Au carrefour des mathématiques, de la nature, de l’art et de l’ésotérisme : le nombre d’or

Jean Mawhin

Vétéran de l’université catholique (?) de Louvain

Première partie

Les étapes d'une lente canonisation

Les maths du format DIN ($A3, A4, \ldots$)

- R rectangle de longueur L, largeur l
- on plie R en deux parallèlement à sa largeur
- on obtient deux rectangles égaux R'
- on veut R' semblable à R

Les maths du format DIN ($A3, A4, \ldots$)

- R rectangle de longueur L, largeur l
- on plie R en deux parallèlement à sa largeur
- on obtient deux rectangles égaux R'
- on veut R' semblable à R
- l est la longueur de R' , $\frac{L}{2}$ sa largeur

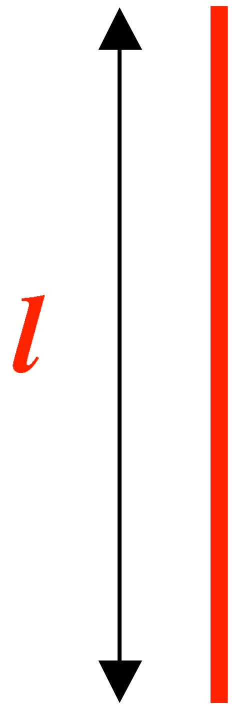
Les maths du format DIN ($A3, A4, \ldots$)

- R rectangle de longueur L, largeur l
- on plie R en deux parallèlement à sa largeur
- on obtient deux rectangles égaux R'
- on veut R' semblable à R
- l est la longueur de R' , $\frac{L}{2}$ sa largeur
- on veut $\frac{L}{l} = \frac{l}{L/2}$, c'est-à-dire $\left(\frac{L}{l}\right)^2 = 2$
- $\boxed{\frac{L}{l} = \sqrt{2} = 1,414213562\ldots}$

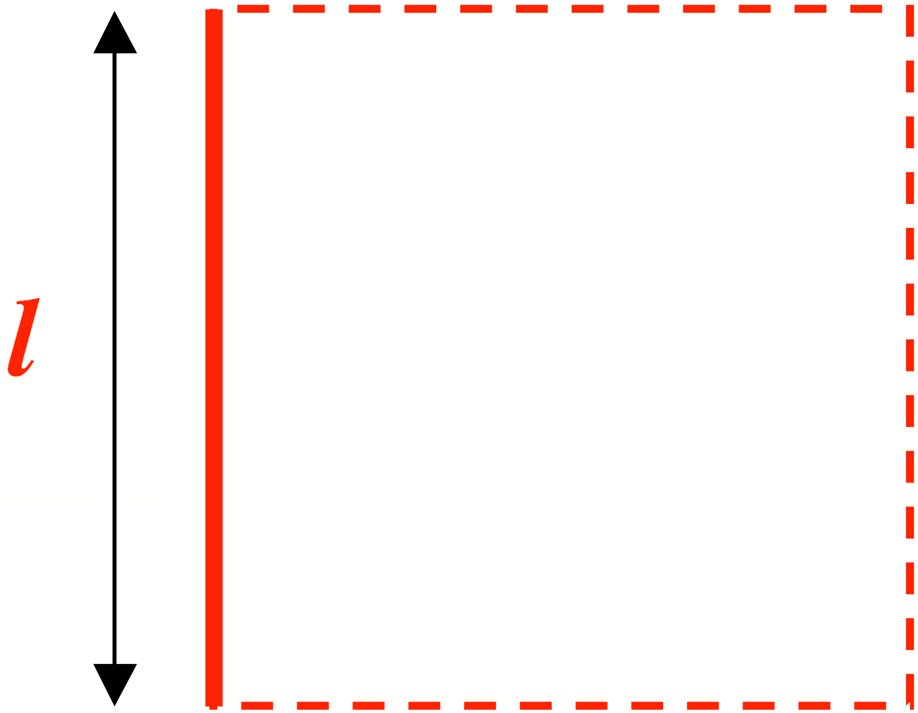
Les maths du format DIN ($A3, A4, \ldots$)

- R rectangle de longueur L, largeur l
- on plie R en deux parallèlement à sa largeur
- on obtient deux rectangles égaux R'
- on veut R' semblable à R
- l est la longueur de R' , $\frac{L}{2}$ sa largeur
- on veut $\frac{L}{l} = \frac{l}{L/2}$, c'est-à-dire $\left(\frac{L}{l}\right)^2 = 2$
- $\boxed{\frac{L}{l} = \sqrt{2} = 1,414213562\ldots}$
- en pratique : A4 : $297 \times 210\ mm$, A5 : $210 \times 148\ mm$, A6 : $148 \times 105\ mm, \ldots$
- vérification : $\frac{297}{210} = 1,4142285714\ldots$

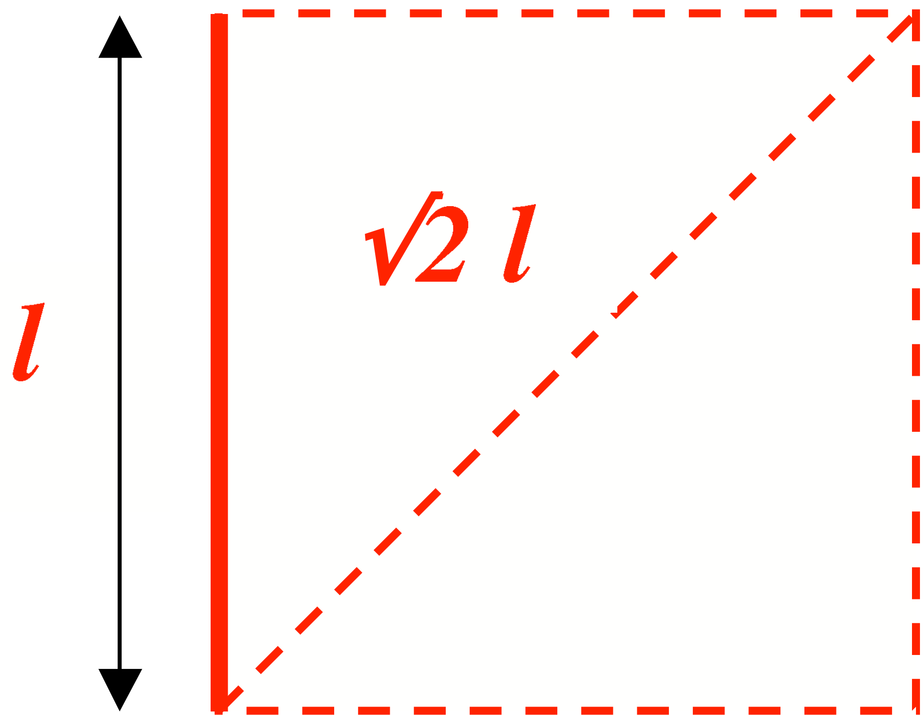
Papier DIN à partir de l - 1



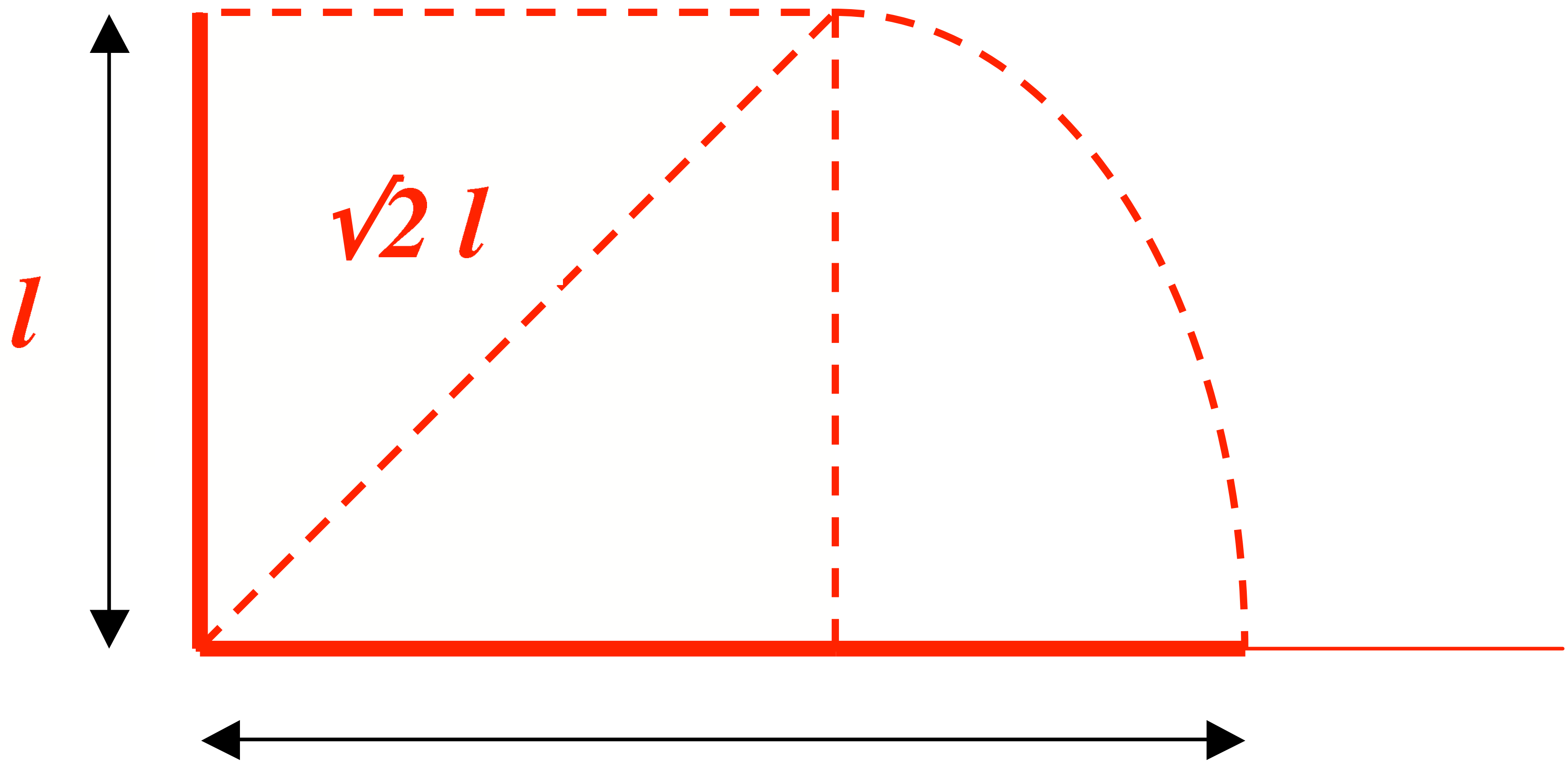
Papier DIN à partir de l - 2



Papier DIN à partir de l - 3

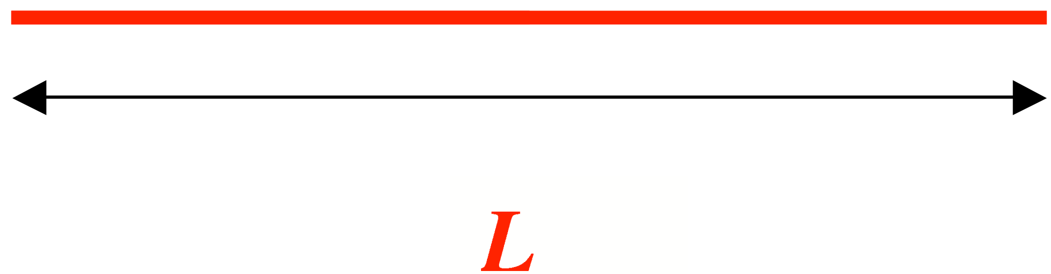


Papier DIN à partir de l - 4

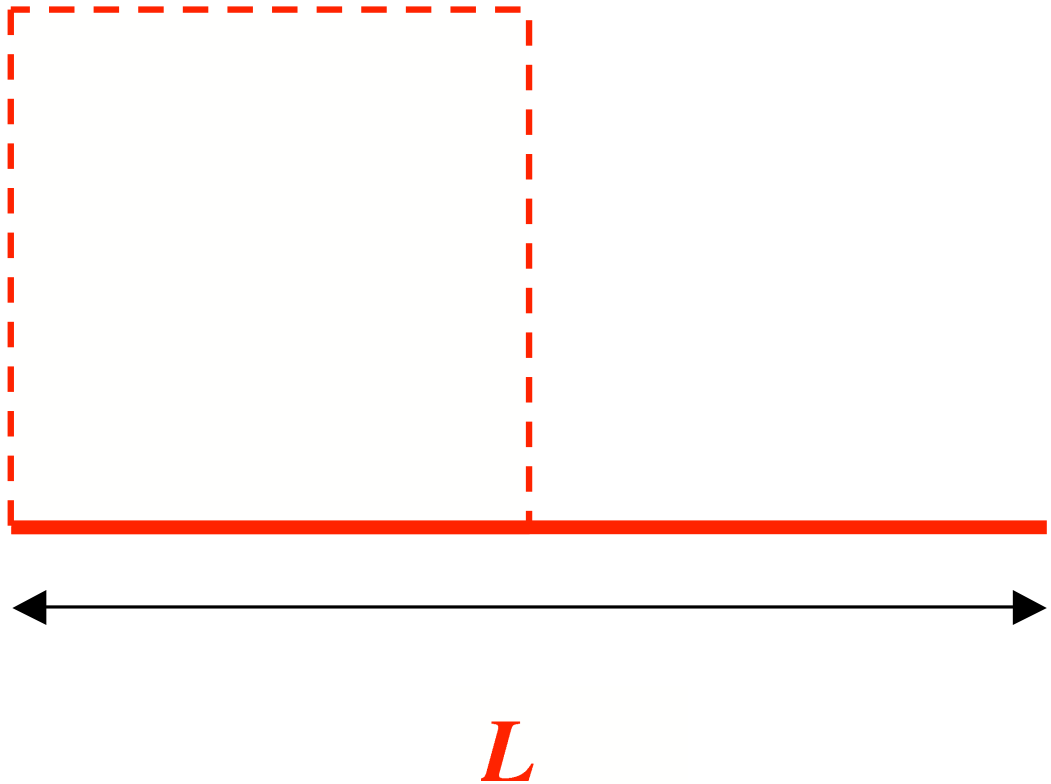


$L = \sqrt{2}\, l$

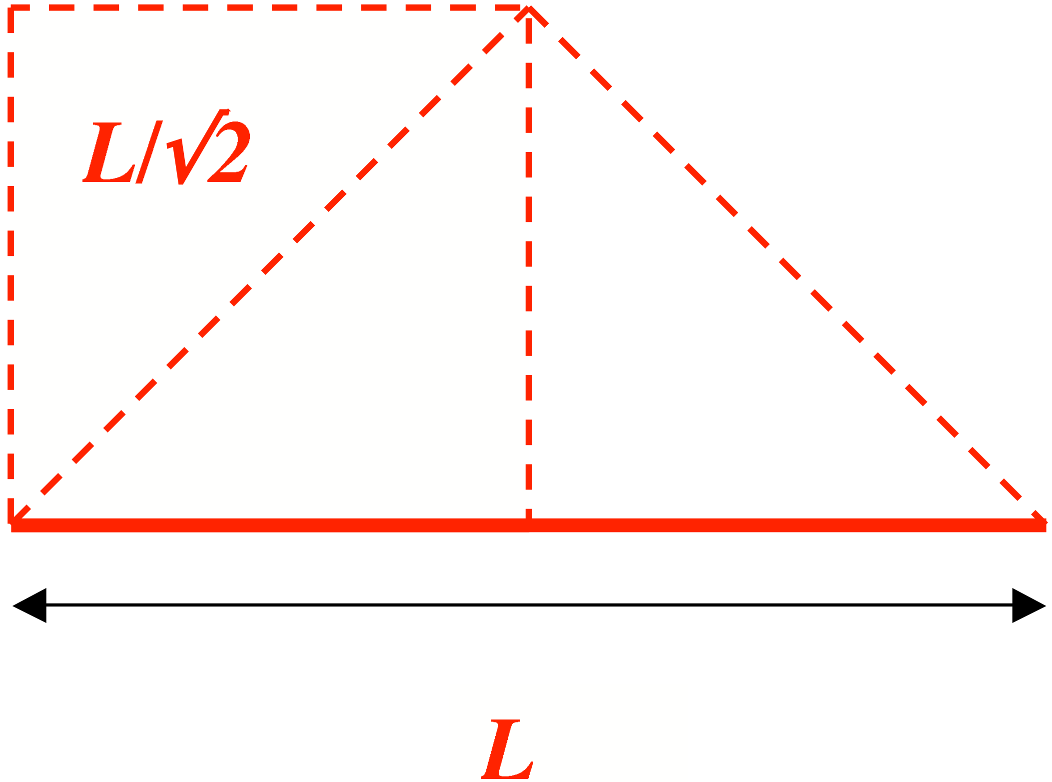
Papier DIN à partir de L - 1



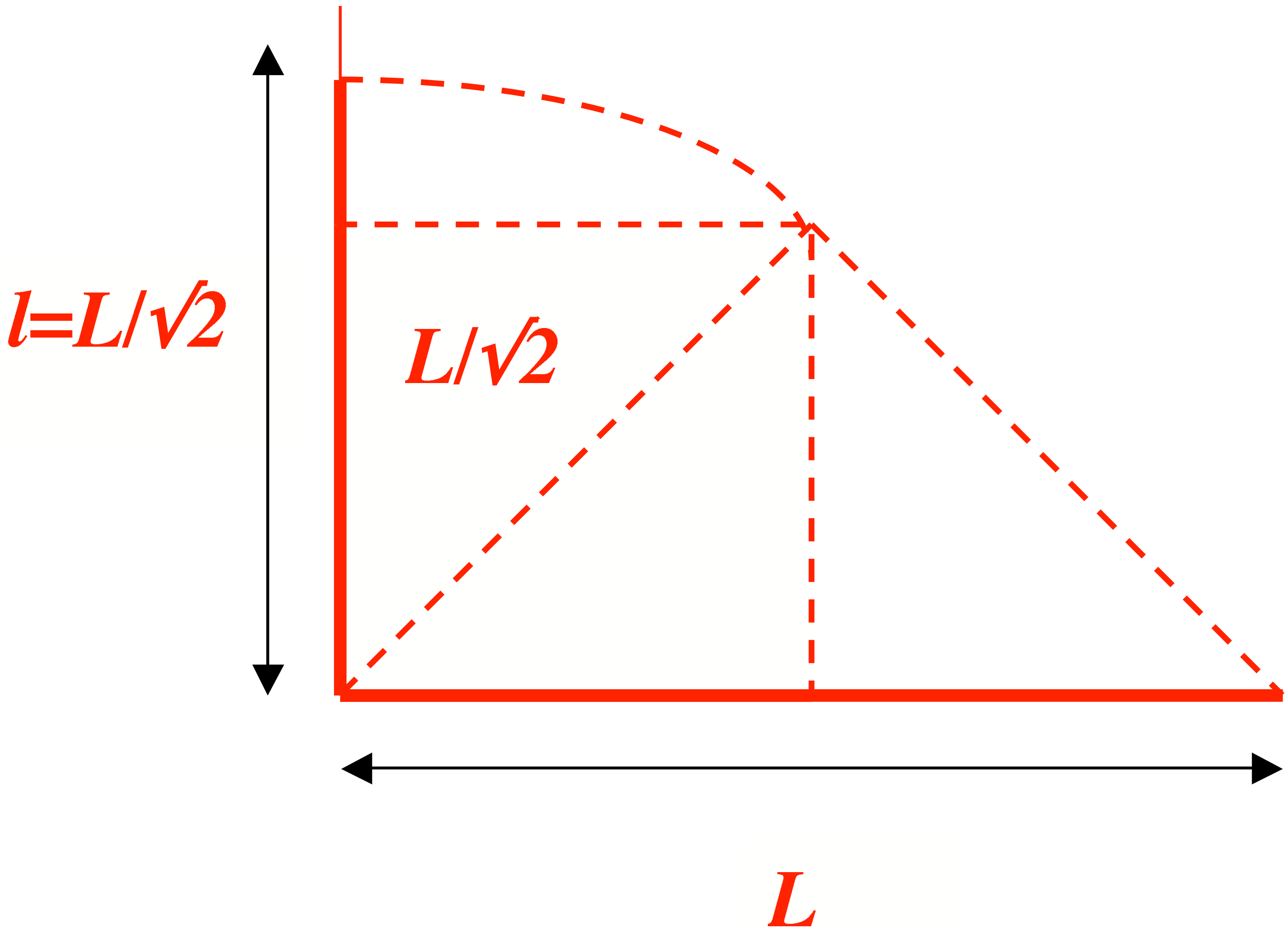
Papier DIN à partir de L - 2



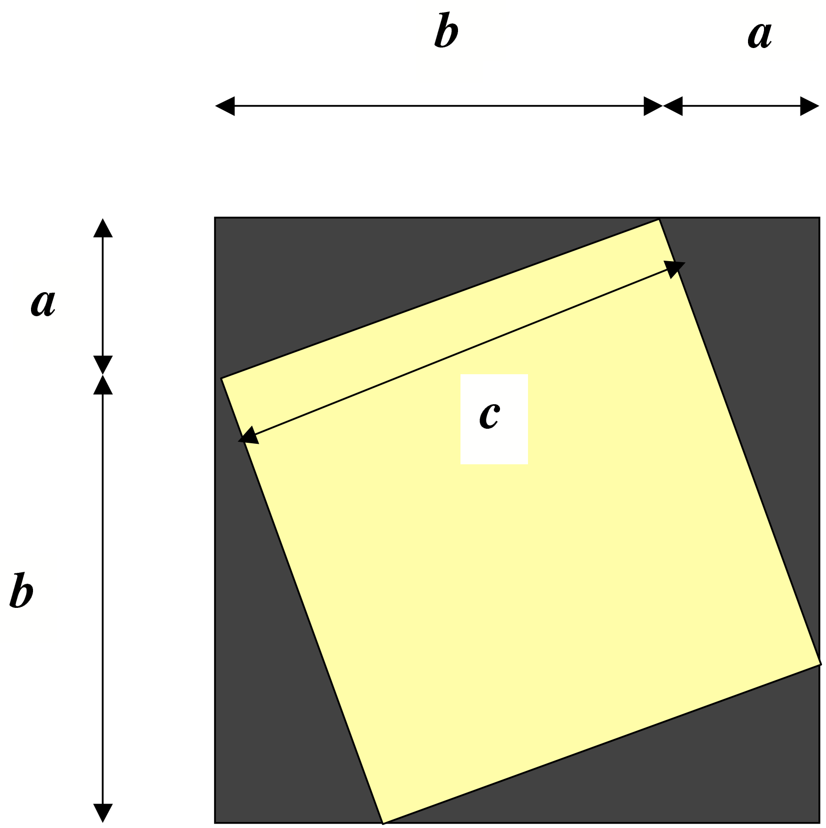
Papier DIN à partir de L - 3



Papier DIN à partir de L - 4



Théorème de Pythagore : $c^2 = a^2 + b^2$



$$(a+b)^2 = c^2 + 2ab$$
$$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Pythagore

Pythagore (VI^e s. av.JC) – Samos – Crotone

Pythagore

Pythagore (VI^e s. av.JC) – Samos – Crotone

ceci n'est pas Pythagore

Pythagoriciens

- pythagoriciens – école ou secte ?

