Nombre de				figures
	faces	sommets		arêtes	
tétraèdre régulier	4	+ 4	= 8	6	
Pyramide de base carrée	5	+ 5	= 10	8	
Pyramide de base pentagonale	6	+ 6	= 12	10	
Pavé de base carrée	6	+ 8	= 14	12	
Prisme de base pentagonale	7	+ 10	= 17	15	
Cube (Hexaèdre régulier)	6	+ 8	= 14	12	

octaèdre régulier	8	+ 6	= 14	12	
dodécaèdre régulier	12	+ 20	= 32	30	
icosaèdre régulier	20	+ 12	= 32	30	

Nous pouvons établir la relation donnée par Leonhard Euler:

Le nombre de faces additionnées au nombre de sommets
est égal
au nombre d'arêtes + 2.

ou sous une forme symbolique :

$$F + S = A + 2$$

où F est le nombre de faces.
S est le nombre de sommets.
A est le nombre d'arêtes.

Brève biographie de Leonhard EULER :

Leonhard Euler est né à Bâle en 1707 et mort à Saint-Pétersbourg en 1783. Il est issu d'une famille modeste vivant dans une ville près de Bâle en Suisse. Là, il suit des cours dans une école qui n'offre qu'un enseignement élémentaire et c'est son père qui l'initie aux premiers éléments des mathématiques. A 13 ans, il entre à l'Université de Bâle pour y étudier la philosophie et le droit. Il obtient son diplôme de philosophie à 16 ans mais son père qui souhaite le voir devenir pasteur, le pousse vers des études de théologie.

Très tôt, il devient l'élève de *Johann Bernoulli* (1667 -1748) un ami de son père, éminent mathématicien qui remarque son talent pour les maths.

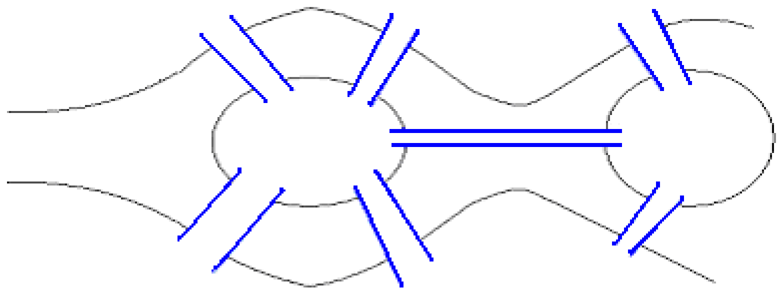
La suisse ne lui permettant pas de faire une carrière ambitieuse dans les sciences, il se voit appelé à Saint-Pétersbourg en 1727 par *Catherine II*, impératrice de Russie.
Par la suite il travaille en tant que professeur de mathématiques à Saint-Pétersbourg..

La santé d'Euler était assez fragile. A 33 ans, il perd un oeil et bientôt il ne peut distinguer que de grands caractères tracés à la craie sur une ardoise, puis son oeil gauche en raison d'une cataracte.
En 1741, *Frédéric II le Grand*, roi de Prusse, le fait venir à Berlin pour rejoindre l'Académie de sciences. Mais il ne s'entend que moyennement avec ce dernier qui le surnomme le "Cyclope mathématique" en référence à son handicap. Il retourne à Saint-Pétersbourg en 1766, ville qu'il ne quittera plus.

Son oeuvre est considérable. Euler intervint dans les trois domaines fondamentaux de la science de son époque : l'astronomie (orbites planétaires, trajectoires des comètes), les sciences physiques (champs magnétiques, hydrodynamique, optique, nature ondulatoire de la lumière,...), et les mathématiques, Malgré qu'il ai été complètement aveugle pendant les dix-sept dernières années de sa vie, il produit presque la moitié de la totalité de son travail durant cette période

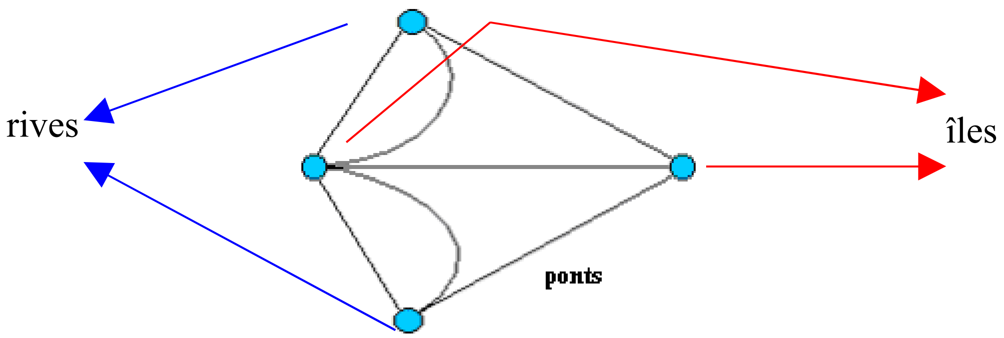
Euler a résolu le problème des promenades de Königsberg. L'anecdote est la suivante :

