U.L.B.

Recyclage en géométrie élémentaire

Les déplacements de l'espace

J. Doyen

Nous avons proposé aux participants de réfléchir sur les questions suivantes:

- Quelles sont les principales propriétés de l'ensemble des déplacements de l'espace ?
- Qu'est-ce qu'un axe de révolution d'une figure de l'espace ? Que peut-on dire de l'ensemble des axes de révolution d'une figure ?
- A quelles conditions deux déplacements de l'espace commutent-ils ?

1. Principales propriétés de l'ensemble des déplacements

Le fait que cet ensemble constitue un groupe pour la composition des permutations semble être une de ses propriétés fondamentales. Notons ce groupe de permutations Dep (E^3).

C'est un groupe non commutatif, comme l'ont immédiatement fait remarquer certains. En général, deux déplacements de l'espace ne commutent pas (ceci sera précisé dans la suite) Le groupe Dep (E^3) contient néanmoins des sous-groupes commutatifs intéressants : le groupe des translations, le groupe des rotations d'axe donné, le groupe des vissages d'axe donné.

D'autre part, Dep (E^3) est un groupe infini. Comment se faire une idée plus précise de sa taille ? Une manière de faire consiste à compter le nombre de paramètres dont il dépend. Prenons un corps solide C de E^3, contenant trois points non alignés p, q, r, et considérons son image $d(C)$ pour un déplacement d. La translation t qui applique p sur $d(p)$

est caractérisée par la donnée de 3 paramètres. Quant à la rotation r qui fixe $t(p) = d(p)$ et qui applique $t(q)$ sur $d(q)$ et $t(r)$ sur $d(r)$, elle est caractérisée elle aussi par la donnée de 3 paramètres : 2 paramètres pour fixer la position de son axe (penser aux points de percée de cet axe sur une sphère de centre $d(p)$) et 1 paramètre pour donner son angle. Le groupe $Dep(E^3)$ est donc un <u>groupe à 6 paramètres</u>

Analytiquement, tout déplacement de E^3 peut être décrit par des équations de la forme

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + p_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + p_2 \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + p_3 \end{cases}$$

où la matrice $[a_{ij}]$ est orthogonale de déterminant 1. L'ensemble $Dep(E^3)$ s'identifie donc au sous-ensemble de $\mathbb{R}^{12}$ constitué des points

$$(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, p_1, p_2, p_3)$$

où $[a_{ij}]$ est orthogonale de déterminant 1. Ce sous-ensemble de $\mathbb{R}^{12}$ est une variété de dimension 6.

Observons encore que le groupe des translations de E^3 est un groupe à 3 paramètres (sous-variété de dimension 3 de la variété précédente), que le groupe des vissages d'axe donné est un groupe à 2 paramètres et que le groupe des rotations d'axe donné est un groupe à 1 paramètre.

On sait (théorème de Chasles) que tout déplacement de l'espace E^3 est un vissage $t \circ r = r \circ t$, où r est une rotation d'axe A et t est une translation conservant A. Autrement dit, les translations et les rotations engendrent le groupe $\mathrm{Dep}(E^3)$. Peut-on trouver un ensemble de générateurs plus petit ?

Il est remarquable que <u>le groupe $\mathrm{Dep}(E^3)$ est engendré par les rotations d'un demi-tour</u>. Pour le prouver, il suffit bien sûr de montrer que toute translation et toute rotation est un produit de demi-tours.

Soit t une translation non identique. Si p est un point de E^3, considérons une droite A passant par p et orthogonale à la droite $p\,t(p)$. Soit A' la parallèle à A par le milieu du segment $[p, t(p)]$. Alors, si r désigne le demi-tour d'axe A et r' le demi-tour d'axe A', $r' \circ r$ conserve tout plan orthogonal à A et, dans celui-ci, coïncide avec t. Donc $r' \circ r = t$.