Pythagoriciens

- pythagoriciens – école ou secte ?
- expliquer le cosmos par les nombres entiers ou des rapports entre deux entiers (nombres rationnels)

Pythagoriciens

- pythagoriciens – école ou secte ?
- expliquer le cosmos par les nombres entiers ou des rapports entre deux entiers (nombres rationnels)
- scandale ! le théorème de Pythagore contredit la philosophie pythagoricienne : *le rapport de la diagonale d'un carré à son côté ne peut pas s'écrire comme rapport de deux nombres entiers*

Pythagoriciens

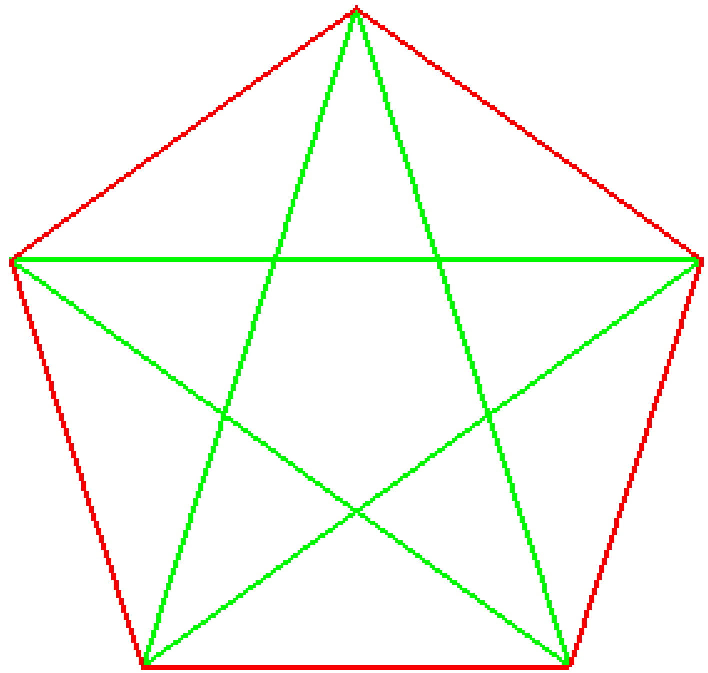
- pythagoriciens – école ou secte ?
- expliquer le cosmos par les nombres entiers ou des rapports entre deux entiers (nombres rationnels)
- scandale ! le théorème de Pythagore contredit la philosophie pythagoricienne : *le rapport de la diagonale d'un carré à son côté ne peut pas s'écrire comme rapport de deux nombres entiers*
- $\sqrt{2} = m/n, \; m \; premier \; avec \; n$
  $\Rightarrow \; 2n^2 = m^2$
  $\Rightarrow \; m \; pair, \; m = 2p$
  $\Rightarrow n^2 = 2p^2$
  $\Rightarrow \; n \; pair$
  $\Rightarrow m \; et \; n \; pas \; premiers \; entre \; eux \; : \; contradiction$

Pentagramme

- signe de ralliement des pythagoriciens : pentagramme ou pentacle ou pentagone étoilé

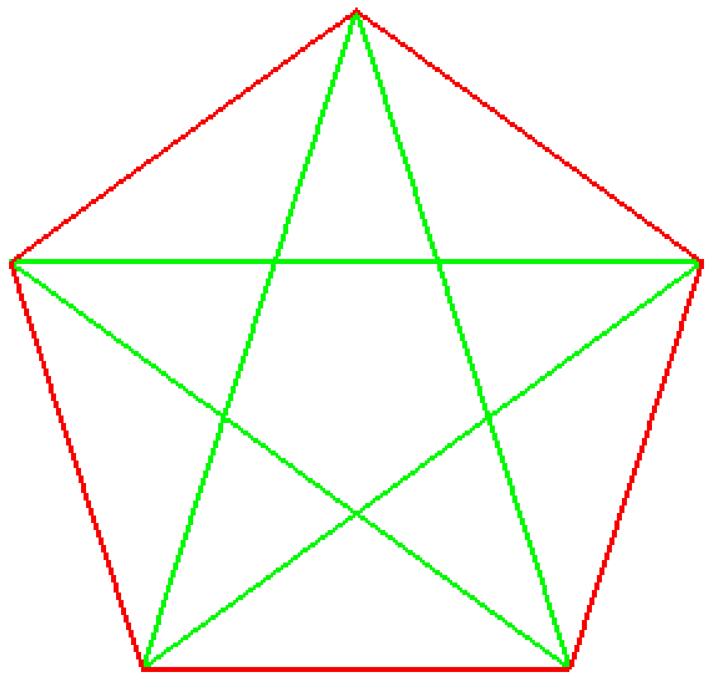
Pentagramme

- signe de ralliement des pythagoriciens : pentagramme ou pentacle ou pentagone étoilé
- version non convexe du pentagone



Pentagramme

- signe de ralliement des pythagoriciens : pentagramme ou pentacle ou pentagone étoilé
- version non convexe du pentagone



- rapport de la diagonale au côté ?

Les maths du format DOR

- R rectangle de longueur L, largeur l
- on retire de R le carré de côté l

Les maths du format DOR

- R rectangle de longueur L, largeur l
- on retire de R le carré de côté l
- on veut le rectangle restant R' semblable à R
- c'est-à-dire $\frac{L}{l} = \frac{l}{L-l}$ ou $\frac{L}{l} = \frac{1}{\frac{L}{l}-1}$

Les maths du format DOR

- R rectangle de longueur L, largeur l
- on retire de R le carré de côté l
- on veut le rectangle restant R' semblable à R
- c'est-à-dire $\frac{L}{l} = \frac{l}{L-l}$ ou $\frac{L}{l} = \frac{1}{\frac{L}{l}-1}$
- ou $\left(\frac{L}{l}\right)^2 - \frac{L}{l} - 1 = 0$ ou $\left(\frac{L}{l} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0$
- $\boxed{\frac{L}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033989\ldots}$

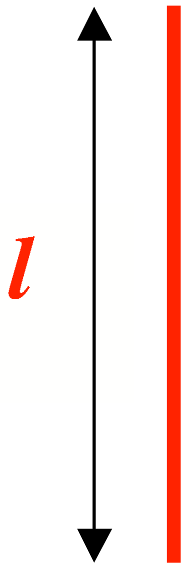
Les maths du format DOR

- R rectangle de longueur L, largeur l
- on retire de R le carré de côté l
- on veut le rectangle restant R' semblable à R
- c'est-à-dire $\frac{L}{l} = \frac{l}{L-l}$ ou $\frac{L}{l} = \frac{1}{\frac{L}{l}-1}$
- ou $\left(\frac{L}{l}\right)^2 - \frac{L}{l} - 1 = 0$ ou $\left(\frac{L}{l} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0$
- $\boxed{\frac{L}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033989\ldots}$
- $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or noté τ ou Φ (en l'honneur du sculpteur grec Phidias (?-431 av. JC))
  Φ *est irrationnel*

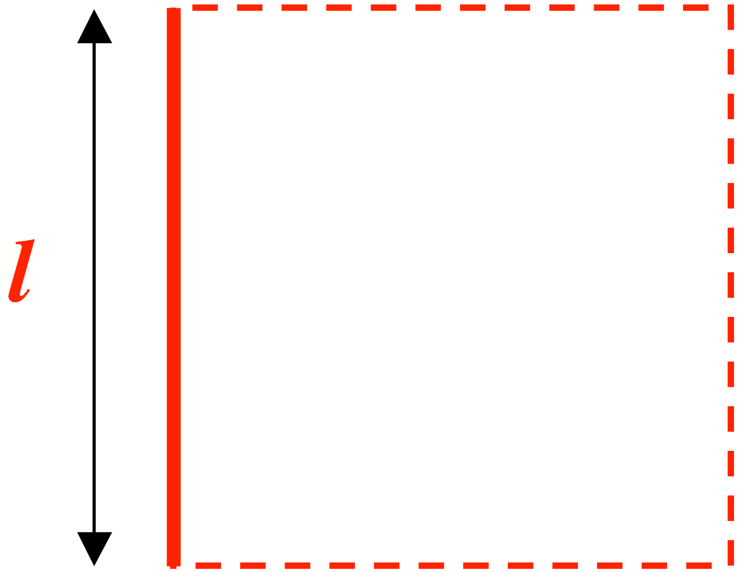
Les maths du format DOR

- R rectangle de longueur L, largeur l
- on retire de R le carré de côté l
- on veut le rectangle restant R' semblable à R
- c'est-à-dire $\frac{L}{l} = \frac{l}{L-l}$ ou $\frac{L}{l} = \frac{1}{\frac{L}{l}-1}$
- ou $\left(\frac{L}{l}\right)^2 - \frac{L}{l} - 1 = 0$ ou $\left(\frac{L}{l} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0$
- $\boxed{\frac{L}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033989\ldots}$
- $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or noté τ ou Φ (en l'honneur du sculpteur grec Phidias (?-431 av. JC))
  Φ *est irrationnel*
- équation de Φ : $\boxed{\Phi^2 - \Phi - 1 = 0}$