Au 18ème siècle, les habitants de Königsberg (actuellement Kaliningrad, région de la Russie, frontalière de la Pologne et de la Lituanie) aimaient se promener le dimanche.
La ville de Königsberg située sur la rivière Pregel comprenait 7 ponts, disposés selon le schéma ci-dessous.



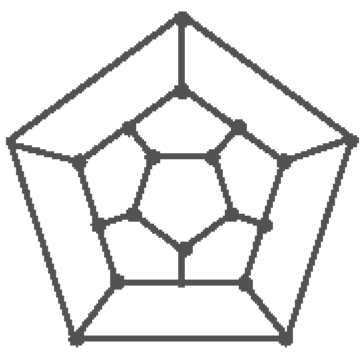
Le souhait des habitants de Königsberg était de faire un trajet passant une fois et une seule par chaque pont. Comment faire ?

Leonhard Euler donna à ce problème la première résolution mathématique formelle. Il représenta la promenade de la façon suivante :



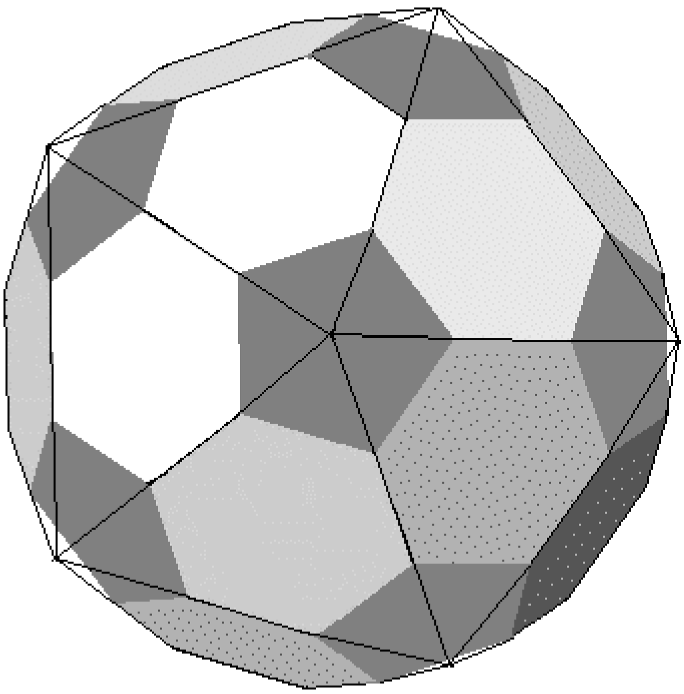
Ce problème est le début de la *théorie des graphes*. C’est en représentant les solides d’une manière similaire qu’il trouva la formule liant le nombre de faces, de sommets et d’arêtes.

Par exemple, on peut reproduire le dodécaèdre comme ci-contre.



6. De l'icosaèdre au ballon de football :

Dans le jargon des journalistes sportifs, le « ballon rond » désigne souvent le football, par opposition à son frère ennemi le rugby qui utilise un « ballon ovale ».
Le ballon idéal aurait évidemment la forme d'une sphère, mais comment fabriquer un tel objet dans la réalité ? Les ballons style « ballons de plage », en « tranches de melon» ne sont pas assez résistants, les ballons faits de bandes découpées non plus - on les réserve au volley -, les ballons en caoutchouc moulé (comme au basket) pas assez souples.
Il faut donc une structure adaptée précisément au football, une balle qui évolue dans toutes les directions avec la même facilité, dont la vitesse et la trajectoire ne dépendent pas d'autres facteurs que du coup de pied du joueur qui l'envoie.
Les concepteurs vont se tourner de manière naturelle vers les polyèdres réguliers, à faces planes évidemment, mais qui, une fois gonflés, vont «imiter » le mieux la sphère. Les mathématiciens savent depuis l'Antiquité qu'il n'existe que cinq polyèdres réguliers.
Le polyèdre qui possède le plus de faces est l'icosaèdre (20 faces en forme de triangles équilatéraux qui se rejoignent par cinq à chaque sommet), mais les sommets sont encore trop « pointus ».



