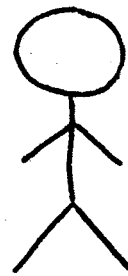
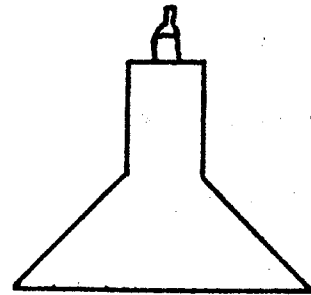


## Les principales figures ou ensembles de points structurés

F. Buekenhout et J. Doyen

### 1. Thèmes de discussion avec des élèves (tout âge).

- Apporter des objets qui évoquent des formes, des figures géométriques familières (énoncé forcément et volontairement vague).
- Nommer les figures géométriques liées à des objets. Des réponses variées devraient être acceptées. Un élève pourra voir un prisme, un autre verra un parallélépipède ou un cube.
- Décomposer un objet compliqué en figures familières : une lampe peut être constituée d'une forme évoquant des cylindres et des cônes comme ci-contre (ou en a dessiné le profil).
- Ramener un objet compliqué à des formes plus simples (idéalisées, abstraites). Un "bonhomme" peut être représenté par le dessin ci-contre.



On peut ensuite lui appliquer le thème précédent et le décomposer en sphère, cylindres ou segments.

2. Discussion de professeurs à propos d'une question difficile : qu'est-ce qu'une figure, un corps solide, une forme, un objet, un solide, un ensemble de points structuré ?

La plupart des personnes présentes (environ 30) font une distinction plus ou moins nette et variable d'une personne à l'autre, entre ces diverses notions.

Il est suggéré de consulter un bon dictionnaire. Voici une idée de la discussion.

- figure évoque surtout la géométrie plane et même le dessin. On se demande si une idée de connexité est nécessaire : la réunion de deux carrés disjointes est-elle une figure ? Pour certains, la figure peut être spatiale. Aucun essai de définition précise n'a résisté aux critiques.

Voici quelques extraits du Petit Robert (1973) : "forme extérieure d'un corps. Aspect, forme. Géométrie : les volumes, surfaces, lignes et points considérés en eux-mêmes. Figure plane, figure dans l'espace ..."

- forme : n'a pas été discuté si ce n'est pour observer que cette notion est très familière pour les enfants. Voici le Petit Robert : "apparence, aspect visible. Ensemble des contours d'un objet, d'un être, résultant de la structure de ses parties. Apparence, aspect, configuration, conformation, contours, dehors, extérieur, figure ..."

- corps solide semble fortement ancré dans la physique, est 3-dimensionnel. Pour certains, doit avoir un volume non nul. L'armature en fil de fer - pourtant très solide - des

3/ arêtes d'un dodécaèdre ou d'un cube n'apparaît pas comme un corps solide alors qu'un "cube plein" est un corps solide.

Pour le "Petit Robert": "figure à trois dimensions, limitée par une surface fermée, à volume mesurable".

- objet n'est guère discuté; semble avoir un sens trop général pour être comparé aux précédents
- ensemble de points est bien admis mais ensemble de points structuré se situe en dehors des habitudes de la majorité.

La consultation du Petit Robert au mot "structure" et au mot "forme" fait apparaître une synonymie assez nette.

Ce qui nous paraît essentiel est que vers 12-14 ans, de nombreuses figures, formes et corps solides sont devenus familiers. C'est grâce à eux et à leurs mouvements que s'élabore la notion d'espace qu'on peut voir comme un solide en expansion, de même qu'une droite est un segment en expansion, qu'un plan est un carré ou un disque en expansion, etc.

A la même époque, les êtres étudiés devraient devenir consciemment des ensembles de points structurés. Quel que soit leur contenu antérieur, les concepts devraient évoluer et se rapprocher d'une vision unifiée qui sera celle de sous-ensemble de l'espace ou d'ensemble structuré (plus ou moins indépendant de l'espace).

7  
Ce concept est celui sur lequel s'exerce l'activité mathématique. Il se prête bien à des nuances importantes qui furent exprimés dans la discussion: ensemble borné, ensemble mesurable, ensemble de dimension 3, etc...

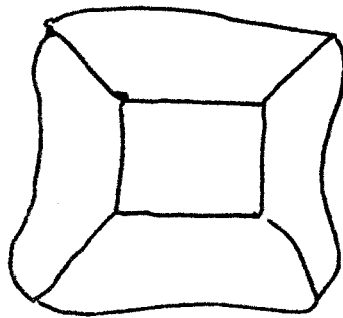
### 3. Quelle structure ?

Si  $P$  est un sous-ensemble de l'espace euclidien  $E$ ,  $P$  possède une structure induite par celle de  $E$ . A titre d'exemple, les traces ou intersections des droites et plans de  $E$  avec  $P$ , l'orthogonalité de ceux-ci, etc...

L'idée de structure devrait être constamment présente dans l'esprit du professeur, même si elle s'explique avec peine. Des exemples coriaces sont: le cube de Rubik (est-ce vraiment un cube?), un corps, une chaîne, un animal, un usage.

Dans un objet physique, nous pouvons distinguer des structures très différentes. Voici un exemple:

Un bouchon de mousseux est recouvert d'un treillis en fil de fer qui a vaguement l'allure ci-contre. Comment identifier cette forme, ce solide(?), cette figure, en géométrie?



On peut y voir un tronç de pyramide mais aussi un cube. Certains voient nettement les faces du cube (effort d'abstraction et d'imagination). D'autres préfèrent y voir le graphe des arêtes d'un cube.

Pour le fabriquant de cet objet, la longueur des arêtes a certes de l'importance. En revanche, s'il s'agissait d'un circuit électrique, la longueur et la forme des arêtes n'aurait pas d'importance. De ce point de vue, l'objet serait bien un cube.

Finalement, en quoi consiste, en général, la structure? Elle est constituée des concepts et des propriétés de ceux-ci, valables pour l'objet considéré. Voici deux exemples.

Le cylindre. Quel cylindre? C'est ambigu! Génant certes pour un examen mais pas pour une discussion. Notre choix: le cylindre-boîte qui possède deux bases circulaires et des génératrices orthogonales aux bases. Il contient des droites ou plutôt des segments, des cercles, des ellipses. Il admet un axe de <sup>révolution</sup> symétrie  $A$ , une infinité de plans de symétrie (les plans  $\rho$  par  $A$ ), un plan de symétrie  $\pi$  orthogonal à  $A$ , un centre de symétrie en  $A \cap \pi$ . Le cylindre est engendré par la translation d'une base, la rotation d'une génératrice. Il contient des hélices. Etc...

Le cube possède 8 sommets, 12 arêtes, 6 faces. C'est un polyèdre: toute arête passe par 2 sommets et se trouve sur 2 faces. C'est un parallélépipède: deux faces non adjacentes sont parallèles. Il possède 48 symétries. Les extrémités des arêtes issues d'un sommet constituent un triangle équilatéral. Les faces sont des carrés. Etc...