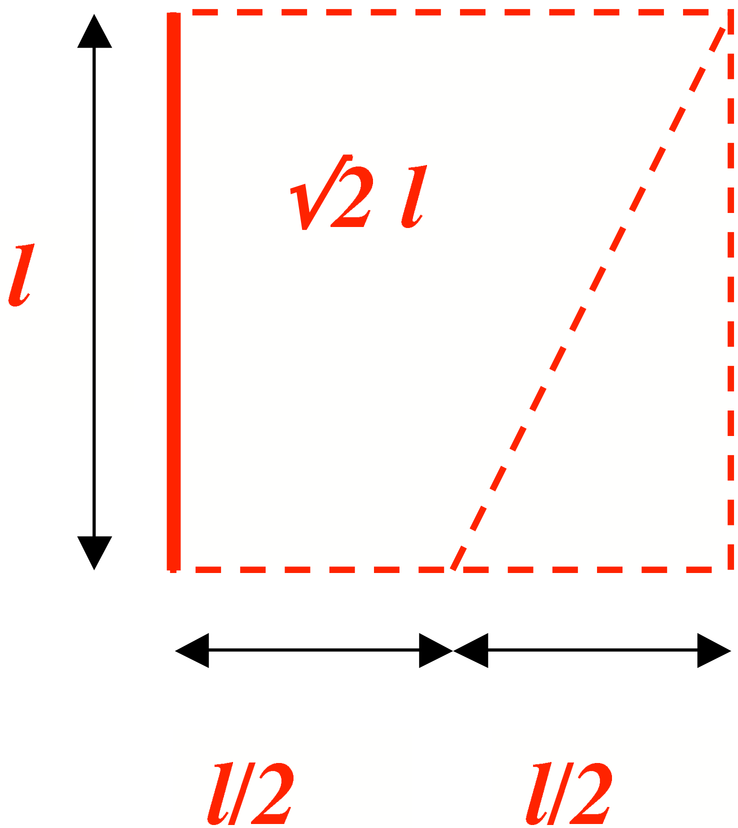
Papier DOR à partir de l - 1



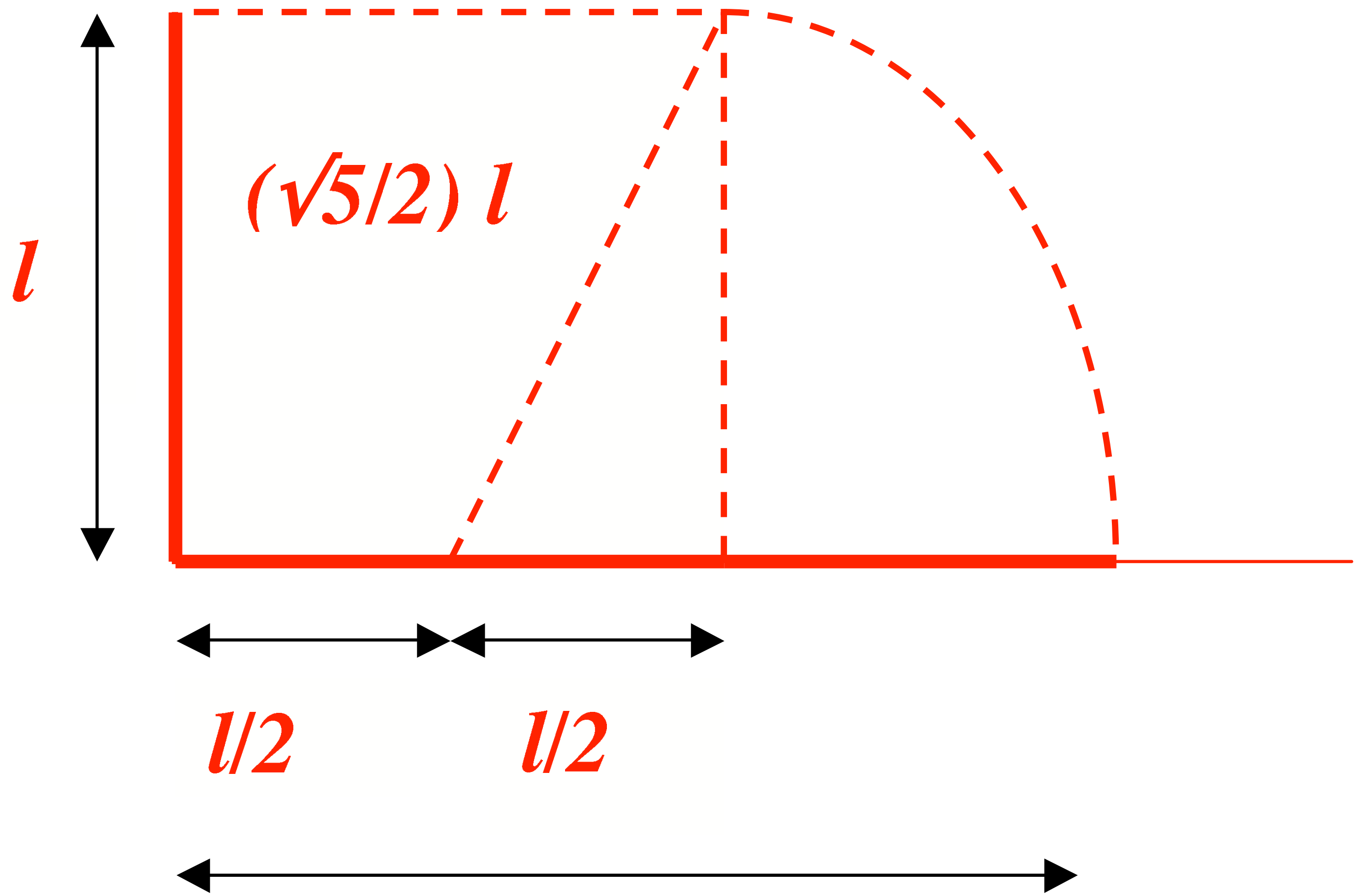
Papier DOR à partir de l - 2



Papier DOR à partir de l - 3

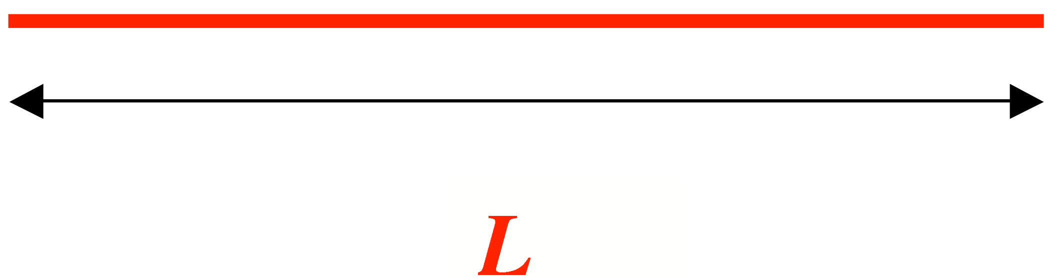


Papier DOR à partir de l - 4

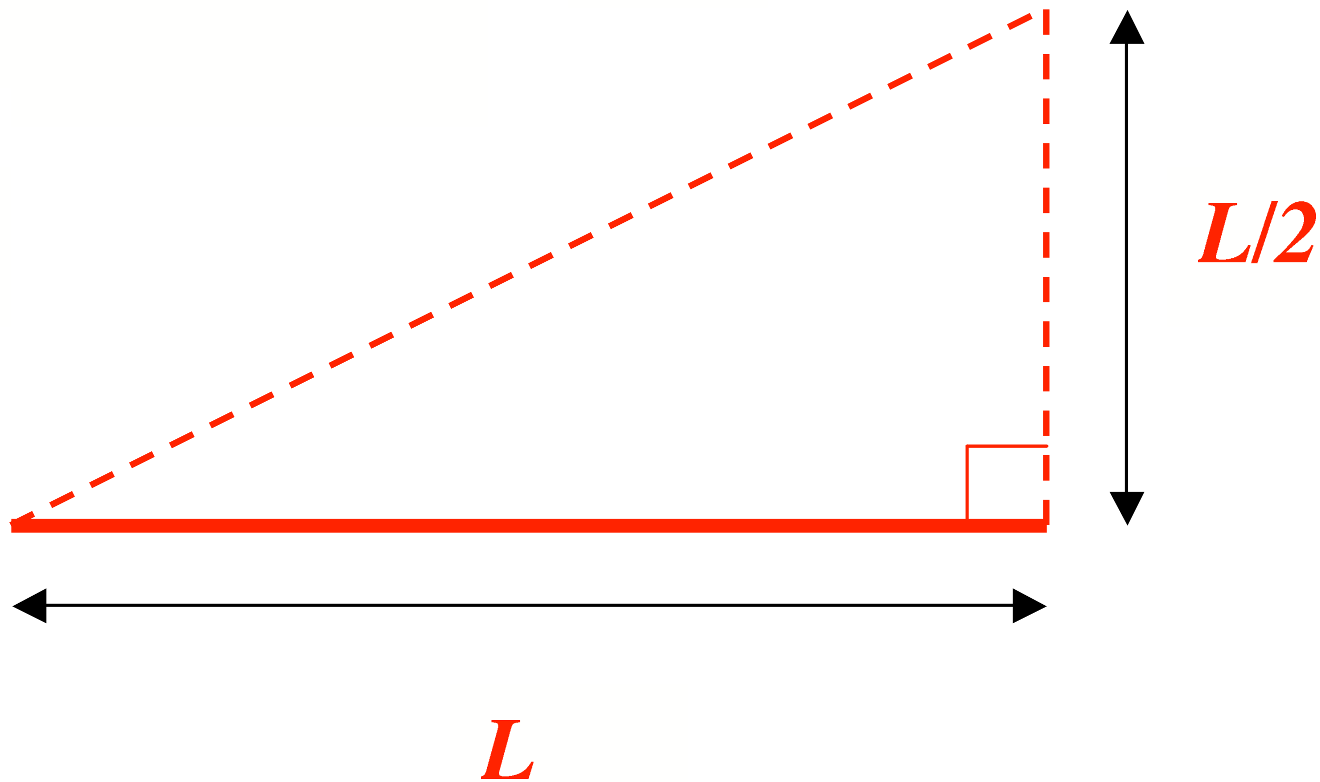


$$L = [\,(1+\sqrt{5})/2\,]\; l$$

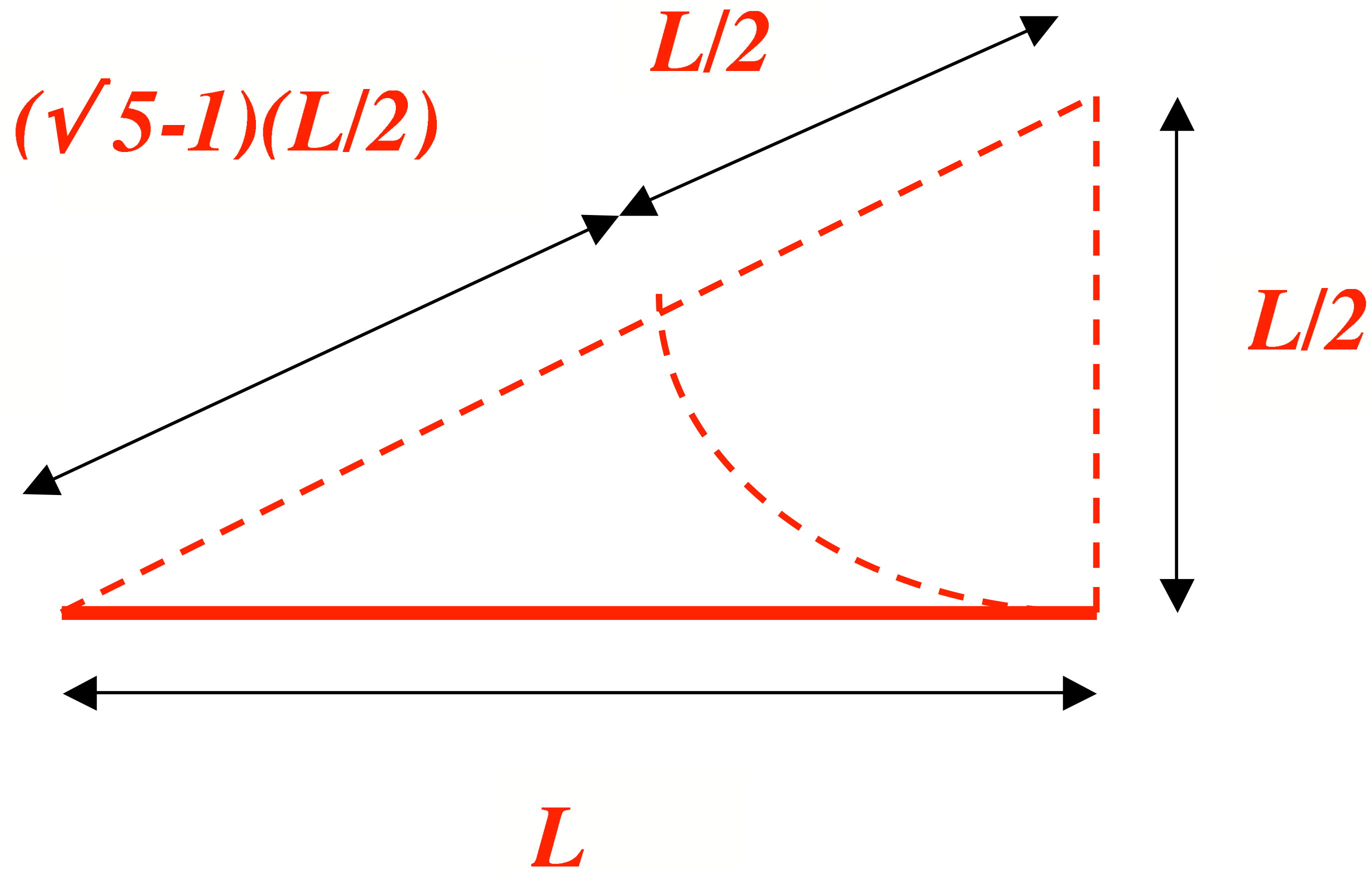
Papier DOR à partir de L - 1



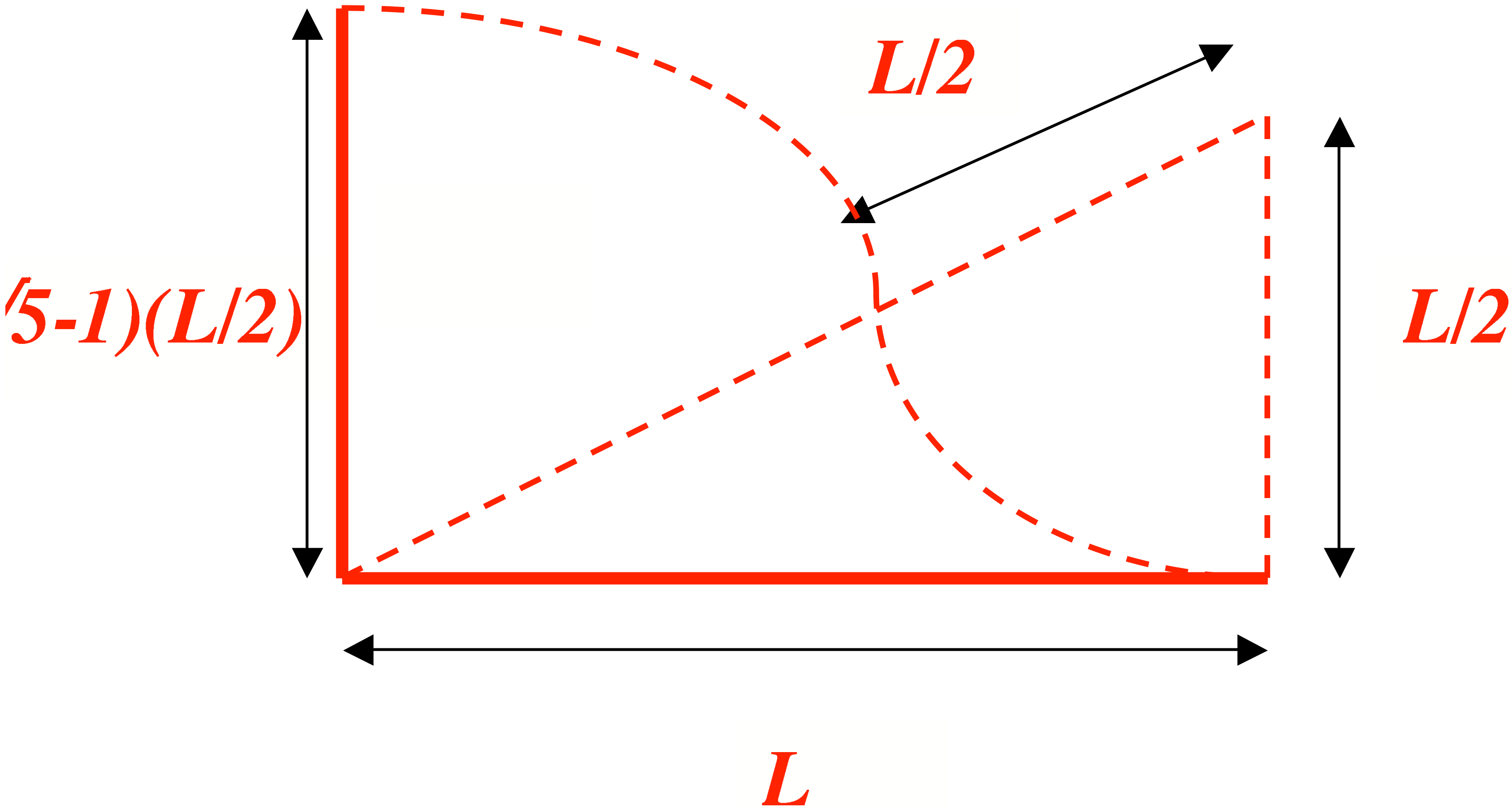
Papier DOR à partir de L - 2



Papier DOR à partir de L - 3

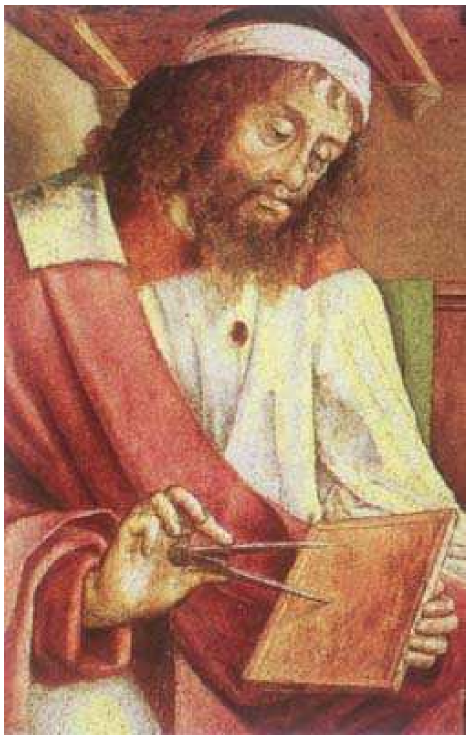


Papier DOR à partir de L - 4

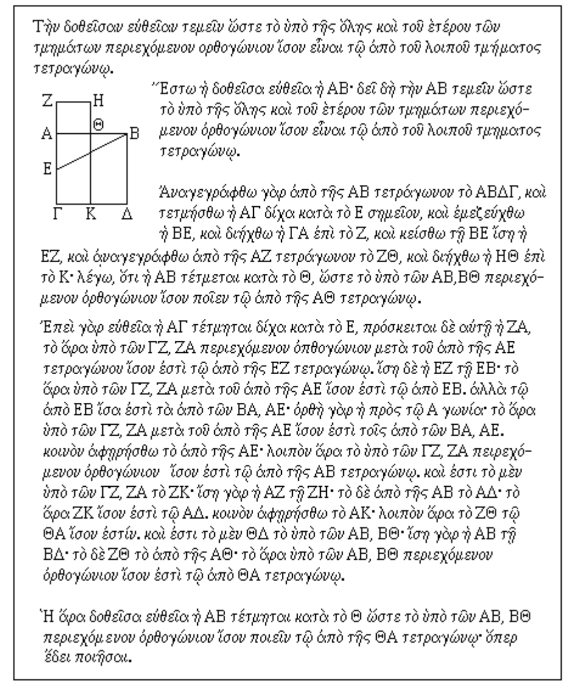


Le best-seller des maths

- *Éléments d'* Euclide (3^e siècle av. JC)



Ceci n'est pas Euclide



Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ορθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB· δεῖ δὴ τὴν AB τεμεῖν ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμηματος τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ ABΔΓ, καὶ τετμήσθω ἡ AΓ δίχα κατὰ τὸ E σημεῖον, καὶ ἐμεζεύχθω ἡ BE, καὶ διήχθω ἡ ΓA ἐπὶ τὸ Z, καὶ κείσθω τῇ BE ἴση ἡ EZ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς AZ τετράγωνον τὸ ZΘ, καὶ διήχθω ἡ HΘ ἐπὶ τὸ K· λέγω, ὅτι ἡ AB τέτμεται κατὰ τὸ Θ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν AB,BΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ποῖεν τῷ ἀπὸ τῆς AΘ τετραγώνῳ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ AΓ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ E, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ZA, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓZ, ZA περιεχόμενον ὀπθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AE τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EZ τετραγώνῳ. ἴση δὲ ἡ EZ τῇ EB· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓZ, ZA μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AE ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ EB. ἀλλὰ τῷ ἀπὸ EB ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν BA, AE· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ A γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓZ, ZA μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AE ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν BA, AE. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς AE· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΓZ, ZA πειρεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB τετραγώνῳ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΓZ, ZA τὸ ZK· ἴση γὰρ ἡ AZ τῇ ZH· τὸ δὲ ἀπὸ τῆς AB τὸ AΔ· τὸ ἄρα ZK ἴσον ἐστὶ τῷ AΔ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ AK· λοιπὸν ἄρα τὸ ZΘ τῷ ΘA ἴσον ἐστίν. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΘΔ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΘ· ἴση γὰρ ἡ AB τῇ BΔ· τὸ δὲ ZΘ τὸ ἀπὸ τῆς AΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB, BΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΘA τετραγώνῳ.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB τέτμηται κατὰ τὸ Θ ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ποιεῖν τῷ ἀπὸ τῆς ΘA τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Couper les cheveux en deux

- Livre II, Proposition 11 : *Diviser une ligne droite donnée de telle sorte que le rectangle contenu par le tout et un des segments soit égal au carré du segment restant*

Couper les cheveux en deux

- Livre II, Proposition 11 : *Diviser une ligne droite donnée de telle sorte que le rectangle contenu par le tout et un des segments soit égal au carré du segment restant*
- L longueur du segment, l celle du grand morceau

Couper les cheveux en deux

- Livre II, Proposition 11 : *Diviser une ligne droite donnée de telle sorte que le rectangle contenu par le tout et un des segments soit égal au carré du segment restant*
- L longueur du segment, l celle du grand morceau
- il faut $L(L-l)=l^2$ ou $\left(\frac{L}{l}\right)^2-\left(\frac{L}{l}\right)-1=0$
- et donc $\frac{L}{l}=\Phi$

Couper les cheveux en deux

- Livre II, Proposition 11 : *Diviser une ligne droite donnée de telle sorte que le rectangle contenu par le tout et un des segments soit égal au carré du segment restant*
- L longueur du segment, l celle du grand morceau
- il faut $L(L-l) = l^2$ ou $\left(\frac{L}{l}\right)^2 - \left(\frac{L}{l}\right) - 1 = 0$
- et donc $\frac{L}{l} = \Phi$
- mais $L(L-l) = l^2$ équivaut à $\frac{L}{l} = \frac{l}{L-l}$

Couper les cheveux en deux

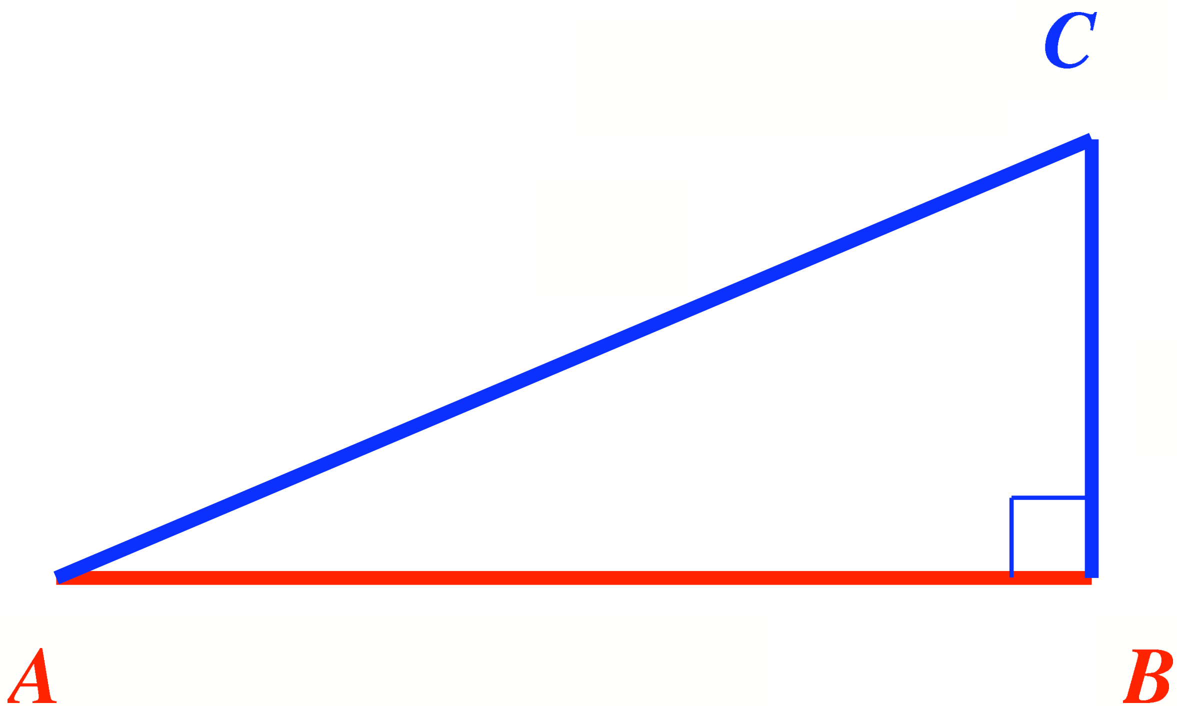
- Livre II, Proposition 11 : *Diviser une ligne droite donnée de telle sorte que le rectangle contenu par le tout et un des segments soit égal au carré du segment restant*
- L longueur du segment, l celle du grand morceau
- il faut $L(L-l) = l^2$ ou $\left(\frac{L}{l}\right)^2 - \left(\frac{L}{l}\right) - 1 = 0$
- et donc $\frac{L}{l} = \Phi$
- mais $L(L-l) = l^2$ équivaut à $\frac{L}{l} = \frac{l}{L-l}$
- *la longueur du segment est à celle du grand morceau comme la longueur du grand morceau est à celle du petit* (division en moyenne et extrême raison ou section) (Livre VI, Prop. 30)

Construction - 1

Construction - 2

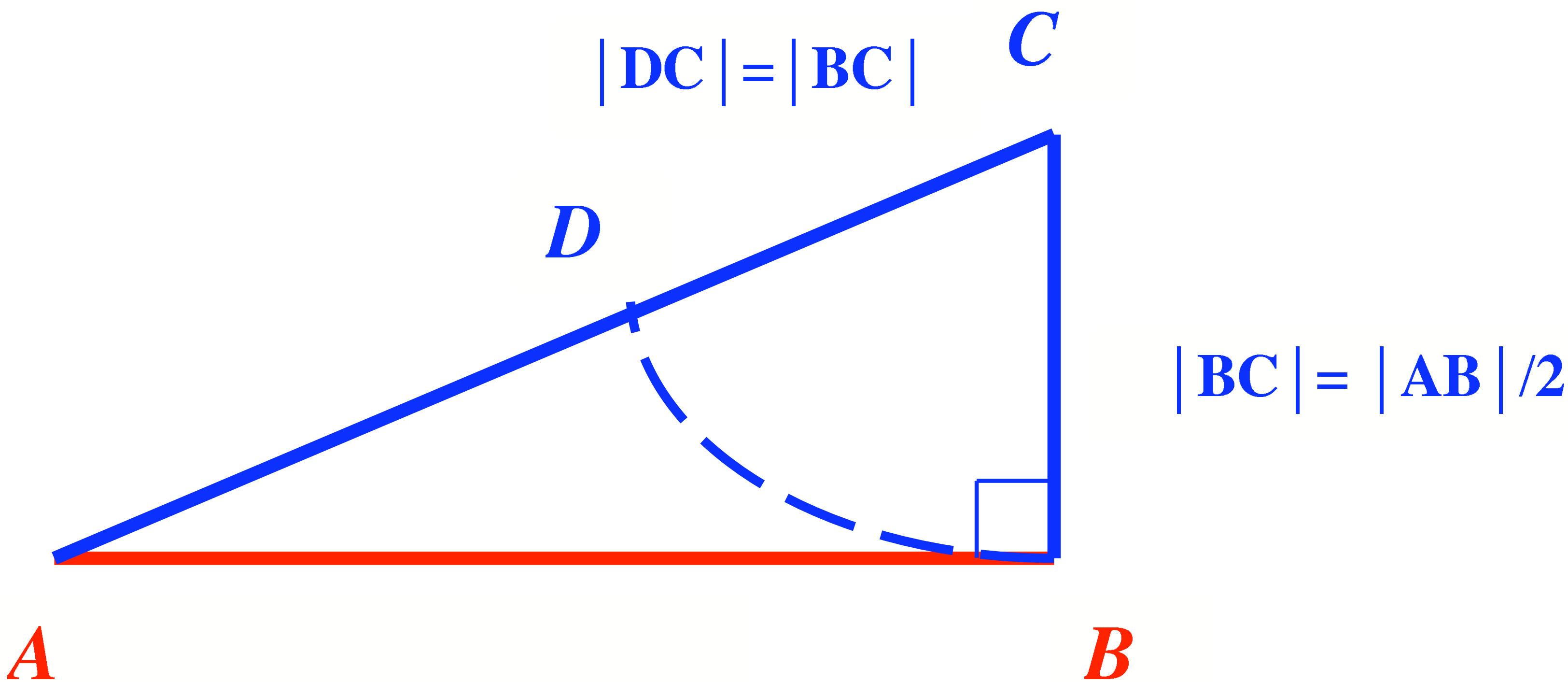
$|BC| = |AB|/2$

Construction - 3

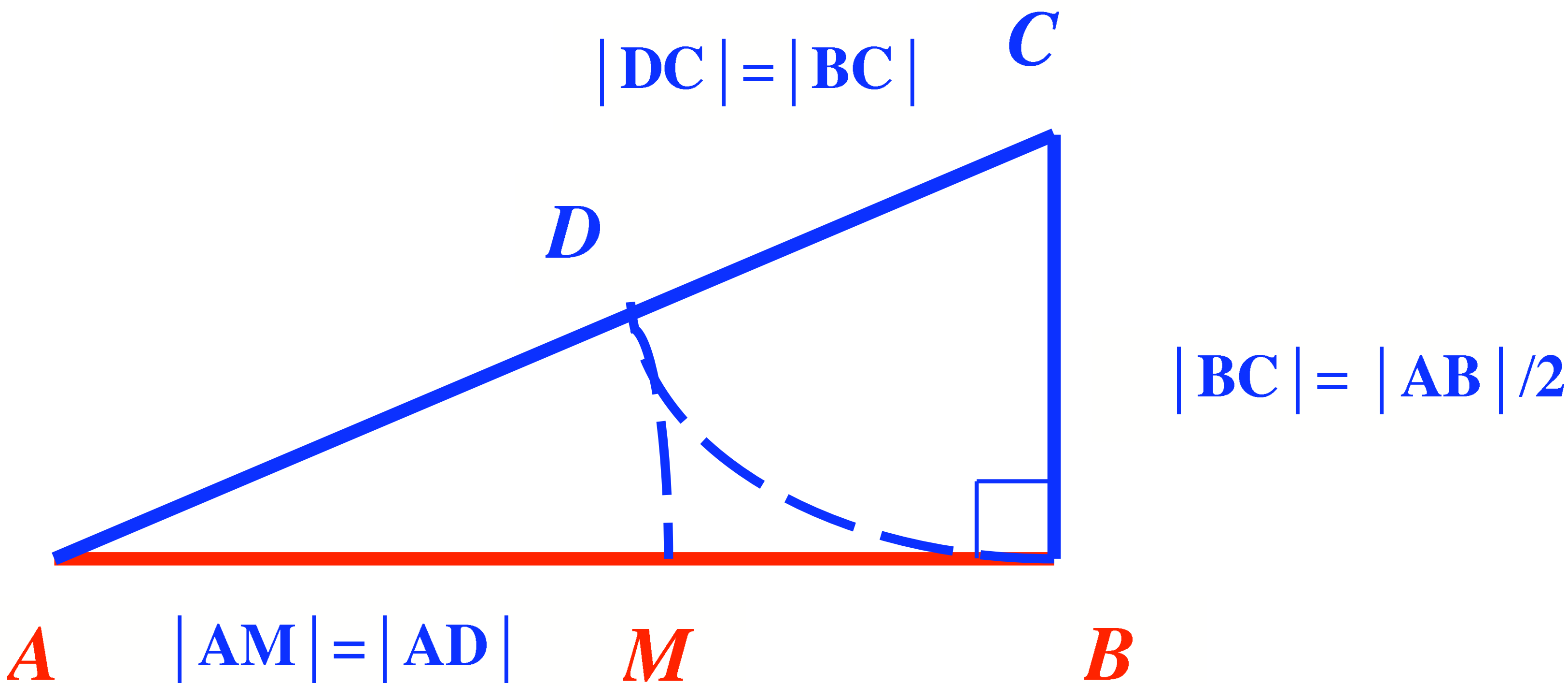


$|BC| = |AB|/2$

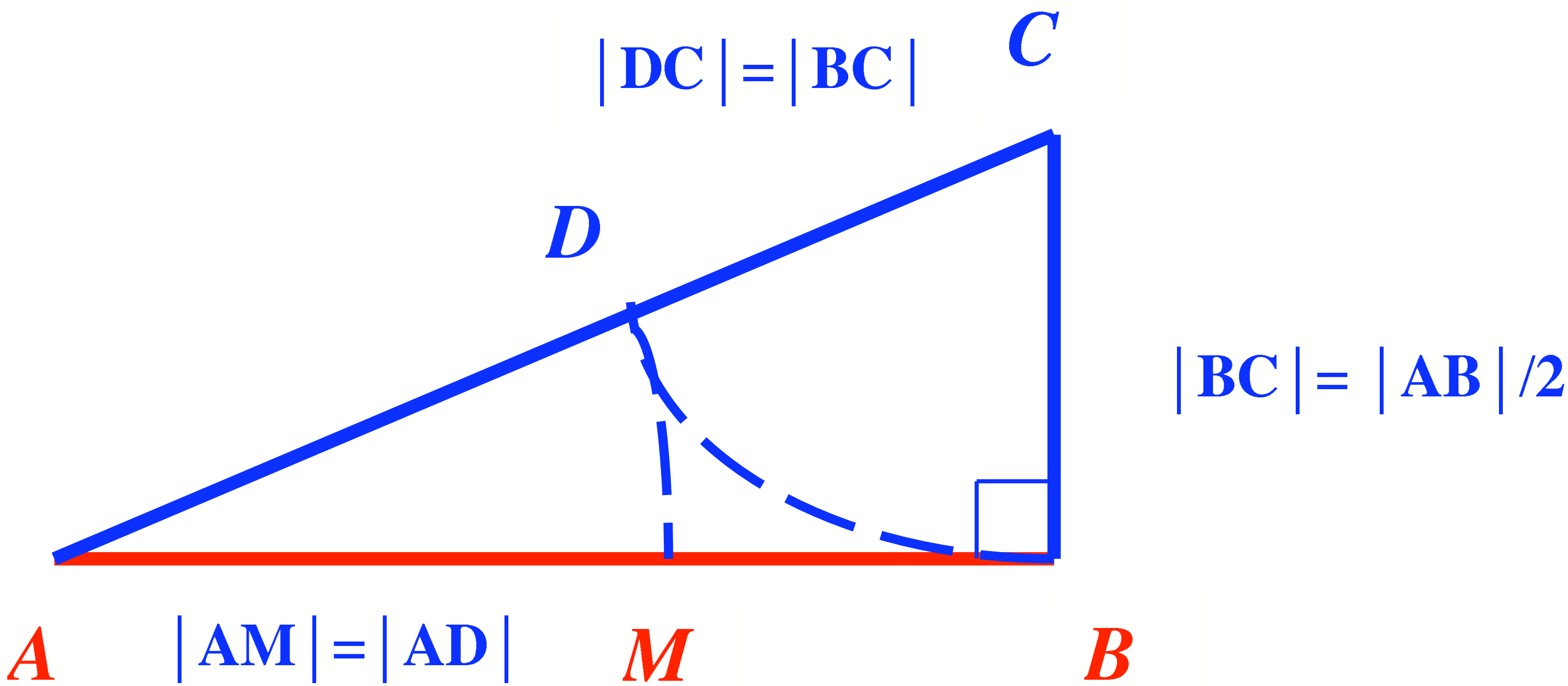
Construction - 4



Construction - 5



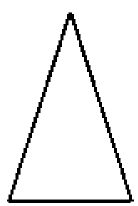
Construction - 6

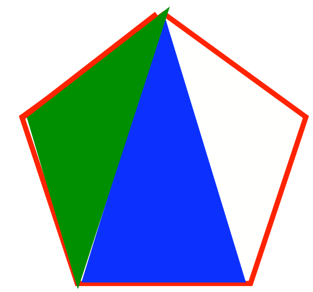


$$|AB| \times |MB| = |AM|^2$$

Un outil indispensable pour ...

