Axiomatique de la géométrie spatiale. Espaces affins

1. Assez curieusement, le traitement axiomatique des espaces affins est peu abordé dans la littérature. La plupart du temps, ces structures sont traitées comme des applications de la théorie des espaces vectoriels ou des espaces projectifs.
2. Le sujet est suffisamment riche pour être développé dans des directions très différentes. On pourrait se limiter à la dimension 3 pour demeurer plus proche des habitudes de la majorité et pour disposer de plus de théorèmes. Ce serait pourtant un renforcement psychologique de la barrière qui empêche la maîtrise des espaces de dimension quelconque. Or ce sont ceux-ci qui s'avèrent indispensables en science. Nous suivrons donc la voie la plus ambitieuse même si le trajet effectué ici, est très bref.
3. Une dernière remarque s'impose. En France, on dit généralement "espace affine" en contradiction flagrante avec un bon dictionnaire comme le Petit Robert. Nous ne suivrons pas cette mode ridicule.

Définition 1. Un espace affin est un espace planaire dont tout plan est un plan affin et dont le parallélisme des droites est une relation d'équivalence.

Ceci signifie :

1) On dispose d'un ensemble de points structuré par des sous-ensembles d'au moins deux points appelés droites, tels que toute paire de points est dans une et une seule droite.

2/2) On dispose d'un ensemble de sous-espaces linéaires contenant au moins trois points non alignés et appelés <u>plans</u> tels que tout trio de points non alignés est dans un et un seul plan.

3) Si p est un point, D une droite et π un plan tels que p et D sont dans π et $p \notin D$, alors il y a une et une seule droite dans π qui contient p et qui est disjointe de D.

4) Deux droites sont dites parallèles si elles sont coplanaires et disjointes ou si elles sont confondues.

<u>Question 1.</u> A-t-on des exemples autres que l'espace et le plan euclidiens ?

<u>Réponse</u> A tout corps K et tout espace vectoriel V sur K, on peut associer un espace affin $A(V)$ dont les points sont les éléments de V et dont les droites sont les $a+W$ où $a \in V$ et W est un sous-espace à une dimension de V.

Cette réponse est tellement riche en contenu, qu'elle suscite beaucoup d'autres questions.

Y-a-t-il d'autres espaces affins que les $A(V)$? La réponse doit être nuancée. A long terme, la théorie permet d'établir que tout espace affin possédant au moins deux plans est un espace $A(V)$. En revanche, il existe énormément de plans affins qui ne sont pas des $A(V)$. Un exemple typique, accessible dès la 5ᵉ année du secondaire, est le plan de Moulton (1902) obtenu en remplaçant les droites de coefficient angulaire négatif dans $\mathbb{R}^2$ par des droites qui se brisent sur l'axe des x : $\begin{cases} y = ax+b & y \geq 0 \\ y = 2ax+2b & y \leq 0 \end{cases}$

Une autre question [illegible] l'étude [illegible] des corps [illegible] ou accessibles dans le secondaire. Nous citons $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

$\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ (à propos, $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$)

$\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$

$\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2(i)$ où $i^2 + i + 1 = 0$, etc.

<u>Question 2</u> Comment peut-on développer la théorie?