Alors, on va le tronquer en coupant chaque arête au tiers de sa longueur, si bien que ce qui reste de chaque face triangulaire forme un hexagone, tandis que les pyramides enlevées à chaque sommet donnent lieu à des pentagones réguliers.
Le polyèdre obtenu s'appelle icosaèdre tronqué

Calcul du nombre de coutures de ce ballon de football :

Recherche du nombre de faces :

- Chaque « pointe » (sommet) devient un pentagone après avoir tronquer l'icosaèdre régulier. Comme il y a12 sommets dans l'icosaèdre, on aura 12 faces pentagonales.
- Chaque face triangulaire de l'icosaèdre devient après coupures un hexagone. Comme l'icosaèdre possède 20 faces, on obtient 20 faces hexagonales pour l'icosaèdre tronqué.

Total du nombre de faces : 12 + 20 = **32**

Recherche du nombre de sommets :

Chaque « pointe » (sommet) devient un pentagone qui a 5 sommets. Or l'icosaèdre possède 12 sommets.
Le nombre de sommets est donc de 12 x 5 = **60**

Recherche du nombre d 'arêtes (les coutures) :

Chaque « pointe » (sommet) se transforme en un pentagone avec 5 côtes.
Comme l'icosaèdre a 12 sommets, nous avons ajouté 12 x 5 côtés.
Nous avons donc au total 60 + 30 = **90** arêtes.

Nous pouvons le vérifier avec la relation d'EULER :

$$32 + 60 - 2 = 90$$

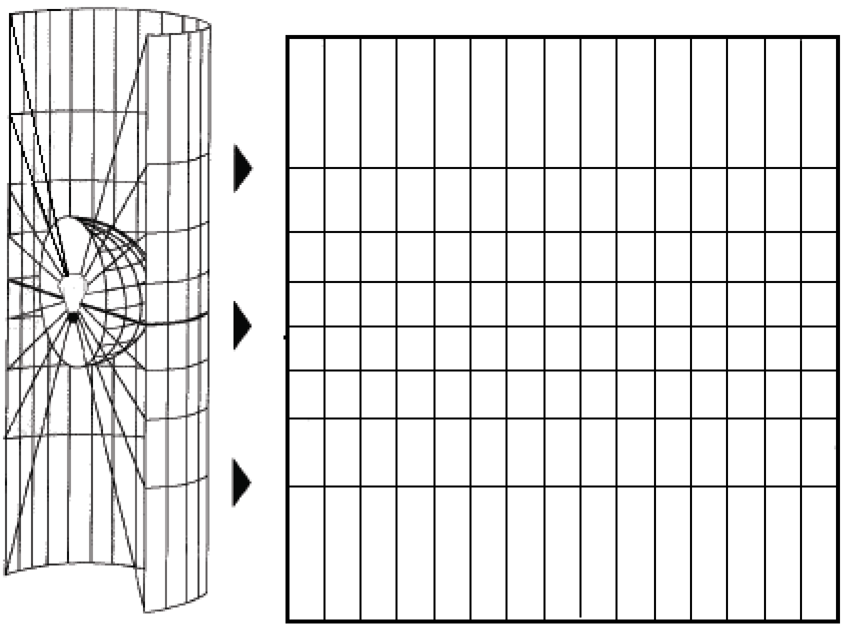
Il faut ainsi faire 90 coutures différentes pour construire le ballon de football.

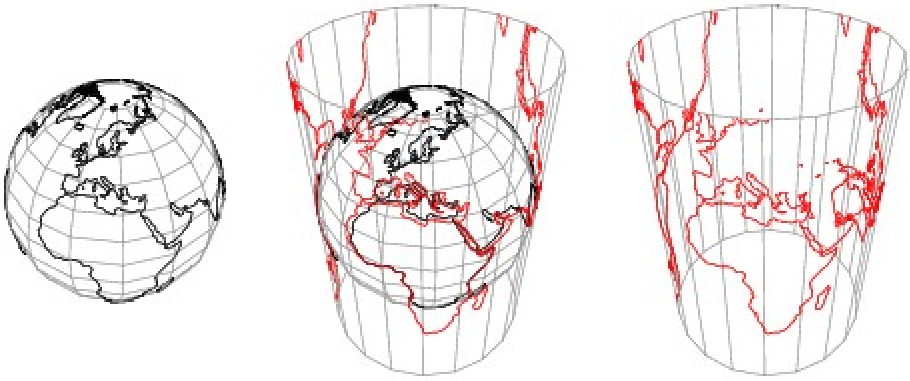
Du ballon de football à la terre.