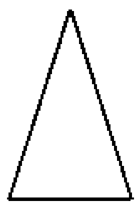
- construire un triangle isocèle ayant chaque angle à la base double de l'angle restant ou l'angle restant triple de chaque angle à la base (Livre IV, Proposition 10)

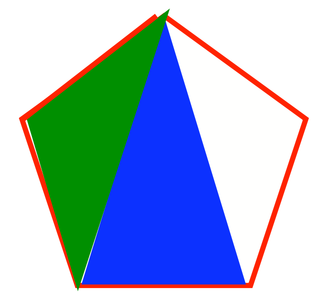




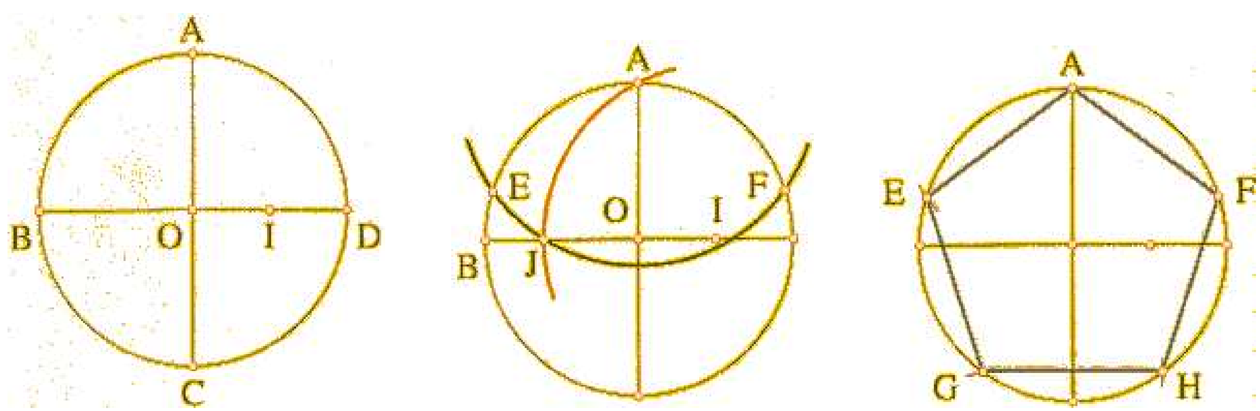
Un outil indispensable pour ...

- construire un triangle isocèle ayant chaque angle à la base double de l'angle restant ou l'angle restant triple de chaque angle à la base (Livre IV, Proposition 10)



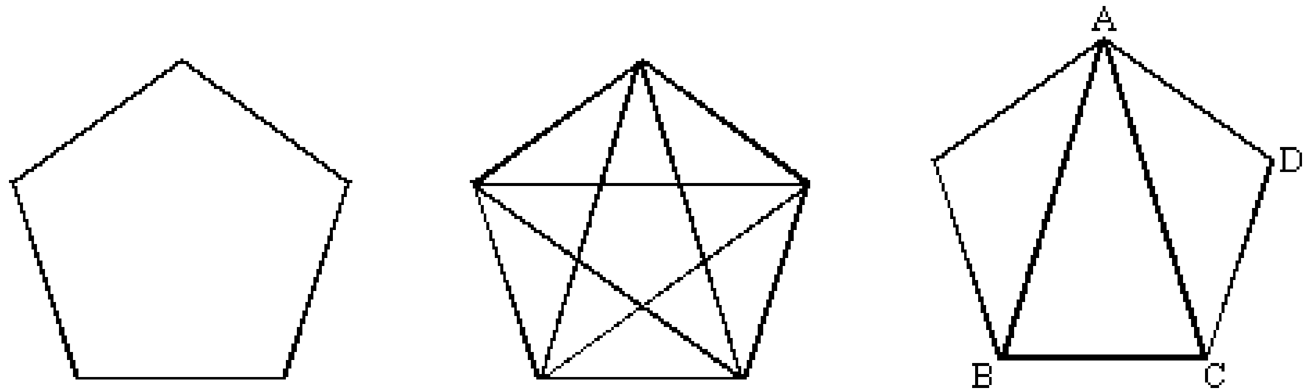


- inscrire dans un cercle un pentagone ordinaire (Livre IV, Proposition 11)



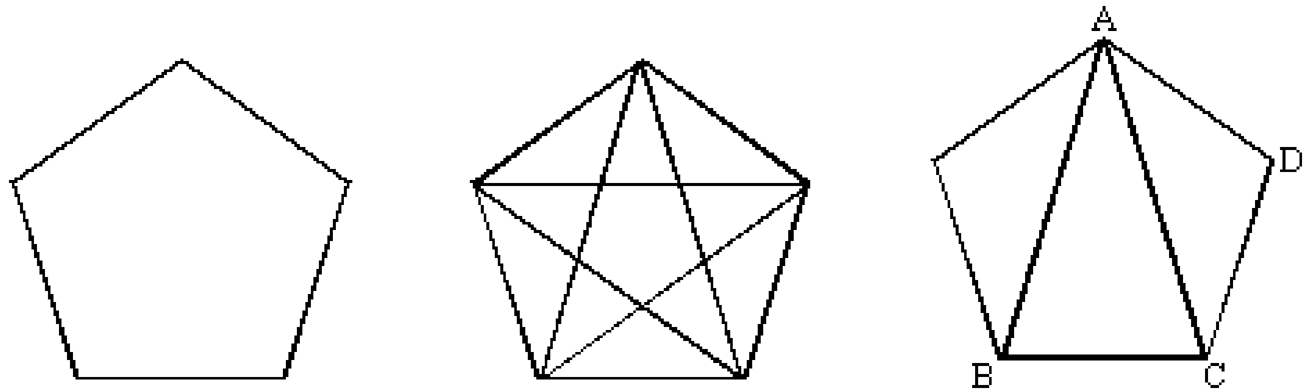
Un outil indispensable pour ...

- construire le pentagone étoilé



Un outil indispensable pour ...

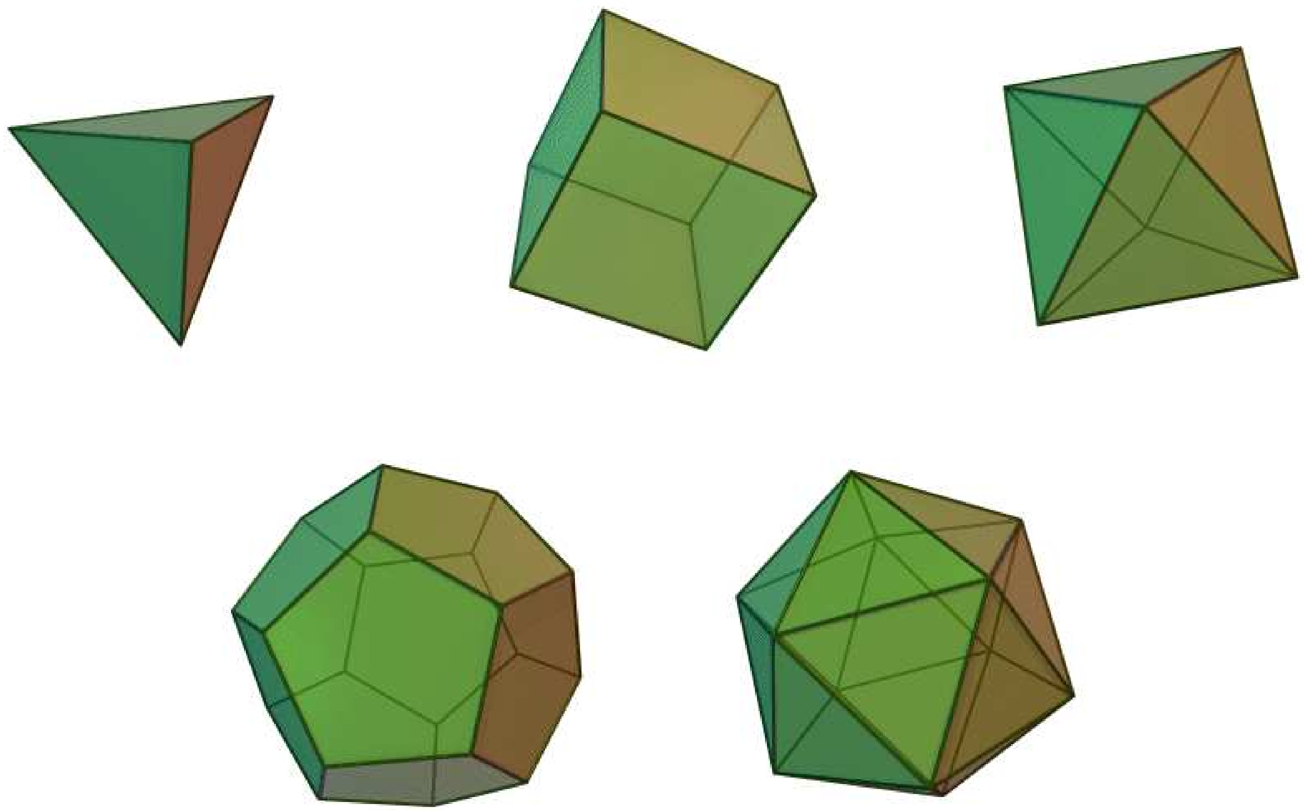
- construire le pentagone étoilé



- montrer que le côté c d'un pentagone régulier divise sa diagonale d en moyenne et extrême raison ($d/c = \Phi$)

Un outil indispensable pour ...

- construire les deux derniers polyèdres réguliers (Livre XIII, Prop. 1-5)



dodécaèdre icosaèdre

Un moine voyageur et exalté

- Luca Pacioli ou Luca di Borgo (1445-1514 ?)

Un moine voyageur et exalté

- Luca Pacioli ou Luca di Borgo (1445-1514 ?)
- frère mineur, enseigne les mathématiques à Venise, Zara, Pérouse, Naples, Milan, Florence, Rome

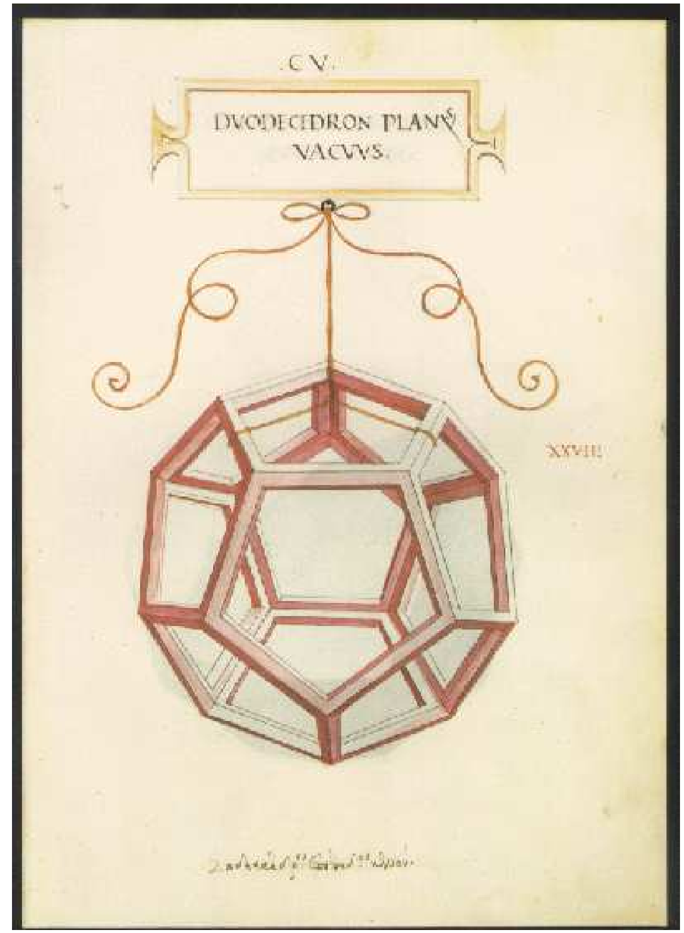
Un moine voyageur et exalté

- Luca Pacioli ou Luca di Borgo (1445-1514 ?)
- frère mineur, enseigne les mathématiques à Venise, Zara, Pérouse, Naples, Milan, Florence, Rome
- publie en 1509 la Divina Proportione essentiellement consacrée à Φ, qu'il baptise divine proportion

La *Divine Proportion*

Diuina
proportione
Opera a tutti glingegni perſpi
caci e curioſi neceſſaria Oue cia
ſcun ſtudioſo di Philoſophia:
Proſpectiua Pictura Sculptu
ra: Architectura: Muſica: e
altre Mathematice: ſua
uiſſima: ſottile: e ad
mirabile doctrina
conſequira: e de
lectaraſſi: cõ va
rie queſtione
de ſecretiſſi
ma ſcien
tia.

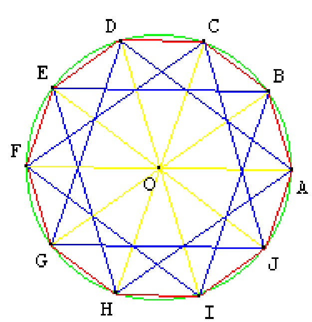
M. Antonio Capella er uditiſſ. recenſente:
A. Paganius Paganinus Characteri
bus elegantiſſimis accuratiſſi
me imprimebat.

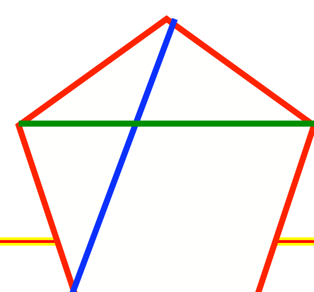


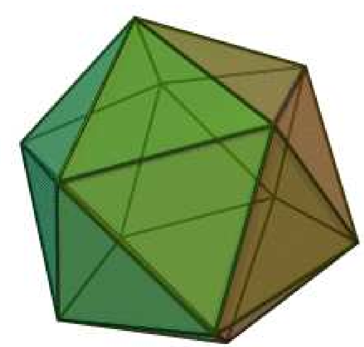
- illustrée par Léonard de Vinci !

Un style dithyrambique

- divisée en treize effets (considérable, essentiel, singulier, ineffable, admirable, inexprimable, inestimable, excessif, des plus excellents, incomparable, des plus distingués)
- septième effet : un décagone régulier de côté 1 est inscrit à un cercle de rayon Φ
- neuvième effet : deux diagonales sécantes d'un pentagone se divisent en moyenne et extrême raison
- douzième effet : construction de l'icosaèdre







Théologie géométrique

- *La divine proportion est très suave, subtile et admirable*
- *Elle est unique comme Dieu*
- *Elle est irrationnelle à l'image de l'incompréhensibilité de Dieu*
- *Elle régit – comme la Sainte Trinité – une relation entre trois termes et, comme Dieu, reste semblable à elle-même*
- *Pour notre salut, la liste des effets doit se terminer, car ils étaient treize à table à la dernière cène*
- La Divine Proportion traite aussi d'architecture (à la Vitruve) et de peinture (à la Piero della Francesca) sans aucune référence à Φ

Les lapins : un business en or

- Leonardo da Pisa ou Fibonacci (1180-1250)

Les lapins : un business en or

- Leonardo da Pisa ou Fibonacci (1180-1250)

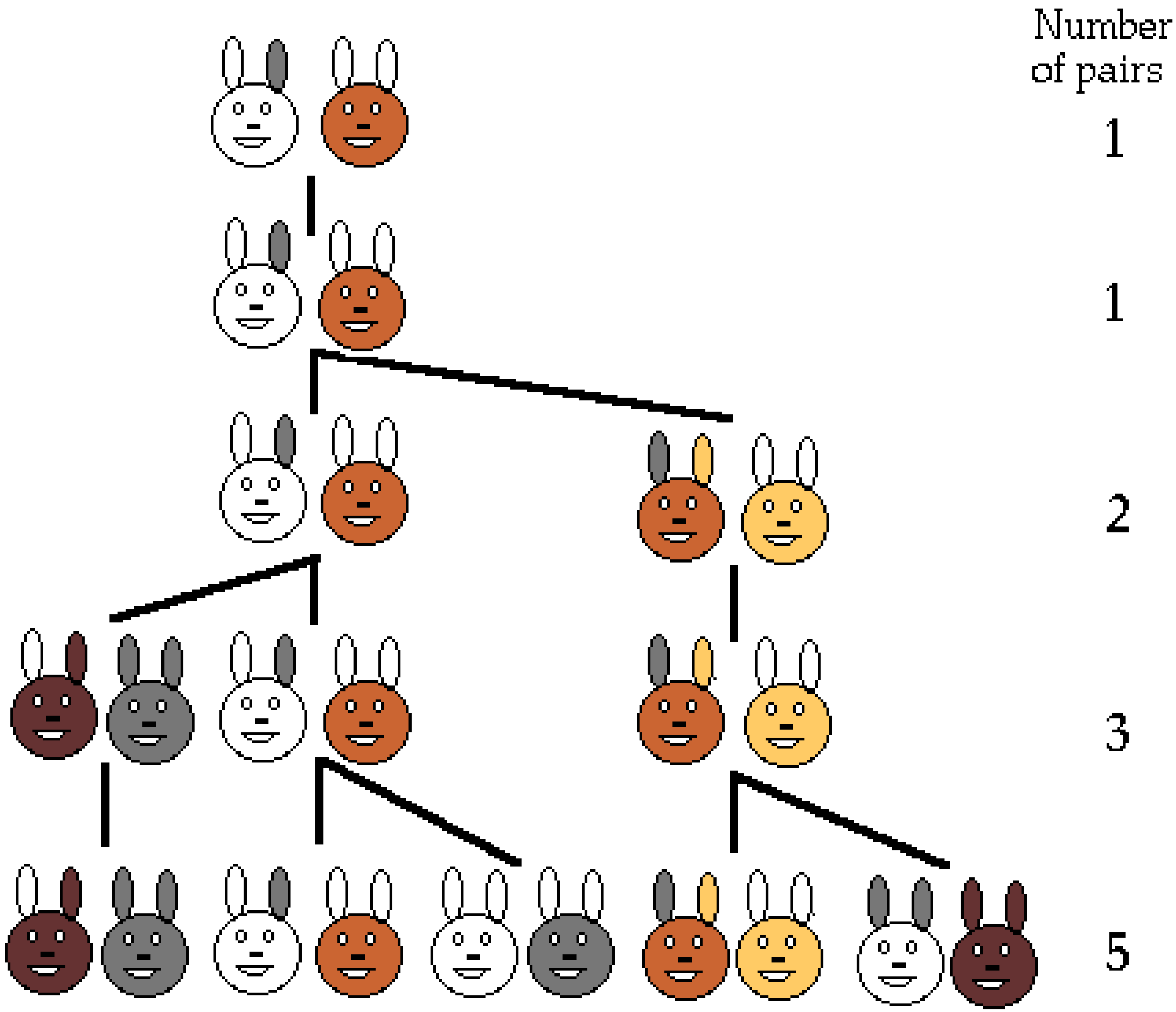
- *Liber abaci* (1202) Ch. 12 : premier modèle mathématique de démographie

Les lapins : un business en or

- Leonardo da Pisa ou Fibonacci (1180-1250)

- *Liber abaci* (1202) Ch. 12 : premier modèle mathématique de démographie
- Combien de couples de lapins sont-ils engendrés en une année, si on suppose qu'un couple
  - engendre un autre couple par mois
  - n'engendre qu'à partir du second mois suivant sa naissance ?