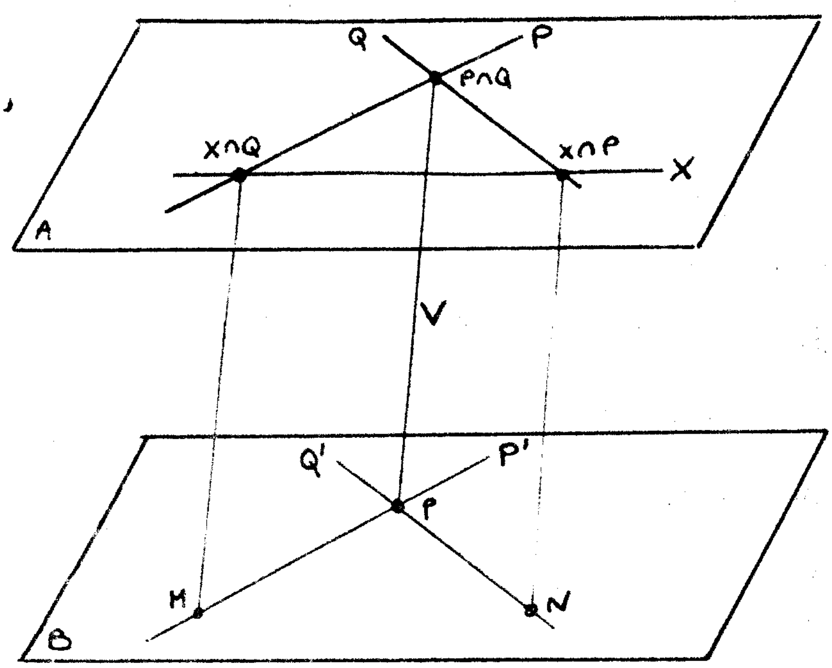
<u>Réponse</u> De toute façon, il faut acquérir un bon contrôle des sous-espaces planaires et surtout du parallélisme des droites et plans. Par la suite, des voies assez différentes peuvent être suivies : il est possible d'étudier des figures telles que parallélépipèdes, cylindres, prismes, ou d'étudier une théorie de la dimension comme dans les espaces vectoriels ou les matroïdes, ou de développer une théorie de la perspective conduisant aux espaces projectifs, ou encore de faire le lien avec les espaces vectoriels et les corps. Ici, faute de temps, on prouvera de toute façon un seul résultat significatif.

Passons au parallélisme des plans.

<u>Définition 2</u>. Deux plans A et B d'un espace affin, sont <u>parallèles</u> si pour toute droite $X \subset A$ et tout point $p \in B$, la parallèle à X par p, est dans B.

<u>Théorème 1</u>. Si P, Q sont des droites non parallèles dans le plan A et P', Q' sont des droites non parallèles dans le plan B, avec $P \parallel P'$ et $Q \parallel Q'$, alors $A \parallel B$.

<u>Démonstration</u> 1) Si A et B ont un point commun o, la parallèle P'' à P par o est dans A et la parallèle Q'' à Q par o est dans A. Comme $//$ est une relation d'équivalence sur les droites, on a $P'' // P'$, $Q'' // Q'$, donc $P'' \subset B$ et $Q'' \subset B$ en raison de la définition de droites parallèles. Dès lors $P'' \cup Q''$ est dans $A \cap B$ et de ce fait $A = B$, donc $A // B$.



2) Si A et B sont disjoints, soit X une droite de A, p un point de B. On peut supposer $X \nparallel P$, $X \nparallel Q$ sinon on a terminé. De même A contient une parallèle à X ne passant pas par $P \cap Q$ (exercice ou lemme préliminaire à établir) ce qui permet de supposer $P \cap Q \notin X$. On joint $P \cap Q$ à p ce qui livre une droite V. Dans B on peut remplacer P' et Q' par les parallèles à ces droites passant par p. Ceci revient à supposer $p = P' \cap Q'$. La parallèle à V par $X \cap Q$ coupe P' en un point M et la parallèle à V par $X \cap P$ coupe Q' en un point N car P, P' sont coplanaires et leur plan contient V et la parallèle à V par $X \cap Q$. De ce fait les points $X \cap Q, M$ et $X \cap P, N$ situés sur deux parallèles à V, sont coplanaires et comme $X \cap MN = \emptyset$ (puisque $A \cap B = \emptyset$), on voit que $X // MN$. Dès lors la parallèle à MN par p est dans B et $B // A$.

Exercices 1. Dans le théorème 1, on peut également supposer $P \parallel Q$ et $P \cap Q = \phi$. Démontrer ce nouveau théorème.

2. Prouver que dans un espace affin, tout sous-espace planaire est un espace affin.

3. Soit A un plan d'un espace affin et D une droite qui coupe A en un seul point o. Montrer que la réunion des plans qui passent par D et par une droite de A, est un sous-espace planaire de l'espace affin.

Si nous avions le temps, notre objectif suivant serait d'établir le théorème de Thalès, puis de définir des vecteurs équipollents et de contrôler les translations et homothéties.