1/ U.L.B.

Recyclage en géométrie élémentaire 1-12-1982

Inventaire des symétries de l'espace

F. Buekenhout

1. Nous avons proposé aux participants de discuter les questions suivantes :

- quelles symétries de l'espace euclidien observez-vous ?
- quels en sont les invariants ?
- comment en construire d'autres ?

Chaque groupe a immédiatement relevé la symétrie par rapport à un plan, une droite, un point. C'est alors que la discussion a commencé. Pour certains, la liste est complète. D'autres veulent y adjoindre les rotations, translations, symétries-glissées. Peu d'arguments se dégagent mais chacun tient fermement à ses habitudes.

Finalement, le meneur de jeu est amené à donner un avis. Le mérite de la discussion aura été d'amener chacun à réfléchir à une question fondamentale :

2. Qu'est-ce qu'une symétrie ?

La tradition bien ancrée qui consiste à réserver le mot symétrie aux symétries (orthogonales) par rapport à un plan, une droite, un point sépare aujourd'hui l'enseignement secondaire belge, du langage pratiqué par une très large majorité de mathématiciens et de scientifiques utilisant la symétrie. Toutes les références bibliographiques concordent sur ce point.

L'idée de base est que la symétrie exprime une harmonie, un même aspect de points de vue différents. Mathématiser cette idée, conduit à la notion de transformation conservant la structure ou automorphisme. La symétrie, de qualitative, globale et vague qu'elle est au départ, devient opératoire, précise et en quelque sorte locale puisqu'on parle des symétries ou des automorphismes d'une figure ou d'un ensemble structuré pour en exprimer la symétrie (globale).

L'étude de la symétrie est devenue susceptible d'une théorie mathématique grâce à l'outil groupal. La composée de deux symétries est une symétrie et ceci livre un moyen de découvrir des symétries nouvelles.

Une autre remarque s'impose. Parmi les mathématiciens on n'utilise guère l'expression fort lourde "symétrie par rapport à un plan". On parle plutôt de réflexion, de symétrie bilatérale.

Notre conclusion est un souhait. Celui de voir les professeurs se dégager d'une tradition dépassée par l'usage scientifique actuel pour se rapprocher d'une conception plus riche et plus unifiante.

3. Le centre de symétrie du triangle

L'opposition à notre point de vue formula un argument de poids. En admettant les rotations parmi les symétries il faut craindre que des élèves affirment bientôt que le triangle équilatéral possède un centre de symétrie. Ce serait manifestement confondre 2 et 3.

Un examen attentif permet de dépasser cette objection et de voir qu'il empêche une compréhension plus profonde de ce qui est un centre de symétrie.

Tout d'abord, si la notion de symétrie est élargie pourquoi celle de centre de symétrie ne le serait-elle pas ? Cet argument permet tout au plus d'équilibrer les points de vue, de neutraliser l'objection. En voici une réfutation.

Parmi les polygones réguliers du plan, le carré, l'hexagone, l'octogone ont un centre de symétrie tandis que le triangle, le pentagone, l'heptagone n'en ont pas. C'est correct. Reprenons le carré. Se borner à dire qu'il a un centre de symétrie n'est-ce pas confondre 2 et 4 ? Car le carré possède un centre de rotation d'ordre 4 et l'hexagone un centre de rotation d'ordre 6. L'information profonde est qu'un polygone régulier à n côtés possède un centre de rotation d'ordre n.

Nous préconisons de développer ce langage : "centre de symétrie ou centre de rotation d'ordre n" les deux étant acceptables et symétrie étant nécessaire en vue du passage à l'espace.

Bien entendu, le cas particulier le plus important est celui où n = 2 et on peut fort bien continuer à parler de "centre de symétrie" avec la convention qu'il s'agit alors d'un centre de symétrie d'ordre deux.

Dans ce domaine le langage n'est pas fixé mais il est clair que tous ces concepts sont d'usage courant dans les sciences.

Et l'inventaire ?

Acceptons la conception large selon laquelle une symétrie est une transformation conservant la structure de l'espace. Dès lors, notre inventaire progresse rapidement. Nous récoltons :

- rotation, translation
- vissage (ou déplacement hélicoïdal) $r \circ t = t \circ r$ où r est une rotation d'axe A et t une translation de direction A.