Des lapins sur un arbre



La suite de Fibonacci

- mois 1 : 1 couple
- mois 2 : 1 couple

La suite de Fibonacci

- mois 1 : 1 couple
- mois 2 : 1 couple
- mois 3 : 1 couple + 1 couple = 2 couples
- mois 4 : 2 couples + 1 couple = 3 couples
- mois 5 : 3 couples + 2 couples = 5 couples

La suite de Fibonacci

- mois 1 : 1 couple
- mois 2 : 1 couple
- mois 3 : 1 couple + 1 couple = 2 couples
- mois 4 : 2 couples + 1 couple = 3 couples
- mois 5 : 3 couples + 2 couples = 5 couples
- à un mois donné, le nombre de couples vaut le nombre de couples du mois précédent augmenté du nombre de nouveaux couples, qui est égal au nombre total de couples deux mois avant

La suite de Fibonacci

- mois 1 : 1 couple
- mois 2 : 1 couple
- mois 3 : 1 couple + 1 couple = 2 couples
- mois 4 : 2 couples + 1 couple = 3 couples
- mois 5 : 3 couples + 2 couples = 5 couples
- à un mois donné, le nombre de couples vaut le nombre de couples du mois précédent augmenté du nombre de nouveaux couples, qui est égal au nombre total de couples deux mois avant
- soit F_n le nombre de couples au n^e mois
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n = 3, 4, 5, \ldots) \quad F_1 = F_2 = 1$

La suite de Fibonacci

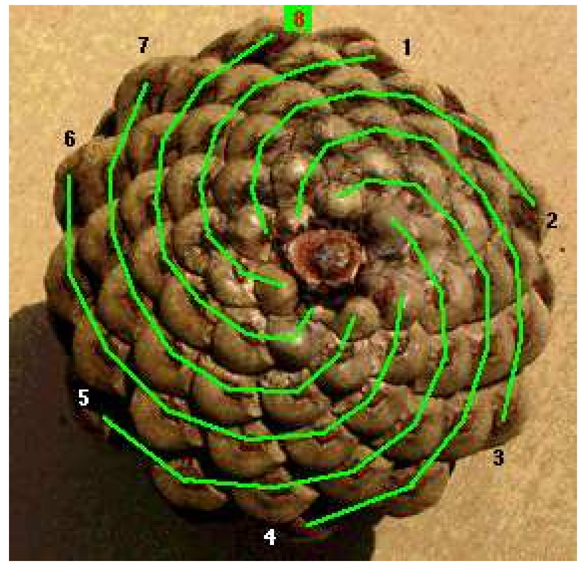
- mois 1 : 1 couple
- mois 2 : 1 couple
- mois 3 : 1 couple + 1 couple = 2 couples
- mois 4 : 2 couples + 1 couple = 3 couples
- mois 5 : 3 couples + 2 couples = 5 couples
- à un mois donné, le nombre de couples vaut le nombre de couples du mois précédent augmenté du nombre de nouveaux couples, qui est égal au nombre total de couples deux mois avant
- soit F_n le nombre de couples au n^e mois
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n = 3, 4, 5, \ldots) \quad F_1 = F_2 = 1$
- $1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377, \ldots$ (suite de Fibonacci)

Du lapin au pin

pommes de pin

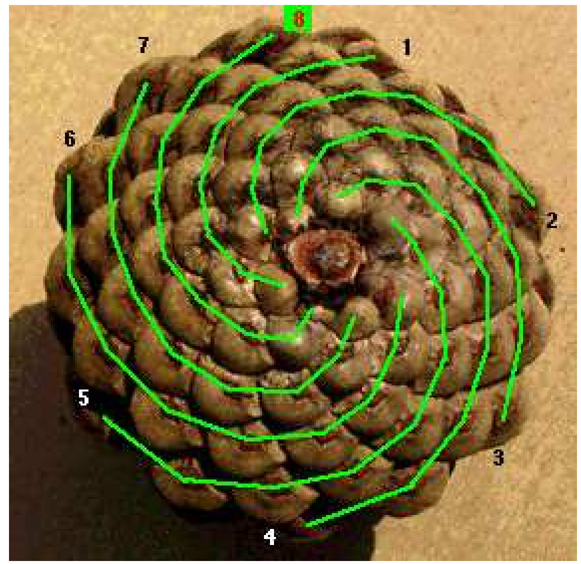
Du lapin au pin

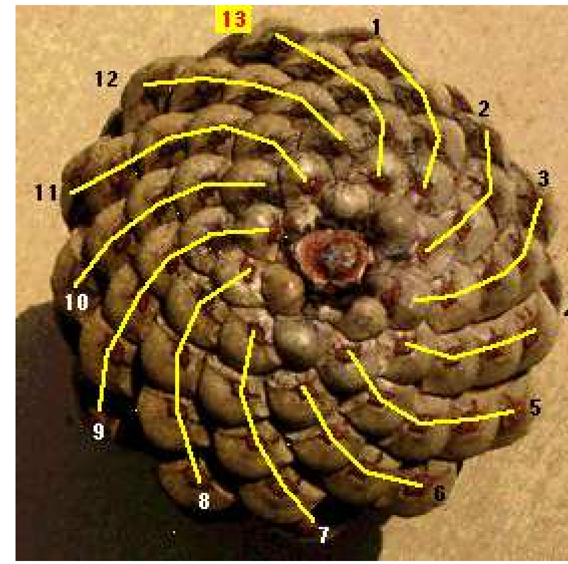
pommes de pin



Du lapin au pin

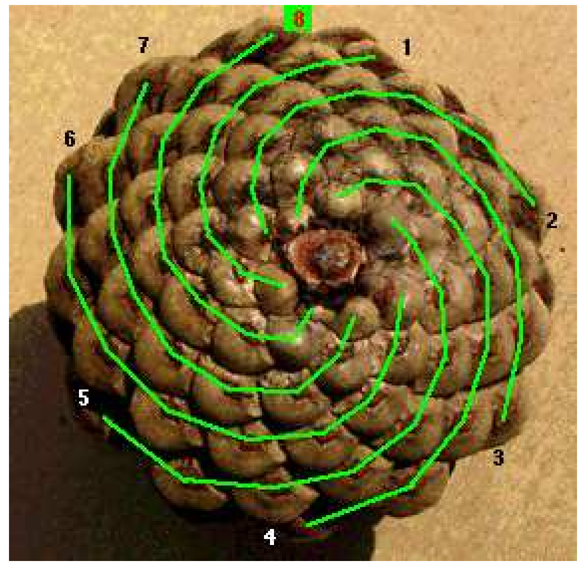
pommes de pin



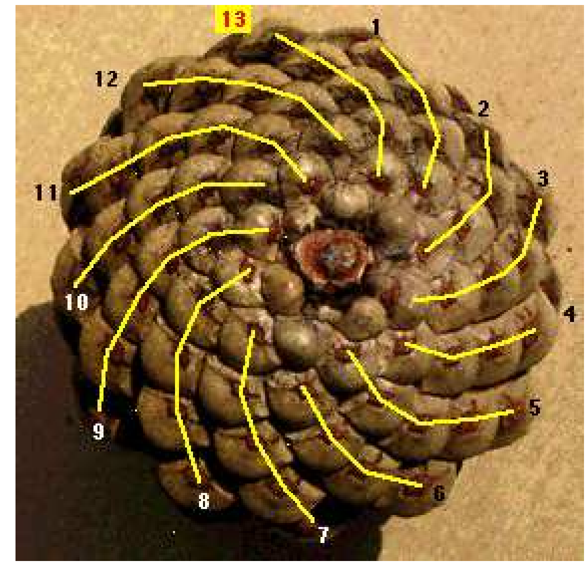


Du lapin au pin

pommes de pin



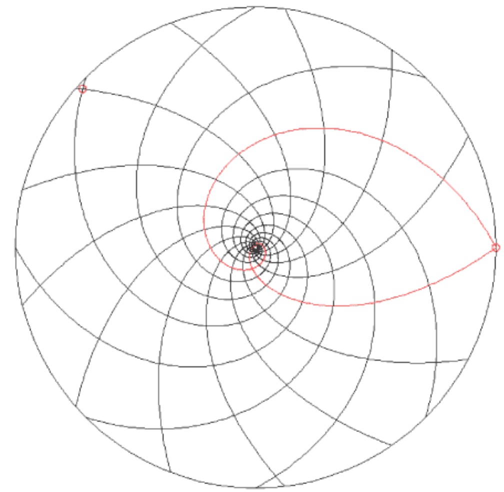
8 spirales



13 spirales

En effeuillant la marguerite

marguerite



8 spirales 13 spirales

Phyllotaxis et parastiches

- des spirales apparaissent dans de nombreux végétaux
- on les appelle des parastiches

Phyllotaxis et parastiches

- des spirales apparaissent dans de nombreux végétaux
- on les appelle des parastiches
- dans 92% des cas, 2 familles formées de deux éléments consécutifs de la suite de Fibonacci
- cette partie de la botanique s'appelle la phyllotaxis (phyllos = feuille, taxis = arrangement)

Phyllotaxis et parastiches

- des spirales apparaissent dans de nombreux végétaux
- on les appelle des parastiches
- dans 92% des cas, 2 familles formées de deux éléments consécutifs de la suite de Fibonacci
- cette partie de la botanique s'appelle la phyllotaxis (phyllos = feuille, taxis = arrangement)
- Lois de Hofmeister (1868) :
  - *dans un bourgeon, les unités botaniques (primordias) se forment une par une dans l'endroit le moins peuplé autour d'un méristème circulaire*
  - *les primordias s'éloignent radialement du centre lorsqu'ils croissent*

Fibonacci ou Φ-bonacci ?

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

Fibonacci ou Φ-bonacci ?

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...
- $$\begin{cases} 1/1 & = & 1 \\ 2/1 & = & 2 \\ 3/2 & = & 1,5 \\ 5/3 & = & 1,666... \\ 8/5 & = & 1,6 \\ 13/8 & = & 1,625 \\ 21/13 & = & 1,615384615... \\ 34/21 & = & 1,619047619... \\ \Phi & = & 1,618033988... \end{cases}$$

Fibonacci ou Φ-bonacci ?

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...
- $$\begin{cases} 1/1 & = & 1 \\ 2/1 & = & 2 \\ 3/2 & = & 1,5 \\ 5/3 & = & 1,666... \\ 8/5 & = & 1,6 \\ 13/8 & = & 1,625 \\ 21/13 & = & 1,615384615... \\ 34/21 & = & 1,619047619... \\ \Phi & = & 1,618033988... \end{cases}$$
- les quotients de deux nombres consécutifs de la suite de Fibonacci semblent donner des approximations de Φ de plus en plus précises

L'or d'Outre-Rhin

- 1884: publication posthume du livre *Der Goldene Schnitt* (*La section d'or*) d'Adolph Zeising qui
  - baptise section d'or la section d'Euclide
  - affirme la présence de Φ dans le corps humain, la structure de nombreux animaux ou plantes, les harmonies des meilleurs accords musicaux, les proportions des chefs d'oeuvres en architecture, peinture et sculpture

L'or d'Outre-Rhin

- 1884: publication posthume du livre *Der Goldene Schnitt* (*La section d'or*) d'Adolph Zeising qui
  - baptise section d'or la section d'Euclide
  - affirme la présence de Φ dans le corps humain, la structure de nombreux animaux ou plantes, les harmonies des meilleurs accords musicaux, les proportions des chefs d'oeuvres en architecture, peinture et sculpture
- 1876 : expériences du psychologe Gustav Fechner : le rectangle d'or est esthétiquement le plus satisfaisant
- expériences refaites et contestées

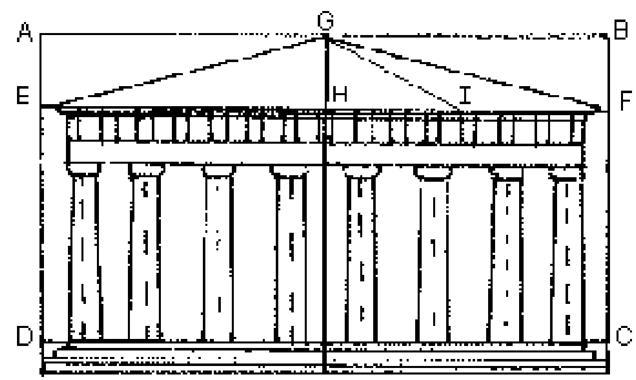
Quelques affirmations

- Pyramide de Cheops : hauteur/demi-base = Φ

Quelques affirmations

- Pyramide de Cheops : hauteur/demi-base = Φ

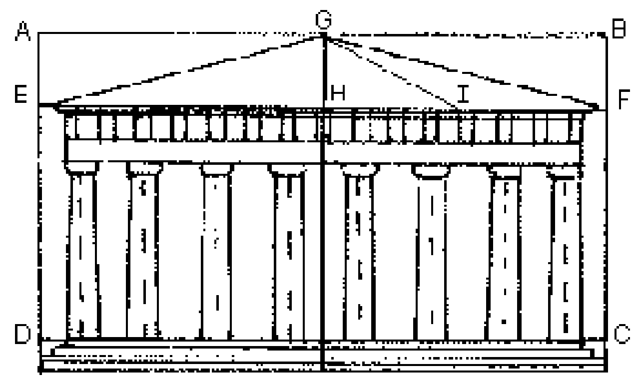
- Parthénon : $|DC|/|DE| = |GF|/|GI| = \Phi$



Quelques affirmations

- Pyramide de Cheops : hauteur/demi-base = Φ

- Parthénon : $|DC|/|DE| \quad = \quad |GF|/|GI| \quad = \quad \Phi$



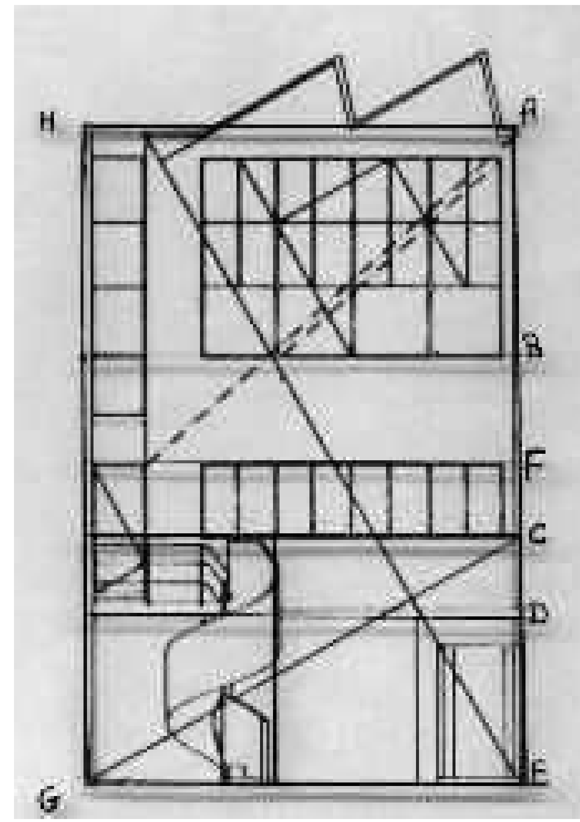
- les mesures sont approximatives !

Nombre d’or à la française

Hôtel Le Brun, 49, rue Cardinal Lemoine, Paris V^e (1701)

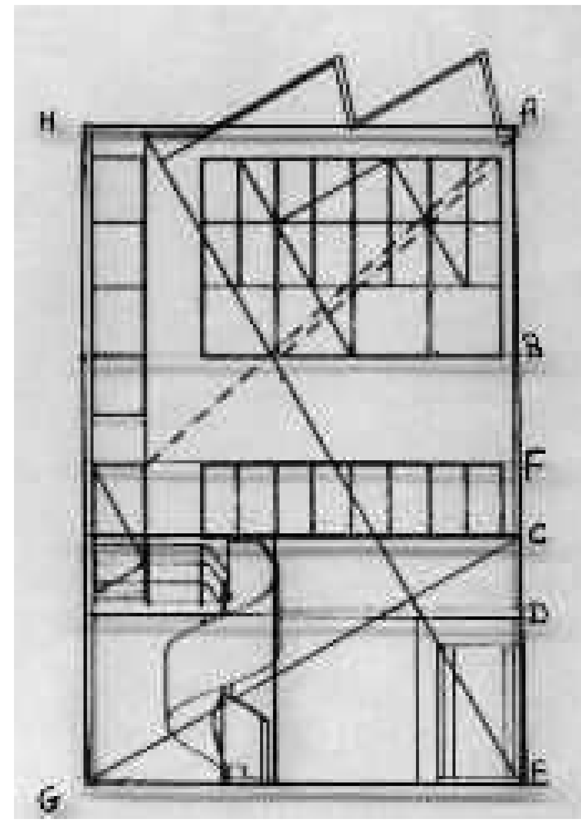
Des plans en or

- Le Corbusier (1887-1965) et son plan de maison



Des plans en or

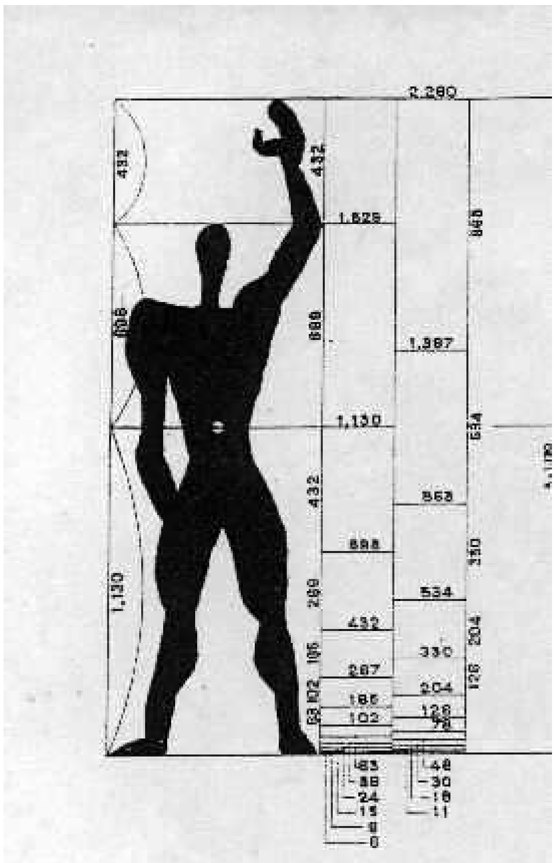
- Le Corbusier (1887-1965) et son plan de maison

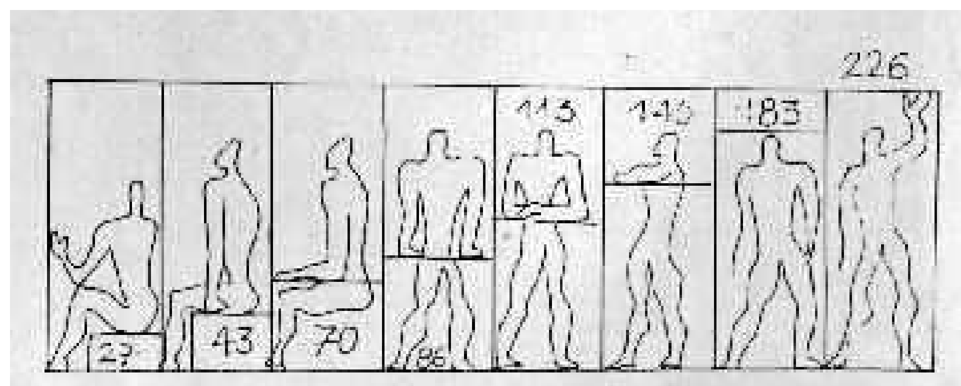


- $|AE|/|AC| = |CE|/|DE| = |BD|/|BC| = |BC|/|BF| = \Phi$

Un homme en or

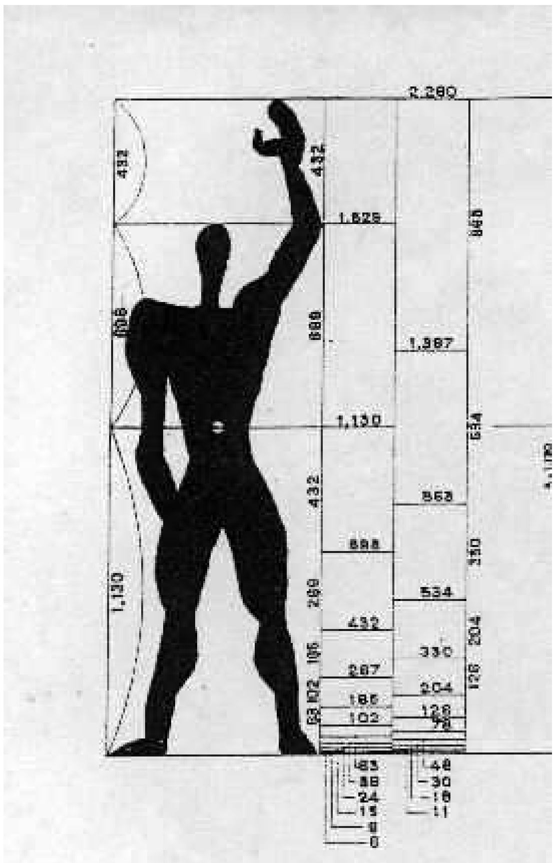
- le Modulor du Corbusier (1947)

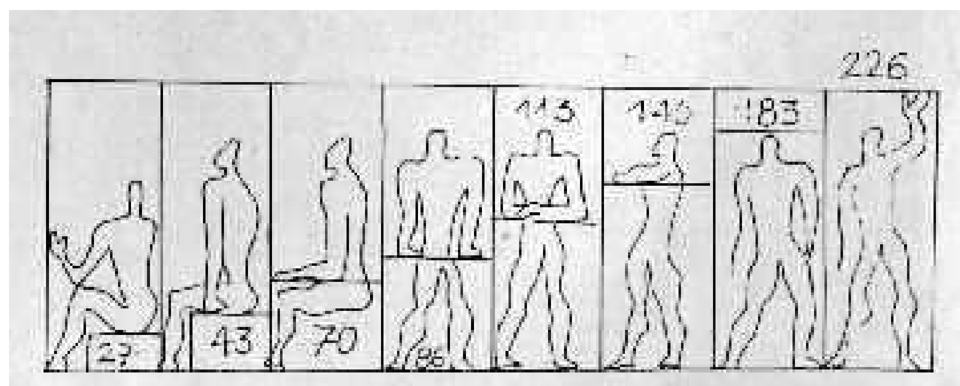




Un homme en or

- le Modulor du Corbusier (1947)