Comme le ballon de football, notre terre est (presque) ronde. Mais on ne sait pas construire une sphère à partir d'un plan: Il faudrait plier le plan dans deux directions sans faire de pli. Cela est possible dans une seule direction mais impossible en prenant une seconde direction. C'est pour cela que l'on a créé notre ballon de football à partir d'un polyèdre tronqué formé de figures planes, la forme arrondie étant obtenue par déformation en insufflant à l'intérieur de l'air.
De même, il n'est pas possible d'aplatir une sphère sur un plan. Le patron d'une sphère n'existe pas. C'est pourquoi les représentations planes de la terre possède des erreurs, déformations et distorsions.

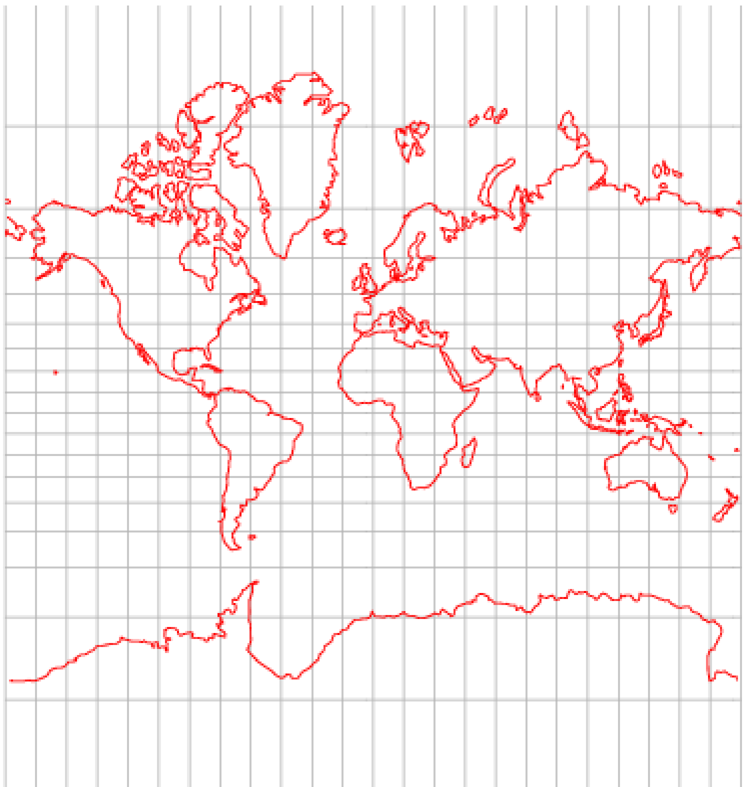
Une façon de représenter notre terre sur un plan est d'entourer la surface terrestre par un cylindre tangent à l'équateur.

On projette alors la surface terrestre sur le cylindre à partir du centre de la terre pour obtenir une carte de notre planète:





On peut ensuite dérouler le cylindre pour obtenir un carte plane :