Rotation et translation sont des cas particuliers de vissage (cas où $t = 1$ ou $r = 1$) et nous signalons un résultat de Chasles : tout déplacement de l'espace est un vissage.

Ensuite viennent :

- symétrie centrée, symétrie bilatérale
- symétrie glissée $s \circ t = t \circ s$ où s est une symétrie bilatérale fixant les points d'un plan P et t une translation parallèle à P. Le cas où $t = 1$ livre la symétrie bilatérale.

Cette liste épuise-t-elle les retournements ? Beaucoup le pensent. Finalement quelqu'un pense à composer une rotation et une symétrie centrée :

- anti-rotation $r \circ s = s \circ r$ où r est une rotation d'axe A et s une symétrie centrée sur A.

Les cas particuliers où $r = 1$ et où r est un demi-tour, livrent la symétrie centrée et la symétrie bilatérale. Celle-ci apparaît à la fois comme un cas-limite de symétrie glissée et d'anti-rotation, de même que l'identité est à la fois une translation et une rotation. Cette analogie n'est pas fortuite et elle trouve son explication ultime dans le groupe des automorphismes internes du groupe des isométries.

Pourquoi l'anti-rotation demeure-elle totalement ignorée ? Parcequ'elle n'a pas d'équivalent dans le plan et que la majorité est confinée dans celui-ci. Comment la faire découvrir à des élèves ? Prenez un cube. Montrez d'une manière ou d'une autre qu'il admet 48 symétries. Faites l'inventaire de celles-ci. Des observations minutieuses de rotations et de symétries bilatérales ou centrées, livrent 34 transformations. Les 14 manquantes sont des anti-rotations et elles sont faciles à visualiser dès qu'on en a l'idée.

Il y a un analogue du théorème de Chasles : tout retournement de l'espace est une symétrie glissée ou une anti-rotation.

Est-ce tout ? Non, les homothéties et les similitudes peuvent être examinés et acceptés si on ne suppose pas que l'espace est équipé d'une unité de longueur. Ceci n'a pas été réalisé.

5. <u>Les invariants</u>

Une transformation se visualise, se repère, se caractérise souvent à l'aide de ses invariants : points, droites, plans, directions de droites et de plans auxquels on peut ajouter angles, longueurs, demi-droites, etc.

Examinons les invariants des transformations rencontrées :

- identité : laisse toute figure invariante, championne de la conservation.
- translation non identique : toutes les droites d'une direction, tous les plans d'une direction, toutes les directions ; la translation admet une longueur
- rotation d'un demi-tour : tous les points d'une droite A,

toutes les droites perpendiculaires à A, tous les plans par A et ceux perpendiculaires à A

- rotation d'ordre différent de 1 et 2 : tous les points d'une droite A, tous les plans perpendiculaires à A ; la rotation admet un angle.
- vissage $r \circ t$ où $r \neq 1 \neq t$ et où r est un demi-tour : une droite A, tous les plans par celle-ci, toutes les directions de droites et de plans orthogonales à A
- vissage $r \circ t$ où $r \neq 1 \neq t$ et r n'est pas un demi-tour : une droite A, une direction de plans ; le vissage admet un angle
- symétrie centrée : un point, toutes les droites et plans par ce point
- symétrie bilatérale : tous les points d'un plan P, toutes les droites orthogonales à P ou dans P, tous les plans orthogonaux à P.
- symétrie glissée $s \circ t$ (où $t \neq 1$) : toutes les droites d'une direction dans un plan P, toutes les directions de droites et de plans orthogonales à P, un plan P ; admet une longueur
- anti-rotation $r \circ s$ où r n'est pas d'ordre 1 ou 2 : un point, une droite et un plan par ce point

<u>Observations</u> 1) Toute isométrie de l'espace euclidien possède au moins une droite invariante. C'est une conséquence du théorème de Chasles classant les déplacements.

2) Le classement traditionnel de transformations en translations, symétries bilatérales, rotations, vissages, etc est largement basé sur les invariants. Les sous-espaces invariants – car après tout il y a aussi des cylindres, cubes et autres figures invariantes – permettent de différencier et de caractériser les diverses transformations.