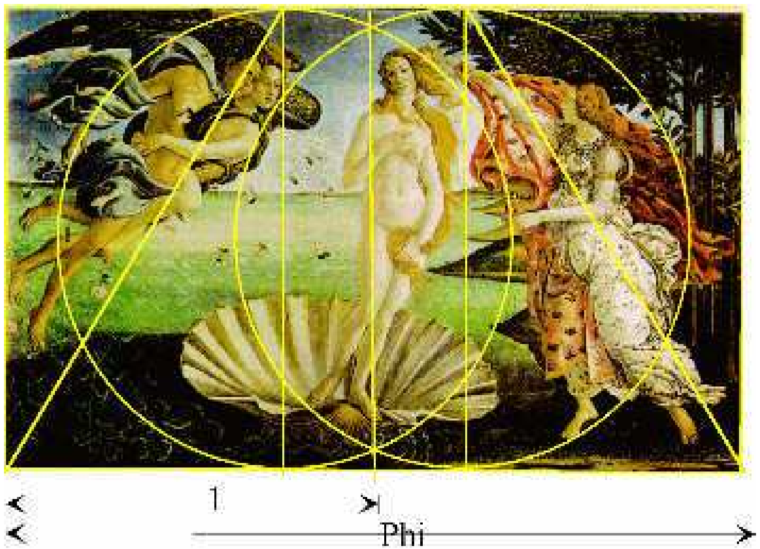




- $226/140, 183/113, 140/86, 113/70, 70/43, 43/27 \simeq \Phi$

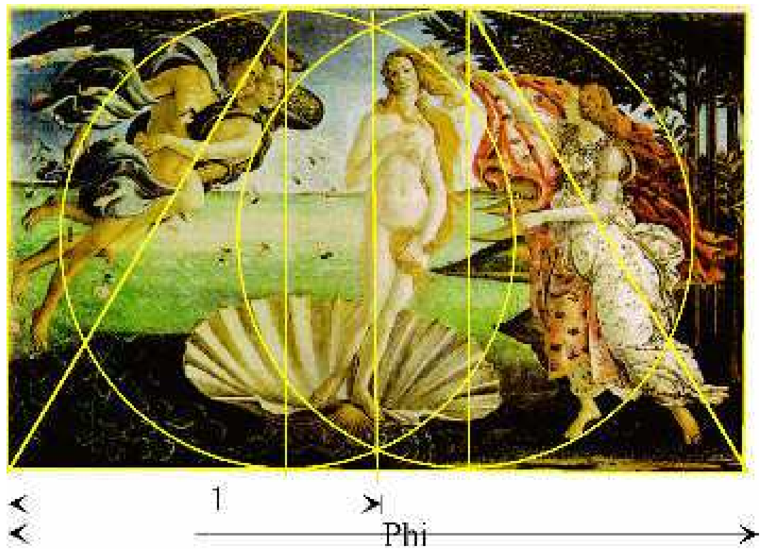
Les peintres ne seraient pas en reste

- Φ apparaîtrait dans la composition de nombreux tableaux, de Botticelli à Seurat



Les peintres ne seraient pas en reste

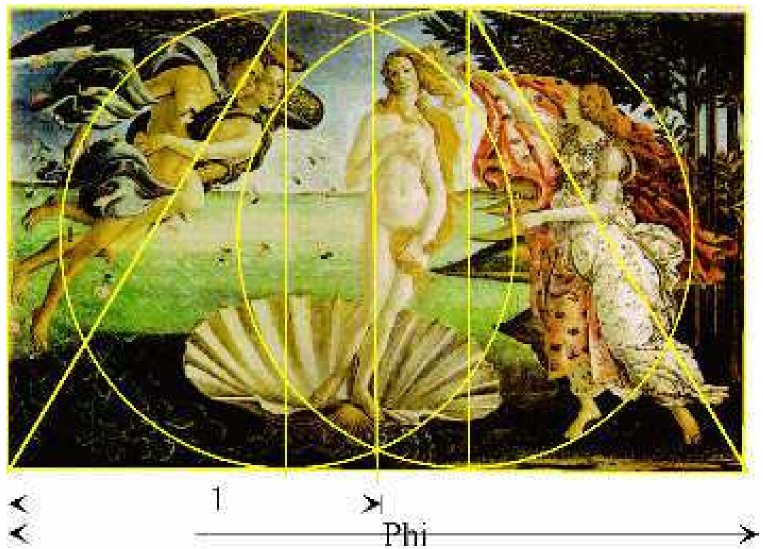
- Φ apparaîtrait dans la composition de nombreux tableaux, de Botticelli à Seurat



- arbitraire dans la prise des mesures et précision des calculs

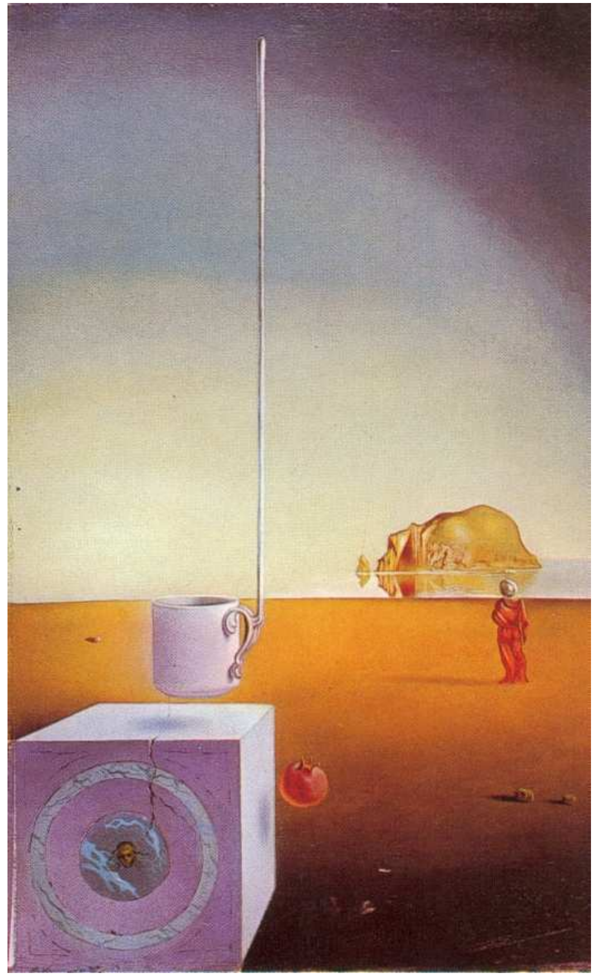
Les peintres ne seraient pas en reste

- Φ apparaîtrait dans la composition de nombreux tableaux, de Botticelli à Seurat



- arbitraire dans la prise des mesures et précision des calculs
- présence inconsciente ou intentionnelle ?

Peintres Φ-philes - Dali



Dali: Demi-tasse géante volante, avec annexe inexplicable de cinq mètres de longueur (1932-35)

Peintres Φ-philes - Van

Van

La face noire du nombre d'or

- la tradition pythagoricienne (mysticisme du nombre) est
  - transmise par les compagnons maçoniques, les rose-croix, les alchimistes, les kaballistes,...
  - exaltée dans les années 1930 par le prince, ingénieur et diplomate roumain Matila Ghyka (1881-1965)

La face noire du nombre d'or

- la tradition pythagoricienne (mysticisme du nombre) est
  - transmise par les compagnons maçoniques, les rose-croix, les alchimistes, les kaballistes,...
  - exaltée dans les années 1930 par le prince, ingénieur et diplomate roumain Matila Ghyka (1881-1965)

- Ghyka introduit le terme nombre d'or

Un lourd héritage

- Ouvrages de Ghyka :
  - 1927 : L'esthétique des proportions dans la nature et dans les arts
  - 1931 : Le nombre d'or : rites et rythmes pythagoriciens dans le développement de la civilisation occidentale
  - 1946 : The geometry of art and life
  - 1952 : Philosophie et mystique du nombre

Un lourd héritage

- Ouvrages de Ghyka :
  - 1927 : L'esthétique des proportions dans la nature et dans les arts
  - 1931 : Le nombre d'or : rites et rythmes pythagoriciens dans le développement de la civilisation occidentale
  - 1946 : The geometry of art and life
  - 1952 : Philosophie et mystique du nombre
- nombreuses affirmations scientifiquement ou historiquement discutables

Un lourd héritage

- Ouvrages de Ghyka :
  - 1927 : L'esthétique des proportions dans la nature et dans les arts
  - 1931 : Le nombre d'or : rites et rythmes pythagoriciens dans le développement de la civilisation occidentale
  - 1946 : The geometry of art and life
  - 1952 : Philosophie et mystique du nombre
- nombreuses affirmations scientifiquement ou historiquement discutables
- Φ est présent dans le Da Vinci Code !

Délires dorés

- Dom Neroman (= Maurice Rougie, ingénieur) :
  1946 : Le nombre d'or à la portée de tous (rééd. 1995)

Délires dorés

- Dom Neroman (= Maurice Rougie, ingénieur) :
  1946 : Le nombre d'or à la portée de tous (rééd. 1995)
- on y trouve de séduisantes mais fausses égalités :
  - $\frac{6}{5}\Phi^2 \ (3,141640786\ldots) = \pi \ (3,141592654\ldots)$
  - $\frac{6}{31}(8\Phi + 3) \ (3,085988112\ldots) = e + \frac{1}{e} \ (3,08616127\ldots)$

Délires dorés

- Dom Neroman (= Maurice Rougie, ingénieur) :
  1946 : Le nombre d'or à la portée de tous (rééd. 1995)
- on y trouve de séduisantes mais fausses égalités :
  - $\frac{6}{5}\Phi^2 \;\; (3,141640786\ldots) = \pi \;\; (3,141592654\ldots)$
  - $\frac{6}{31}(8\Phi + 3) \;\; (3,085988112\ldots) = e + \frac{1}{e} \;\; (3,08616127\ldots)$
- on y trouve des affirmations surprenantes :
  - *le nombre d'or est à la fois irrationnel et entier, ... un peu comme une corde est muette ou sonore selon qu'elle est immobile ou animée d'un mouvement vibratoire*
  - *s'il existe une race dont le nombril est trop bas pour la grande majorité des individus, cette race n'a pas encore atteint l'âge de sa maturité*

Beauté Φ-sique – théorie

Canon de la beauté : le rapport T/H de la taille T à la hauteur H du nombril doit être égal à Φ

Beauté Φ-sique - expériences

- *étudiants de Münster* (207)

	T/H	Φ
filles	$1,615$	$1,618$
garçons	$1,618$	$1,618$
tous	$1,618$	$1,618$

Beauté Φ-sique - expériences

- *étudiants de Münster* (207)

	T/H	Φ
filles	$1,615$	$1,618$
garçons	$1,618$	$1,618$
tous	$1,618$	$1,618$

- *étudiants de Calcutta* (252)

	T/H	Φ
tous	$1,615$	$1,618$

Beauté Φ-sique - expériences

- *étudiants de Münster* (207)

	T/H	Φ
filles	$1,615$	$1,618$
garçons	$1,618$	$1,618$
tous	$1,618$	$1,618$

- *étudiants de Calcutta* (252)

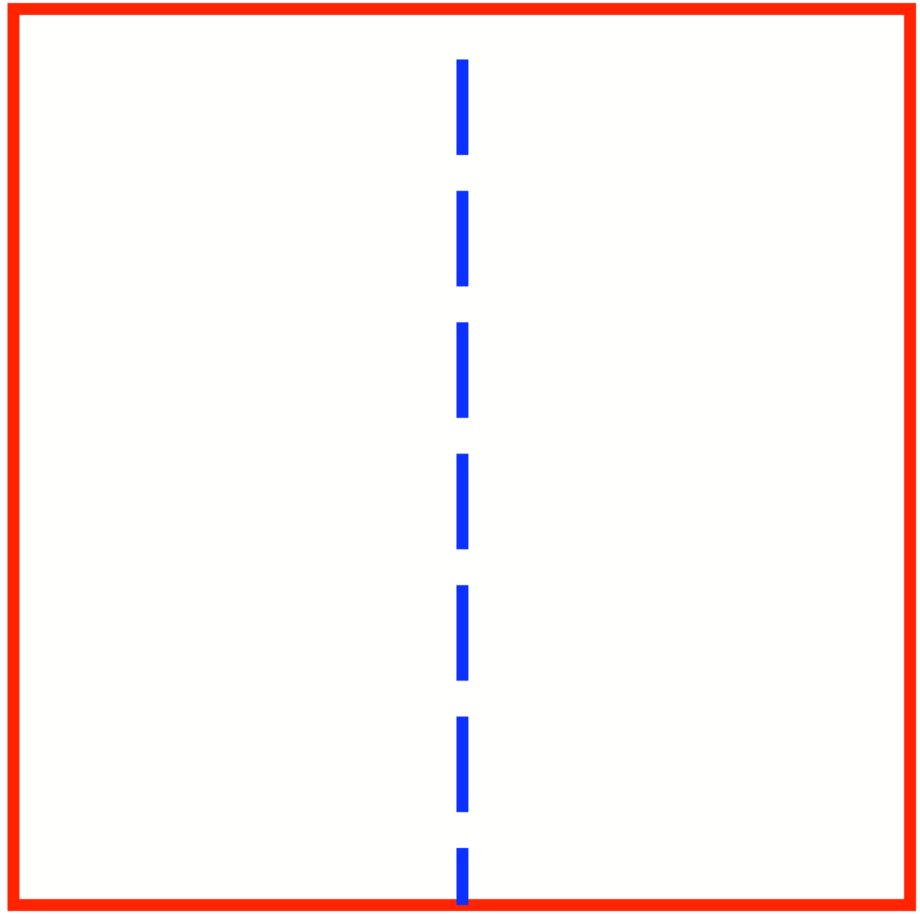
	T/H	Φ
tous	$1,615$	$1,618$

- de quoi occuper un week-end pluvieux en famille ou entre amis !

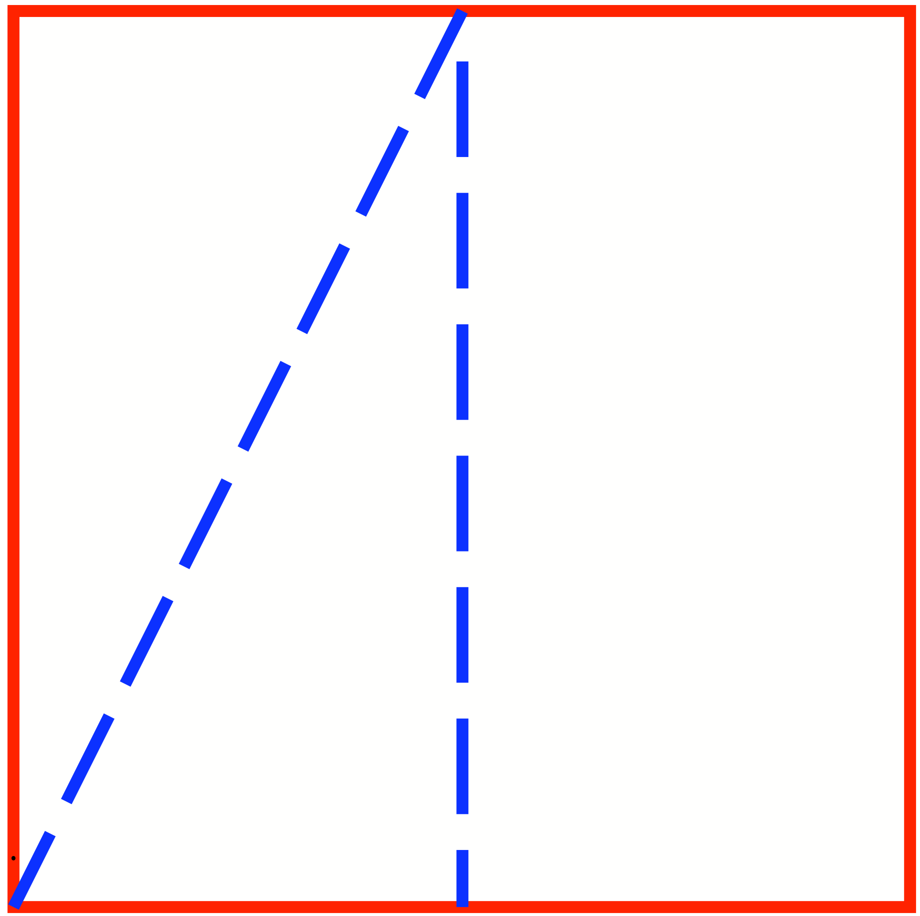
Deuxième partie

Des maths en or

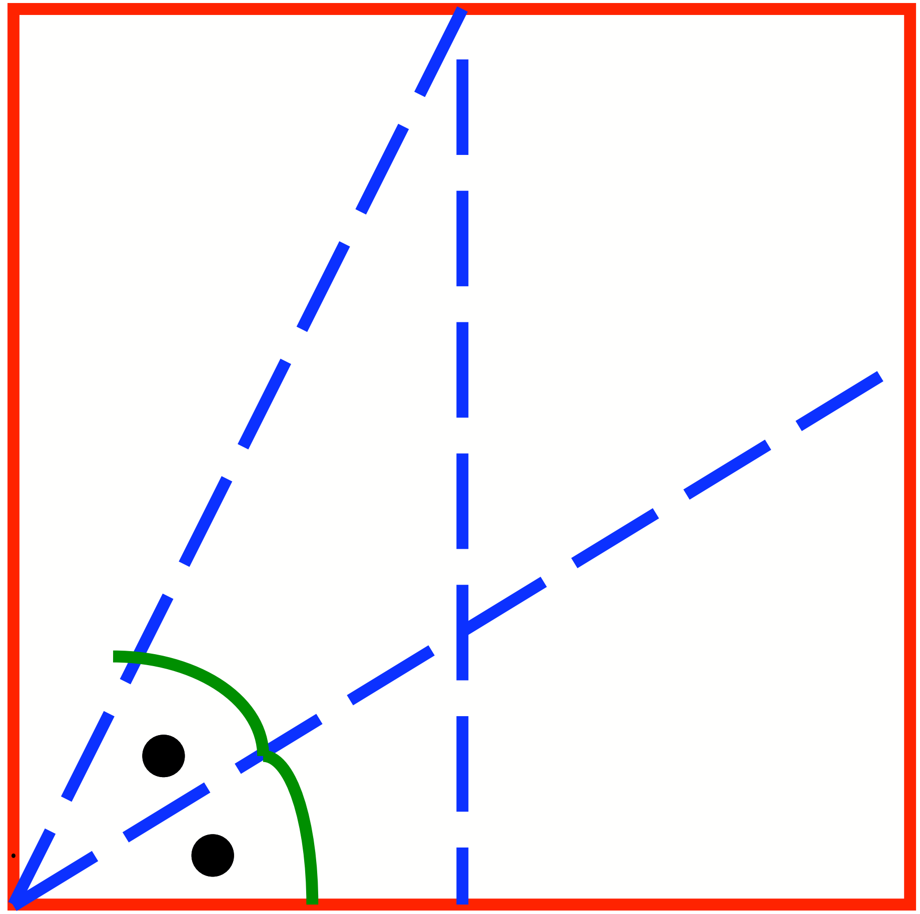
Origami - 1



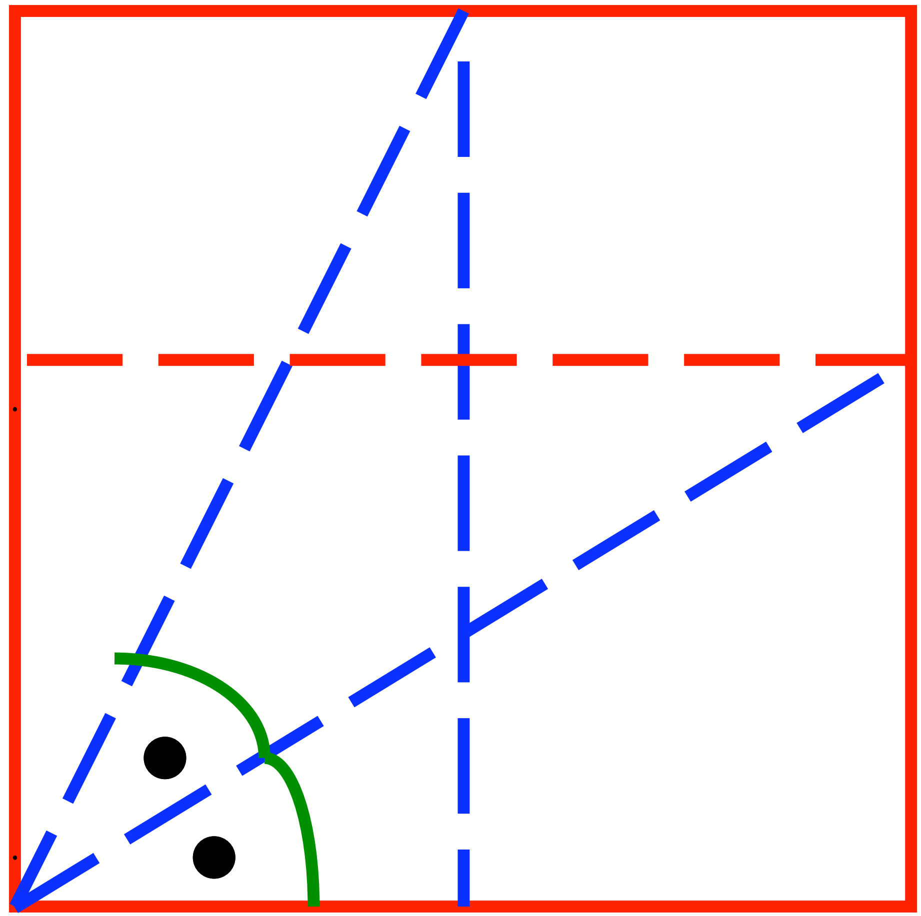
Origami - 2



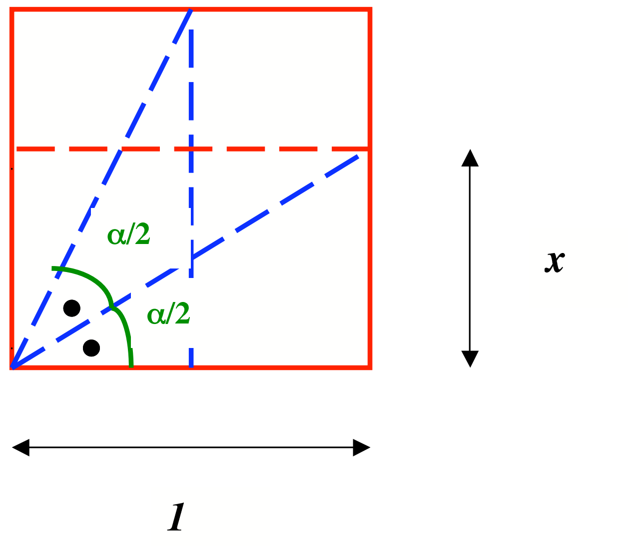
Origami - 3



Origami - 4

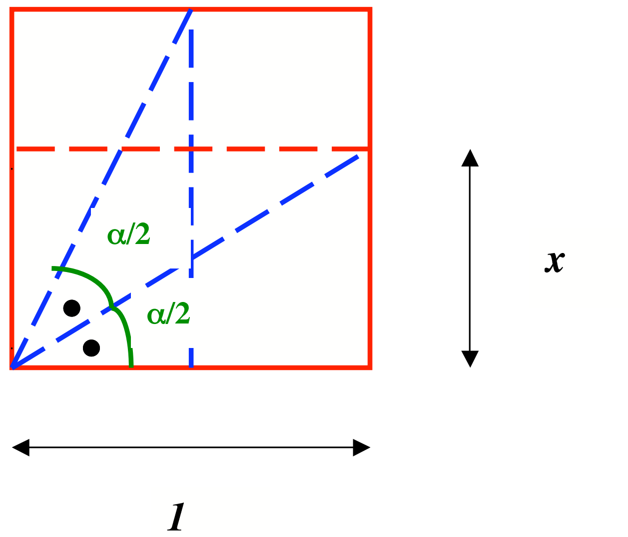


Un peu de “trigonor"