Toute rotation r non identique est également un produit de demi-tours. En effet, soit A l'axe de r, π un plan orthogonal à A, $o = \pi \cap A$, $p \in \pi - o$, B la droite op, C la bissectrice de l'angle $\widehat{p\,o\,r(p)}$. Considérons les demi-tours r_1 d'axe B et r_2 d'axe C. Alors $r_2 \circ r_1$ est un déplacement fixant tout point de A et appliquant p sur $r(p)$, don $r_2 \circ r_1 = r$.

En fait, on peut démontrer (exercice) que <u>tout déplacement de E^3 est un produit d'au plus 2 demi-tours</u>.

2. Axes de révolution d'une figure

Tout le monde est d'accord pour dire qu'une droite A est un <u>axe de révolution</u> d'une figure F de E^3 si <u>toute</u> rotation d'axe A conserve F. Une figure F sera dite "de révolution" si elle admet au moins un axe de révolution.

L'examen de nombreux exemples conduit rapidement les participants à conjecturer que l'ensemble $\mathcal{A}(F)$ des axes de révolution d'une figure F est nécessairement l'un des ensembles suivants :

- l'ensemble vide (exemple : un cube)
- une seule droite (exemple : un cylindre circulaire)
- toutes les droites par un point (exemple : une sphère)
- toutes les droites d'une direction (exemple : un plan)
- toutes les droites (exemple : l'espace)

Pour prouver que ce sont bien les seuls cas possibles, il est bon d'observer d'abord que si A et B sont des axes de révolution de F et si r est une rotation quelconque d'axe A, alors r (B) est un axe de révolution de F.

Ceci permet de démontrer sans trop de difficulté que si F possède deux axes de révolution A et B passant par un même point o, alors toute droite passant par o est un axe de révolution de F. De même, si une figure F possède deux axes de révolution A et B parallèles, alors toute parallèle à A et B est un axe de révolution de F.

Le résultat conjecturé plus haut s'en déduit immédiatement.

Notons encore que les seules figures admettant toutes les droites de l'espace comme axes de révolution sont la partie vide et l'espace E^3 tout entier. En effet, si une telle figure n'est pas vide, elle contient au moins un point p. De ce fait, elle contient tout autre point q de l'espace car il existe au moins une rotation appliquant p sur q.

On montre de la même manière que

- si $\mathcal{A}(F)$ est l'ensemble des droites d'une direction, alors F est une réunion de plans orthogonaux à cette direction
- si $\mathcal{A}(F)$ est l'ensemble des droites passant par un point o, alors F est une réunion de sphères de centre o (on suppose que o est une sphère de rayon nul centrée en o)
- si $\mathcal{A}(F)$ est réduit à une seule droite A, alors F est une réunion de cercles contenus dans des plans orthogonaux à A et centrés en un point de A (on admet les cercles de rayon nul)

Ceci achève la classification des figures de révolution de l'espace E^3.

3. Commutativité de deux déplacements

Il est bien connu que deux translations quelconques t et t' commutent.

A quelles conditions deux rotations r (d'axe A) et r' (d'axe A') commutent-elles ? Pour répondre facilement à cette question, observons que si x est un point fixe de r, alors $r'(x)$

est un point fixe de r lorsque r et r' commutent. En effet,

$$\begin{aligned} r' \circ r = r \circ r' \quad &\Longrightarrow \quad (r' \circ r)(x) = (r \circ r')(x) \\ &\Longrightarrow \quad r'(r(x)) = r(r'(x)) \\ &\Longrightarrow \quad r'(x) = r(r'(x)) \end{aligned}$$

Pour que r et r' commutent, il faut donc que r' transforme l'ensemble des points fixes de r en lui-même, c'est-à-dire que $r'(A) = A$. Ceci n'est réalisé que si r' est une rotation d'axe A ou si r' est un demi-tour d'axe perpendiculaire à A. En conclusion, <u>deux rotations commutent si et seulement si elles ont le même axe ou si ce sont deux demi-tours d'axes orthogonaux</u>.

Un argument du même genre montre qu'une rotation r et une translation t commutent si et seulement t conserve l'axe de r.

L'étude de la commutativité de deux vissages est un bon exercice, qui peut se résoudre facilement par une astuce du même genre, en considérant les droites invariantes plutôt que les points fixes.