PROBLEMATHS
20 octobre 2008

Problemath 4

L'égalité ci-dessous est-elle vraie ou fausse?

$$\frac{1}{sin\ 45° \ sin\ 46°} + \frac{1}{sin\ 47° \ sin\ 48°} + \ldots + \frac{1}{sin\ 133° \ sin\ 134°} = \frac{1}{sin\ 1°}$$

Problemath 5

Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite périodique s'il existe un nombre réel $T > 0$ tel que $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Pour quelle(s) valeur(s) de $n \in \mathbb{N}_0$ la fonction f_n définie par

$$f_n\ (x) = \sum_{k=1}^{n} cos(x\sqrt{k})$$

est-elle périodique?

Problemath 6

Un cadre en forme de carré, dont chaque côté mesure 1 mètre, a ses deux côtés latéraux verticaux. Une araignée minuscule, qui se trouve sur le côté supérieur, veut rejoindre le côté inférieur en sécrétant un fil vertical au bout duquel elle descendra à la vitesse constante de 1 mètre/minute.
D'autre part, deux insectes minuscules, animés chacun d'un mouvement rectiligne uniforme de 1 mètre/minute, se déplacent à l'intérieur du cadre. Chaque fois qu'ils touchent un côté, ils rebondissent sans modifier leur vitesse en faisant un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence. Les trajectoires des insectes ne passent jamais par un sommet du carré et ils n'entrent jamais en collision.
L'araignée, qui a soigneusement observé les mouvements des insectes, pourra-t-elle toujours choisir un point du côté supérieur et un instant t pour entamer sa descente à partir de ce point de telle façon que ni elle ni le fil auquel elle est suspendue ne soient touchés par un des insectes avant d'atteindre le bord inférieur?

Les solutions doivent nous parvenir au plus tard le vendredi 7 novembre à 16 heures

Solution du Problemath 1. Si $x = 0$, alors $y = 0$ et $z = 0$, ce qui fournit la solution $(0, 0, 0)$.
Si $x \neq 0$, alors $y \neq 0$ et $z \neq 0$, et on peut réécrire les 3 équations sous la forme

$$1 + \frac{1}{4x^2} = \frac{1}{y}, \qquad 1 + \frac{1}{4y^2} = \frac{1}{z}, \qquad 1 + \frac{1}{4z^2} = \frac{1}{x}$$

d'où on déduit que

$$(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2}) + (1 - \frac{1}{y} + \frac{1}{4y^2}) + (1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{4z^2}) = 0,$$

c'est -à- dire

$$(1 - \frac{1}{2x})^2 + (1 - \frac{1}{2y})^2 + (1 - \frac{1}{2z})^2 = 0$$

Ceci implique que $\frac{1}{2x} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2z} = 1$, qui fournit la solution $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Les seules solutions du système sont donc $(0, 0, 0)$ et $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Ont fourni une solution correcte:
N. RADU(élève de $6^{\text{ème}}$ à l'Athénée Charles Rogier à Liège), H.P. BUI, G. KERG, C. LONARDO (BA1 maths), M. GHEYSENS, Angelina JOLIE (BA2 maths) (Brad PITT sait-il que sa femme fait des Problemaths?), G.NISOL (BA2 polytech), S.REXHEP (BA3 maths), A. GOTTCHEINER (BA3 Solvay), G. VAN BEVER (MA2 maths), M. LESSINNES (MA2 polytech), N. RICHARD (assistant au Dépt de maths), C. VAN HOOSTE (assistant en polytech), F. DOIGNIE (ingénieur), Natalie PORTMAN (actrice), Tia HELLEBAUT(championne olympique du saut en hauteur), SPIDERMAN et TROLL MASTER.

Solution du Problemath 2. Soient r le rayon de la Terre, h la hauteur de la tour Eiffel, O le centre de la Terre, S le sommet de la tour, P l'un des deux points où la corde quitte la surface de la Terre pour filer en ligne droite vers le sommet S, et α la mesure de l'angle en O dans le triangle rectangle OPS. Comme $(r+h)^2 = r^2 + x^2$ et $\alpha = \ arccos\ (r/r+h)$, l'allongement de la corde vaut

$$2x - 2\alpha\ r = 2\sqrt{h^2 + 2hr} - 2r\ arccos(r/r+h),$$

c'est-à-dire (pour $r = 6400\ km$ et $h = 300\ m$) 387,2901653086...cm (Tia HELLEBAUT et Natalie PORTMAN ont calculé les 1000 première décimales après la virgule!).
Ont fourni une solution correcte:
N. RADU(élève de $6^{\text{ème}}$ à l'Athénée Charles Rogier à Liège), H.P. BUI, M. GODFRIND, G. KERG, M. HANCE, C. LONARDO, P. WEBER (BA1 maths), P. ANTONIK(BA1 physique), B. CALLEBAUT, N. FLAGOTHIER, C. GOBILLON, A.TOURE (BA1 polytech), I. CHARLIER, M. GHEYSENS, Angelina JOLIE (BA2 maths), G. NISOL (BA2 polytech), L. MAZIERS, J.N. WESTER (BA2 Haute Ecole Robert Schuman à Arlon), A. GOTTCHEINER (BA3 Solvay), G. VAN BEVER (MA2 maths), M. LESSINNES (MA2 polytech), W. DE DONDER , F. DOIGNIE, R. ENGLEBERT (ingénieurs), N. RICHARD (assistant Dépt de maths) , C. VAN HOOSTE (assistant en polytech),Alexandre WAJNBERG (journaliste scientifique à Radio Campus), Tia HELLEBAUT(championne olympique), Natalie PORTMAN (actrice), SPIDERMAN, TROLL MASTER et ZORGLUB.

Solution du Problemath 3. Voici la solution élégante de Germain VAN BEVER et de Natalie PORTMAN. Supposons (pour rire, car ce n'est pas vrai) que $ln\ x = p(x)/q(x)$ pour tout réel $x > 0$, où les polynômes p et q sont de degré m et n respectivement.
Comme $lim_{x\to+\infty}\dfrac{p(x)}{q(x)} = lim_{x\to+\infty} ln\ x = +\infty$, on a $m > n$.
Comme $lim_{x\to+\infty}\dfrac{p(x)}{xq(x)} = lim_{x\to+\infty}\dfrac{ln\ x}{x} = 0$, on a $m < n+1$.
Par conséquent, $n < m < n+1$, d'où la contradiction puisque m et n sont des entiers!
Ont fourni une solution correcte:
N. RADU(élève de $6^{\text{ème}}$ à l'Athénée Charles Rogier à Liège), H.P. BUI (BA1 Maths), J.F. DETERME (BA1 polytech), M. GHEYSENS, Angelina JOLIE (BA2 maths), G. VAN BEVER (MA2 maths), N. RICHARD (assistant Dépt de maths) , C. VAN HOOSTE (assistant en polytech), W. DE DONDER (ingénieur), Tia HELLEBAUT(championne olympique), Natalie PORTMAN (actrice), TROLL MASTER .