à prouver : $\frac{1}{x} = \Phi$

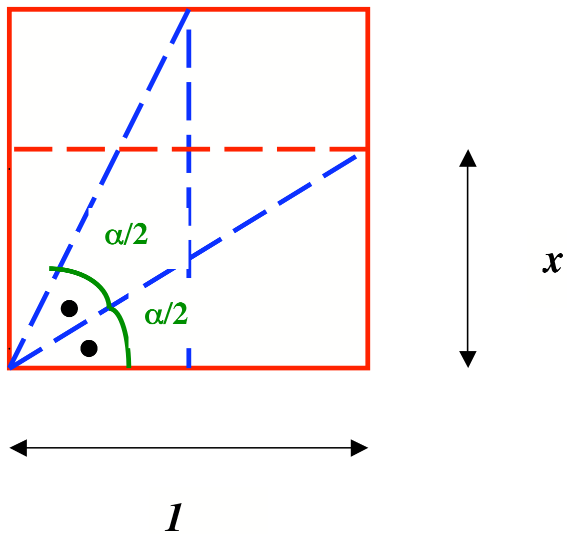
Un peu de “trigonor"



à prouver : $\frac{1}{x} = \Phi$

- on a $\tan\alpha = \frac{1}{1/2} = 2 \quad \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{x}{1} = x$

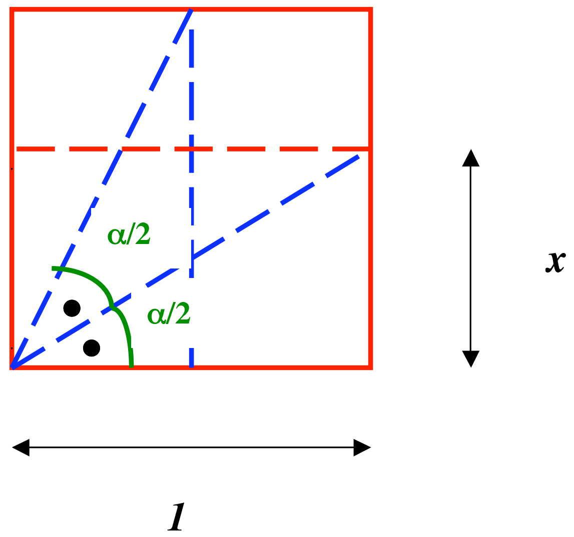
Un peu de “trigonor"



à prouver : $\frac{1}{x} = \Phi$

- on a $\tan\alpha = \frac{1}{1/2} = 2 \quad \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{x}{1} = x$
- on sait que $\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

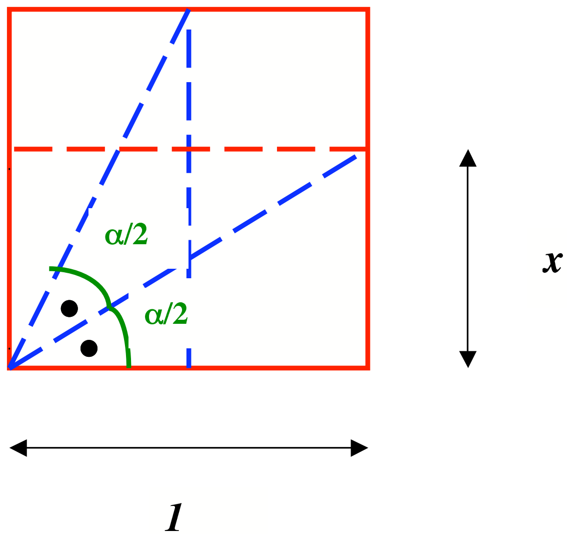
Un peu de “trigonor"



à prouver : $\frac{1}{x} = \Phi$

- on a $\tan\alpha = \frac{1}{1/2} = 2 \qquad \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{x}{1} = x$
- on sait que $\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$
- donc $2 = \frac{2x}{1-x^2}$ càd $x^2 + x - 1 = 0$

Un peu de “trigonor"

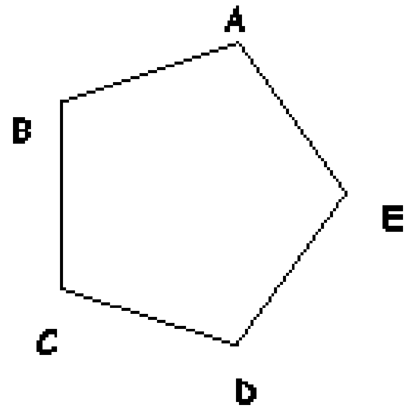


à prouver : $\frac{1}{x} = \Phi$

- on a $\tan\alpha = \frac{1}{1/2} = 2 \qquad \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{x}{1} = x$
- on sait que $\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$
- donc $2 = \frac{2x}{1-x^2}$ càd $x^2 + x - 1 = 0$
- d’où $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ càd $\frac{1}{x} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Paver avec des pentagones ?

Du pentagone régulier aux pavages de Penrose



Observons ce pentagone de côté unité :

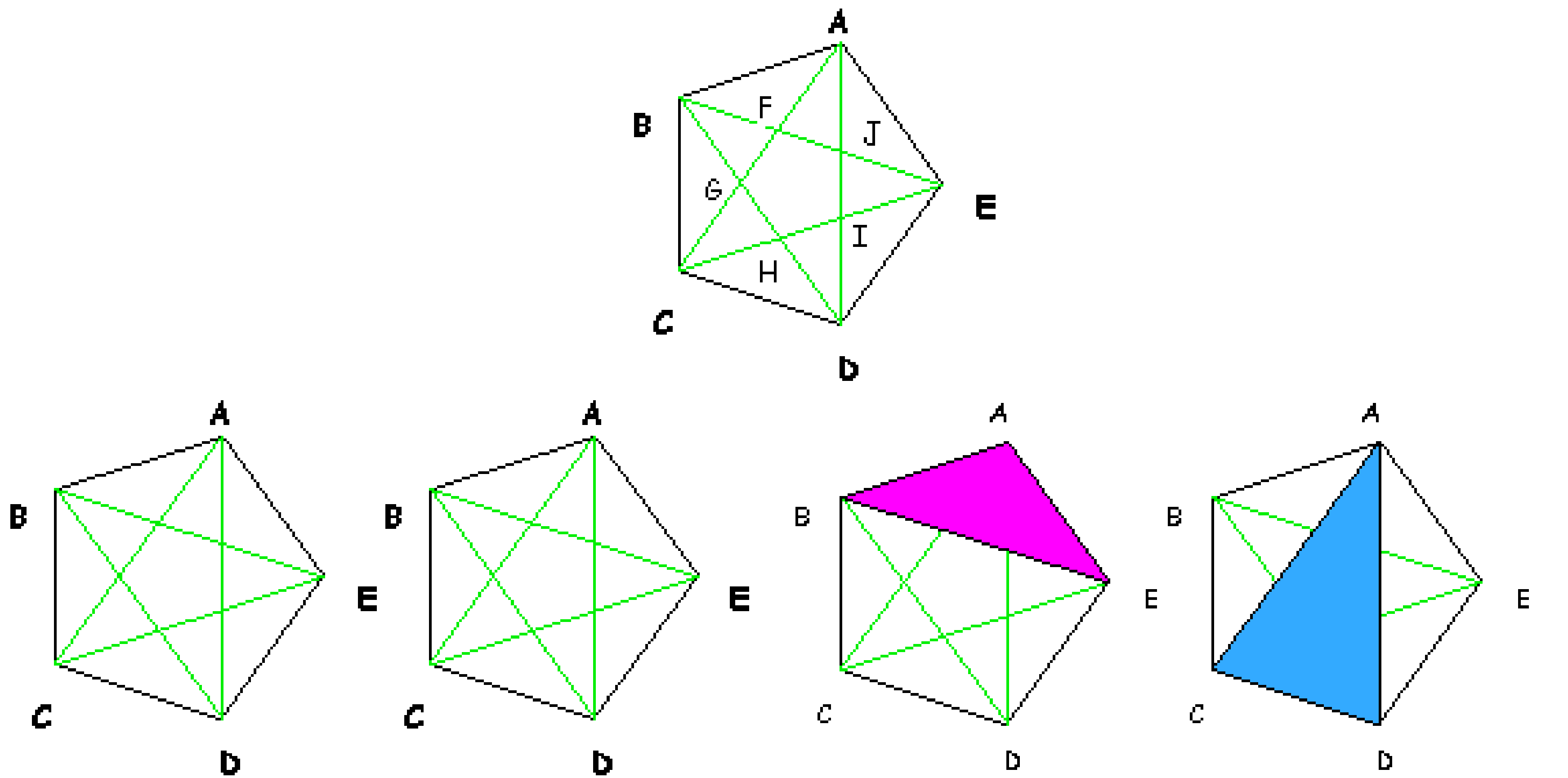
- Il est convexe
- Ses côtés sont isométriques
- La mesure des angles intérieurs est de 108 °
- Il possède 5 diagonales

Si l'on trace les diagonales on voit apparaître :

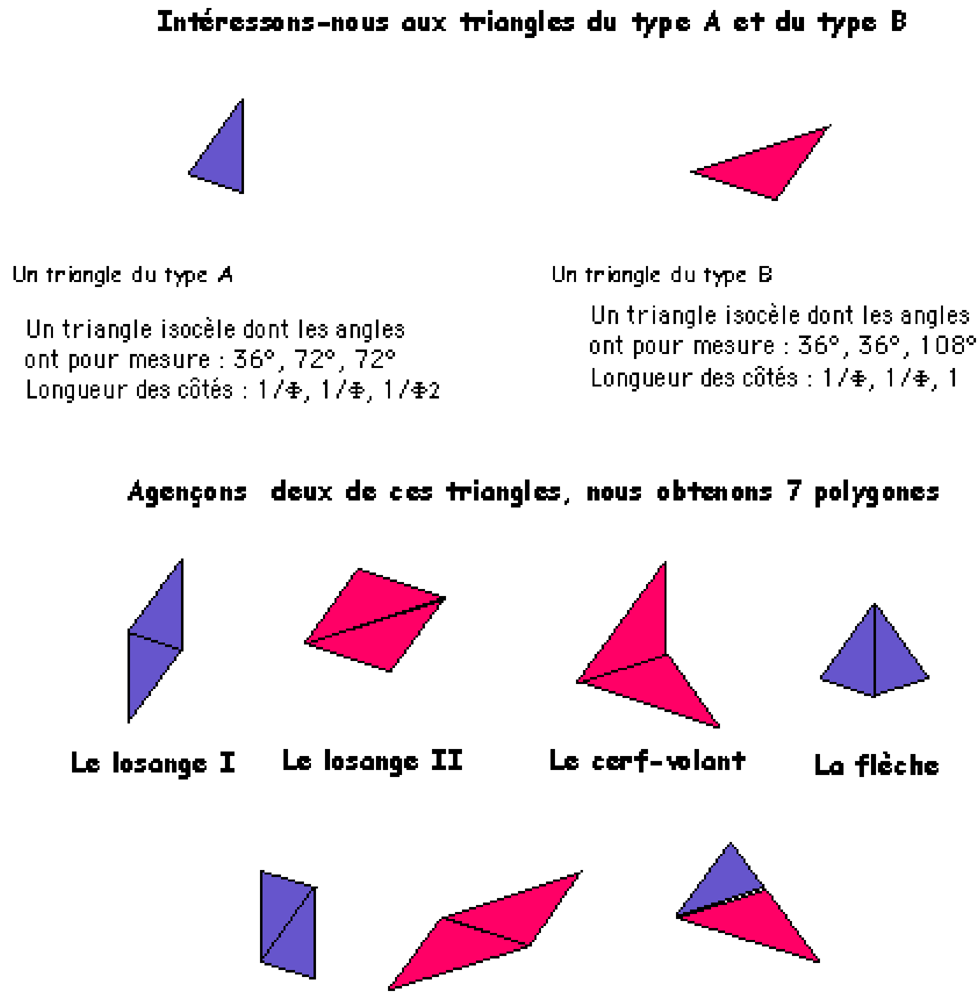
- un autre pentagone régulier plus petit (rapport des aires des pentagones ABCDE et FGHIJ est égal à Φ)

- La rapport AD/AE est égal au nombre d'or phi

Les triangles d’or du pentagone

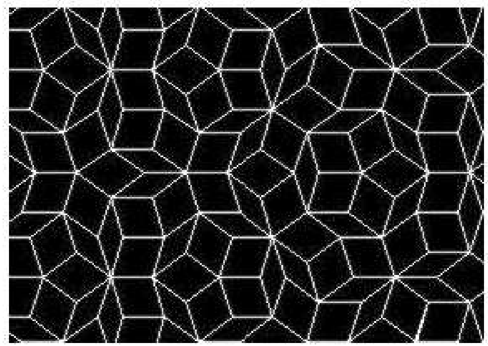


Triangles d’or associés

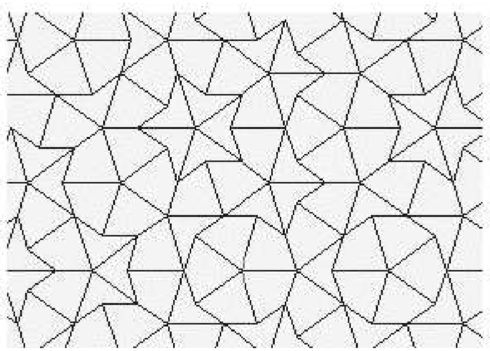


Pavages de Penrose

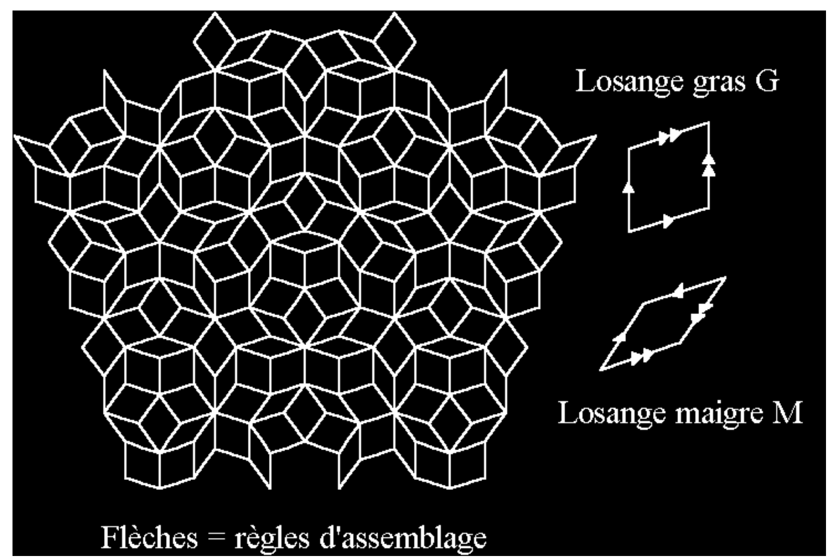
Pavons le plan à l'aide de losanges I et de losanges II



Pavons le plan à l'aide de flèches et de cerf-volants

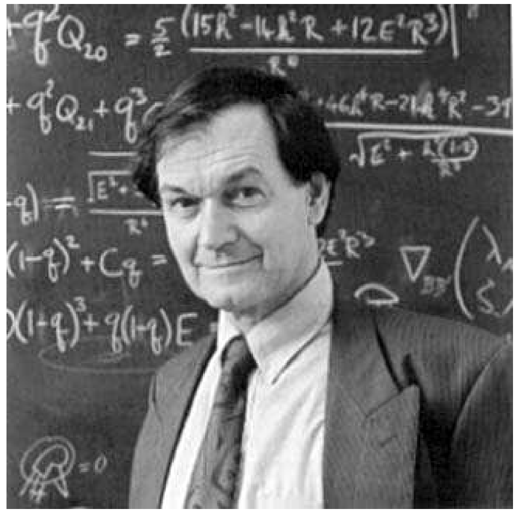


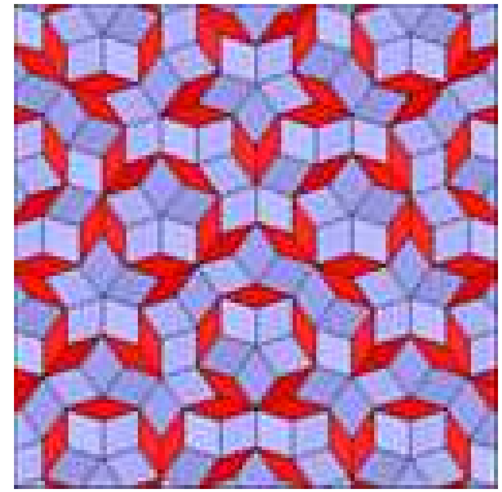
Nous obtenons des pavages apériodiques appelés pavages de Penrose
du nom du mathématicien qui les découvrit.



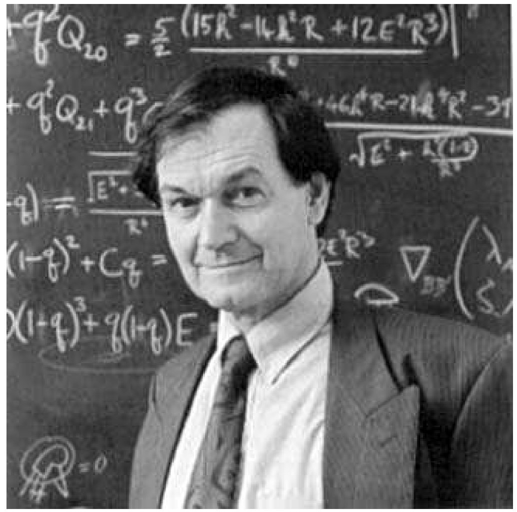
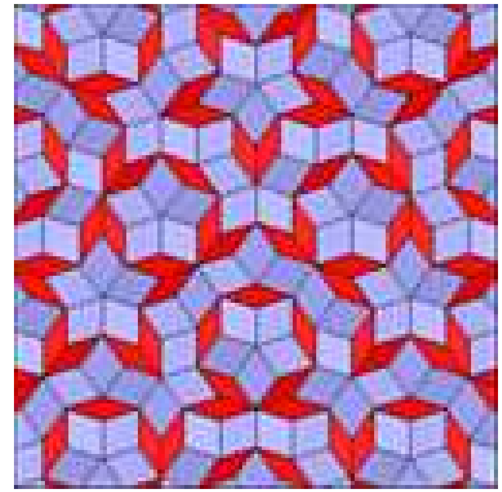
Pavages et nombre d’or

Penrose



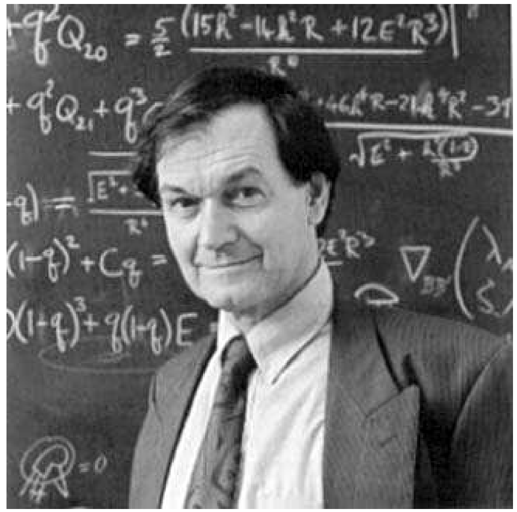
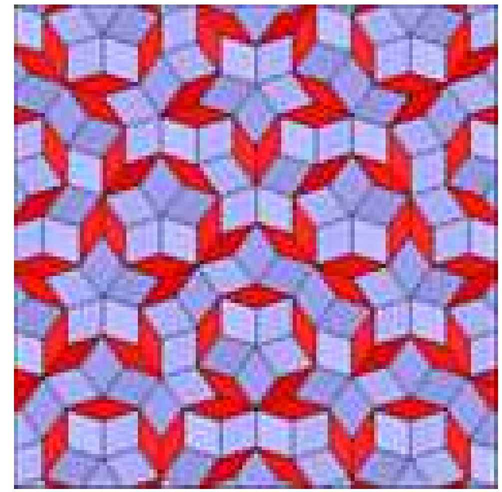


Pavages et nombre d'or

Penrose  

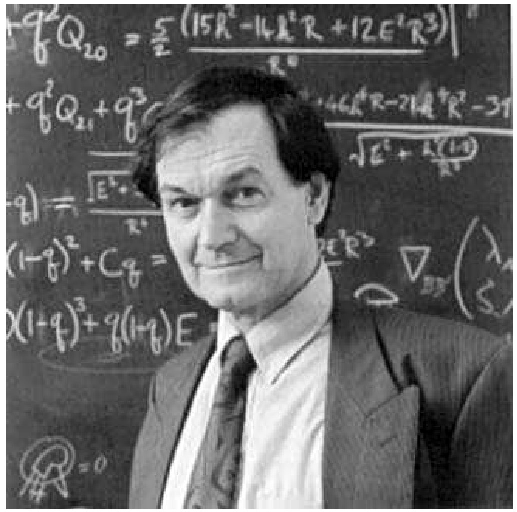
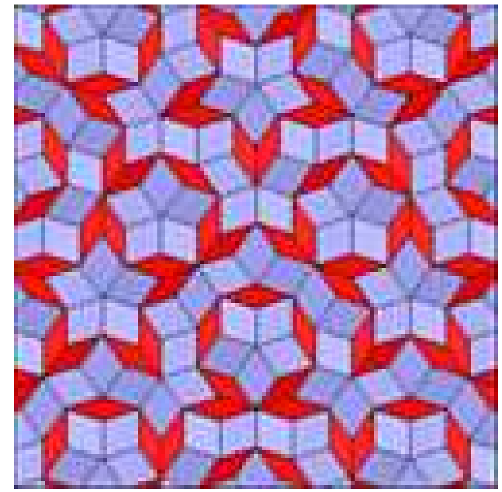
- pas périodiques mais quasi-périodiques