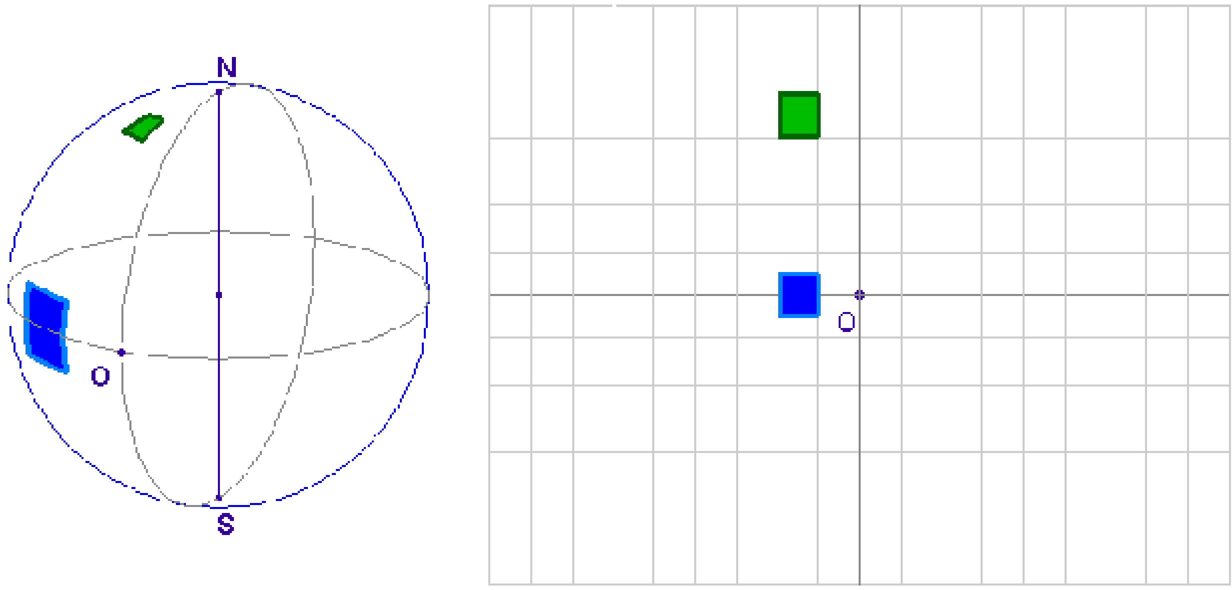


Les méridiens sont représentés par des droites parallèles équidistantes.

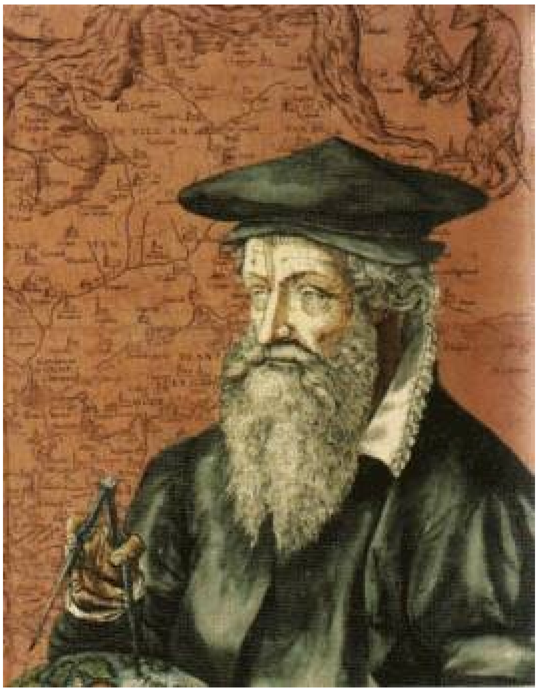
Les parallèles sont représentés par des droites orthogonales aux méridiens.

L'inconvénient de cette méthode est la distorsion des surfaces: plus l'on se rapproche des pôles, plus les surfaces sont exagérées, ce qui donne une plus grande importance aux zones polaires. Beaucoup de personnes sont persuadées que le Groenland a une taille comparable à celle de l'Amérique du Sud. En réalité, celle-ci est neuf fois plus grande.

De même, pour deux superficies identiques sur la carte, la surface réelle est plus petite vers les pôles.



Le premier à l'origine de cette représentation est le belge **MERCATOR**, l'un des fondateurs de la cartographie.



Gérard Mercator de son vrai nom Gerhard Kremer est né en 1512 à **Rupelmonde** , petit village près d'Anvers et de Saint Nicolas. Il fit d'abord des études de philosophie à Leuven et est diplômé en 1532. Il retourne quelque peu à Anvers mais revient à Leuven en 1532 où sous la tutelle du mathématicien et astronome Néerlandais Gemma Frisius il commence à étudier la cosmographie du ciel et de la terre. Après divers démélés avec les autorités ecclésiastiques, il s'installe sur les bords du Thin, à Duisbourg, à l'âge de 42 ans et accepte la chaire de cosmographie de l'université. C'est là qu'il fait ses importants ouvrages de cartographie. En 1569 parait sa carte du monde « ad usum Navigation »(pour l'utilisation de la navigation).

Mercator est ainsi à l'origine de la première projection du globe pour les navigateurs, ce qui fût très apprécié des marins à l'époque des Grandes Découvertes. La projection de Mercator s'apparente à la projection cylindrique. La projection cylindrique ne conserve pas les angles mais Mercator l'a modifiée en ajustant l'écartement des parallèles de façon à ce que la projection soit conforme(respecte les angles). Il était alors possible pour les marins de tracer leur route sur la carte comme une ligne droite.

Mercator mourut à l'âge de 82 ans et est enterré à Duisbourg.