Pavages et nombre d'or

Penrose  

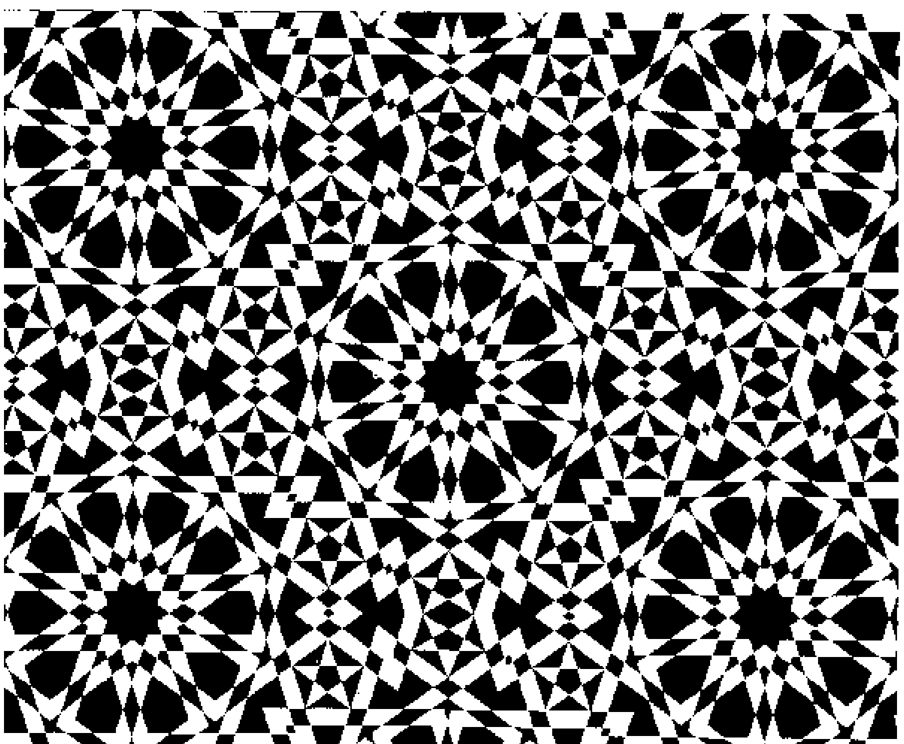
- pas périodiques mais quasi-périodiques
- le rapport entre le nombre de cerf-volants et le nombre de flèches, ou entre le nombre de losanges bleus et de losanges rouges, tend vers Φ

Pavages et nombre d'or

Penrose  

- pas périodiques mais quasi-périodiques
- le rapport entre le nombre de cerf-volants et le nombre de flèches, ou entre le nombre de losanges bleus et de losanges rouges, tend vers Φ
- application à l'étude des quasi-cristaux

De l’Alhambra à Penrose



Une formule en or pour F_n

- essayons $F_n = a^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$

Une formule en or pour F_n

- essayons $F_n = a^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$
- il faut $a^n = a^{n-1} + a^{n-2}$ càd $a^2 = a + 1$

Une formule en or pour F_n

- essayons $F_n = a^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$
- il faut $a^n = a^{n-1} + a^{n-2}$ càd $a^2 = a + 1$
- racines : $a_1 = \Phi, \quad a_2 = -\frac{1}{\Phi} = (-\Phi)^{-1}$

Une formule en or pour F_n

- essayons $F_n = a^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$
- il faut $a^n = a^{n-1} + a^{n-2}$ càd $a^2 = a + 1$
- racines : $a_1 = \Phi, \quad a_2 = -\frac{1}{\Phi} = (-\Phi)^{-1}$
- mais $\Phi^1 = \Phi \neq 1$, $\quad (-\Phi)^{-1} \neq 1$

Une formule en or pour F_n

- essayons $F_n = a^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$
- il faut $a^n = a^{n-1} + a^{n-2}$ càd $a^2 = a + 1$
- racines : $a_1 = \Phi,$ $a_2 = -\frac{1}{\Phi} = (-\Phi)^{-1}$
- mais $\Phi^1 = \Phi \neq 1$, $(-\Phi)^{-1} \neq 1$
- $F_n = A\Phi^n + B(-\Phi)^{-n}$ vérifie $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
  quels que soient $A,\ B$

Une formule en or pour F_n

- essayons $F_n = a^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$
- il faut $a^n = a^{n-1} + a^{n-2}$ càd $a^2 = a + 1$
- racines : $a_1 = \Phi, \quad a_2 = -\frac{1}{\Phi} = (-\Phi)^{-1}$
- mais $\Phi^1 = \Phi \neq 1$, $(-\Phi)^{-1} \neq 1$
- $F_n = A\Phi^n + B(-\Phi)^{-n}$ vérifie $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ quels que soient $A, \; B$
- il faut $A\Phi - B\Phi^{-1} = 1, \quad A\Phi^2 + B\Phi^{-2} = 1$ ce qui donne $A, \; B$

Une formule en or pour F_n

- essayons $F_n = a^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$
- il faut $a^n = a^{n-1} + a^{n-2}$ càd $a^2 = a + 1$
- racines : $a_1 = \Phi, \quad a_2 = -\frac{1}{\Phi} = (-\Phi)^{-1}$
- mais $\Phi^1 = \Phi \neq 1$, $(-\Phi)^{-1} \neq 1$
- $F_n = A\Phi^n + B(-\Phi)^{-n}$ vérifie $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
  quels que soient $A, \ B$
- il faut $A\Phi - B\Phi^{-1} = 1, \quad A\Phi^2 + B\Phi^{-2} = 1$ ce qui donne $A, \ B$
- d'où $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\Phi^n - (-\Phi)^{-n}\right]$
  (formule de Binet (1843))

Une algèbre “linéaire"

- $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$

Une algèbre “linéaire"

- $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$
- $\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1 = 0,618033989\ldots$

Une algèbre “linéaire"

- $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$
- $\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1 = 0,618033989\ldots$
- $$\left\{\begin{array}{llll} \Phi^2 & & & = \Phi + 1 \\ \Phi^3 & = \Phi(\Phi + 1) & = \Phi^2 + \Phi & = 2\Phi + 1 \\ \Phi^4 & = \Phi(2\Phi + 1) & = 2\Phi^2 + \Phi & = 3\Phi + 2 \\ \Phi^5 & = \Phi(3\Phi + 2) & = 3\Phi^2 + 2\Phi & = 5\Phi + 3 \\ \Phi^6 & = \Phi(5\Phi + 3) & = 5\Phi^2 + 3\Phi & = 8\Phi + 5 \end{array}\right.$$

Une algèbre “linéaire"

- $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$
- $\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1 = 0,618033989\ldots$
- $$\left\{\begin{array}{llll} \Phi^2 & & & = \Phi + 1 \\ \Phi^3 & = \Phi(\Phi+1) & = \Phi^2 + \Phi & = 2\Phi + 1 \\ \Phi^4 & = \Phi(2\Phi+1) & = 2\Phi^2 + \Phi & = 3\Phi + 2 \\ \Phi^5 & = \Phi(3\Phi+2) & = 3\Phi^2 + 2\Phi & = 5\Phi + 3 \\ \Phi^6 & = \Phi(5\Phi+3) & = 5\Phi^2 + 3\Phi & = 8\Phi + 5 \end{array}\right.$$
- $$\begin{array}{lcl} \Phi^n & = & u_n\Phi + v_n \\ \Phi^{n+1} & = & u_{n+1}\Phi + v_{n+1} = \Phi(u_n\Phi + v_n) = u_n(\Phi+1) + v_n\Phi \\ & = & (u_n + v_n)\Phi + u_n \end{array}$$

Une algèbre “linéaire"

- $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$
- $\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1 = 0,618033989\ldots$
- $$\left\{\begin{array}{llll} \Phi^2 & & & = \Phi + 1 \\ \Phi^3 & = \Phi(\Phi+1) & = \Phi^2 + \Phi & = 2\Phi + 1 \\ \Phi^4 & = \Phi(2\Phi+1) & = 2\Phi^2 + \Phi & = 3\Phi + 2 \\ \Phi^5 & = \Phi(3\Phi+2) & = 3\Phi^2 + 2\Phi & = 5\Phi + 3 \\ \Phi^6 & = \Phi(5\Phi+3) & = 5\Phi^2 + 3\Phi & = 8\Phi + 5 \end{array}\right.$$
- $$\begin{array}{lcl} \Phi^n & = & u_n\Phi + v_n \\ \Phi^{n+1} & = & u_{n+1}\Phi + v_{n+1} = \Phi(u_n\Phi + v_n) = u_n(\Phi+1) + v_n\Phi \\ & = & (u_n + v_n)\Phi + u_n \end{array}$$
- $u_{n+1} = u_n + v_n, \quad v_{n+1} = u_n, \quad u_1 = 1, \quad v_1 = 0$

Revoilà Fibonacci !

- $u_{n+1} = u_n + v_n, \quad v_{n+1} = u_n, \quad u_1 = 1, \quad v_1 = 0$

Revoilà Fibonacci !

- $u_{n+1} = u_n + v_n, \quad v_{n+1} = u_n, \quad u_1 = 1, \quad v_1 = 0$
- $$\left\{ \begin{array}{c|cc} & u_n & v_n \\ \hline n=1 & 1 & 0 \\ n=2 & 1 & 1 \\ n=3 & 2 & 1 \\ n=4 & 3 & 2 \\ n=5 & 5 & 3 \\ n=6 & 8 & 5 \\ n=7 & 13 & 8 \end{array} \right.$$

Revoilà Fibonacci !

- $u_{n+1} = u_n + v_n, \quad v_{n+1} = u_n, \quad u_1 = 1, \quad v_1 = 0$

- $$\left\{ \begin{array}{c|cc} & u_n & v_n \\ \hline n=1 & 1 & 0 \\ n=2 & 1 & 1 \\ n=3 & 2 & 1 \\ n=4 & 3 & 2 \\ n=5 & 5 & 3 \\ n=6 & 8 & 5 \\ n=7 & 13 & 8 \end{array} \right.$$

- $u_{n+2} = u_{n+1} + v_{n+1} = u_{n+1} + u_n, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 1$

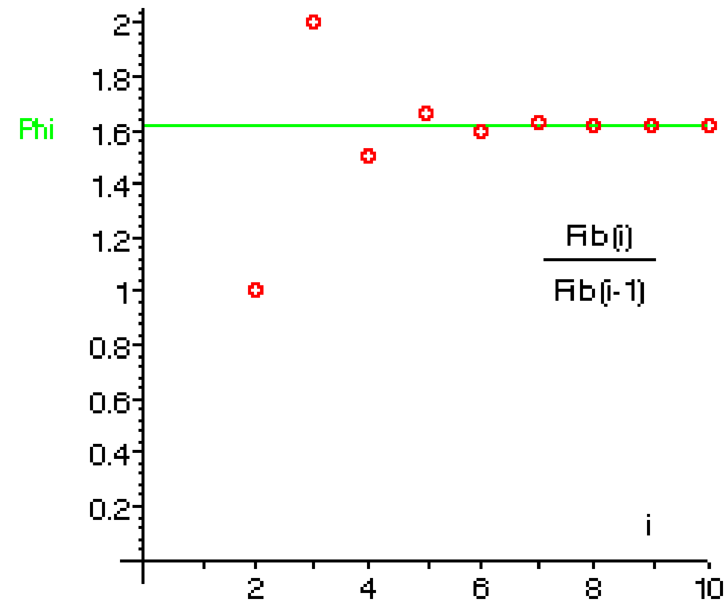
Revoilà Fibonacci !

- $u_{n+1} = u_n + v_n, \quad v_{n+1} = u_n, \quad u_1 = 1, \quad v_1 = 0$
- $$\left\{ \begin{array}{c|cc} & u_n & v_n \\ \hline n=1 & 1 & 0 \\ n=2 & 1 & 1 \\ n=3 & 2 & 1 \\ n=4 & 3 & 2 \\ n=5 & 5 & 3 \\ n=6 & 8 & 5 \\ n=7 & 13 & 8 \end{array} \right.$$
- $u_{n+2} = u_{n+1} + v_{n+1} = u_{n+1} + u_n, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 1$
- $u_n = F_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$

Une troublante convergence

$$\begin{array}{rclcl}
\frac{F_2}{F_1} & = & \frac{1}{1} & = & 1 \\
\frac{F_3}{F_2} & = & \frac{2}{1} & = & 2 \\
\frac{F_4}{F_3} & = & \frac{3}{2} & = & 1,5 \\
\frac{F_5}{F_4} & = & \frac{5}{3} & = & 1,666\ldots \\
\frac{F_6}{F_5} & = & \frac{8}{5} & = & 1,6 \\
\frac{F_7}{F_6} & = & \frac{13}{8} & = & 1,625 \\
\frac{F_8}{F_7} & = & \frac{21}{13} & = & 1,615384615\ldots \\
\frac{F_9}{F_8} & = & \frac{34}{21} & = & 1,619047619\ldots \\
\frac{F_{10}}{F_9} & = & \frac{55}{34} & = & 1,617647059\ldots
\end{array}$$

Une troublante convergence



$$
\begin{aligned}
\frac{F_2}{F_1} &= \frac{1}{1} &= 1\\
\frac{F_3}{F_2} &= \frac{2}{1} &= 2\\
\frac{F_4}{F_3} &= \frac{3}{2} &= 1,5\\
\frac{F_5}{F_4} &= \frac{5}{3} &= 1,666\ldots\\
\frac{F_6}{F_5} &= \frac{8}{5} &= 1,6\\
\frac{F_7}{F_6} &= \frac{13}{8} &= 1,625\\
\frac{F_8}{F_7} &= \frac{21}{13} &= 1,615384615\ldots\\
\frac{F_9}{F_8} &= \frac{34}{21} &= 1,619047619\ldots\\
\frac{F_{10}}{F_9} &= \frac{55}{34} &= 1,617647059\ldots
\end{aligned}
$$

Une limite en or

- $\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} \quad (n = 2, \ldots)$

Une limite en or

- $\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} \quad (n = 2, \ldots)$
- $si \quad w_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}, \quad w_n = 1 + \frac{1}{w_{n-1}} \quad (n = 2, 3, \ldots) \quad w_1 = 1$

Une limite en or

- $\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} \quad (n = 2, \ldots)$
- $si \quad w_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}, \quad w_n = 1 + \frac{1}{w_{n-1}} \quad (n = 2, 3, \ldots) \quad w_1 = 1$
- $w_{n-1} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad w_n \geq 1 \quad donc \quad w_n \geq 1 \quad (n \geq 1)$
- $si \quad \lim_{n\to\infty} w_n = w, \quad alors \quad w = 1 + \frac{1}{w}, \quad donc \quad w^2 = w + 1, \quad donc \quad w = \Phi$

Une limite en or

- $\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} \quad (n = 2, \ldots)$
- $si \quad w_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}, \quad w_n = 1 + \frac{1}{w_{n-1}} \quad (n = 2, 3, \ldots) \quad w_1 = 1$
- $w_{n-1} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad w_n \geq 1 \quad donc \quad w_n \geq 1 \quad (n \geq 1)$
- $si \quad \lim_{n\to\infty} w_n = w, \quad alors \quad w = 1 + \frac{1}{w}, \quad donc \quad w^2 = w + 1, \quad donc \quad w = \Phi$
- $|w_n - \Phi| = \left| \frac{1}{w_{n-1}} - \frac{1}{\Phi} \right| = \frac{|\Phi - w_{n-1}|}{w_{n-1}\Phi}$
  $\leq \frac{|w_{n-1} - \Phi|}{\Phi} \leq \frac{|w_{n-2} - \Phi|}{\Phi^2} \leq \ldots \leq \frac{|w_1 - \Phi|}{\Phi^{n-1}} = \frac{1}{\Phi^n}$

Une limite en or

- $\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} \quad (n = 2, \ldots)$
- $si \quad w_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}, \quad w_n = 1 + \frac{1}{w_{n-1}} \quad (n = 2, 3, \ldots) \quad w_1 = 1$
- $w_{n-1} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad w_n \geq 1 \quad donc \quad w_n \geq 1 \quad (n \geq 1)$
- $si \quad \lim_{n\to\infty} w_n = w, \quad alors \quad w = 1 + \frac{1}{w}, \quad donc \quad w^2 = w + 1, \quad donc \quad w = \Phi$
- $|w_n - \Phi| = \left|\frac{1}{w_{n-1}} - \frac{1}{\Phi}\right| = \frac{|\Phi - w_{n-1}|}{w_{n-1}\Phi}$
  $\leq \frac{|w_{n-1} - \Phi|}{\Phi} \leq \frac{|w_{n-2} - \Phi|}{\Phi^2} \leq \ldots \leq \frac{|w_1 - \Phi|}{\Phi^{n-1}} = \frac{1}{\Phi^n}$
- $\lim_{n\to\infty} w_n = \Phi$

Des fractions en abîme

- $w_n = 1 + \frac{1}{w_{n-1}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{w_{n-2}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{w_{n-3}}}} = \ldots$

Des fractions en abîme

- $w_n = 1 + \frac{1}{w_{n-1}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{w_{n-2}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{w_{n-3}}}} = \ldots$
- $\Phi = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}}$ (fraction continue)

Des fractions en abîme

- $w_n = 1 + \frac{1}{w_{n-1}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{w_{n-2}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{w_{n-3}}}} = \dots$
- $\Phi = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}$ (fraction continue)
- $a \in \mathbb{R}, \quad [a] =$ partie entière de a

Des fractions en abîme

- $w_n = 1 + \frac{1}{w_{n-1}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{w_{n-2}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{w_{n-3}}}} = \ldots$
- $\Phi = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}}$ (fraction continue)
- $a \in \mathbb{R}, \quad [a] =$ partie entière de a
- $a = [a] + \frac{1}{a_1} = [a] + \frac{1}{[a_1]+\frac{1}{a_2}} = [a] + \frac{1}{[a_1]+\frac{1}{[a_2]+\frac{1}{a_3}}} = \ldots$

  (on s'arrête si l'un des a_j est entier)

  $a = [a] + \frac{1}{[a_1]+\frac{1}{[a_2]+\frac{1}{[a_3]+\ldots}}}$

Des fractions en abîme

- $w_n = 1 + \frac{1}{w_{n-1}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{w_{n-2}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{w_{n-3}}}} = \ldots$
- $\Phi = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}}$ (fraction continue)
- $a \in \mathbb{R}$, $[a] =$ partie entière de a
- $a = [a] + \frac{1}{a_1} = [a] + \frac{1}{[a_1]+\frac{1}{a_2}} = [a] + \frac{1}{[a_1]+\frac{1}{[a_2]+\frac{1}{a_3}}} = \ldots$

  (on s'arrête si l'un des a_j est entier)

  $a = [a] + \frac{1}{[a_1]+\frac{1}{[a_2]+\frac{1}{[a_3]+\ldots}}}$
- *à tout* $a \in \mathbb{R}$ *correspond une unique suite d'entiers* $[a], [a_1], [a_2], [a_3], \ldots$ *finie* $\Leftrightarrow$ a *rationnel* (développement en fraction continue)

Φ meilleur irrationnel ?

- $a = [a] + \frac{1}{[a_1] + \frac{1}{[a_2] + \frac{1}{[a_3] + \dots}}}$

Φ meilleur irrationnel ?

- $a = [a] + \cfrac{1}{[a_1] + \cfrac{1}{[a_2] + \cfrac{1}{[a_3] + \ldots}}}$
- *chaque* $A_n = [a] + \cfrac{1}{[a_1] + \cfrac{1}{[a_2] + \cfrac{1}{[a_3] + \ldots + \cfrac{1}{[a_n]}}}}$ *est la meilleure approximation rationnelle de* a *par rapport aux fractions rationnelles de dénominateur égal ou plus petit*

Φ meilleur irrationnel ?

- $a = [a] + \cfrac{1}{[a_1] + \cfrac{1}{[a_2] + \cfrac{1}{[a_3] + \ldots}}}$
- *chaque* $A_n = [a] + \cfrac{1}{[a_1] + \cfrac{1}{[a_2] + \cfrac{1}{[a_3] + \ldots + \cfrac{1}{[a_n]}}}}$ *est la meilleure approximation rationnelle de* a *par rapport aux fractions rationnelles de dénominateur égal ou plus petit*
- Φ *est l'irrationnel qui se laisse approcher le plus mal par des rationnels*

Φ meilleur irrationnel ?

- $a = [a] + \cfrac{1}{[a_1] + \cfrac{1}{[a_2] + \cfrac{1}{[a_3] + \ldots}}}$
- *chaque* $A_n = [a] + \cfrac{1}{[a_1] + \cfrac{1}{[a_2] + \cfrac{1}{[a_3] + \ldots + \cfrac{1}{[a_n]}}}}$ *est la meilleure approximation rationnelle de* a *par rapport aux fractions rationnelles de dénominateur égal ou plus petit*
- Φ *est l'irrationnel qui se laisse approcher le plus mal par des rationnels*
- on peut aussi exprimer Φ par des racines en abîme $\Phi = \sqrt{1+\Phi} = \sqrt{1+\sqrt{1+\Phi}} = \ldots =$ $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$

Fibonacci et Hilbert

- équation diophantienne : équation à coefficients entiers dont on recherche les solutions en nombres entiers
  exemples : $x^2 + y^2 = z^2 \quad (x = 3, y = 4, z = 5)$
  $n \geq 3, \quad x^n + y^n = z^n \quad \Rightarrow \quad x = y = z = 0$
  (th. de Fermat-Wiles)

Fibonacci et Hilbert

- équation diophantienne : équation à coefficients entiers dont on recherche les solutions en nombres entiers
  exemples : $x^2 + y^2 = z^2 \quad (x = 3, y = 4, z = 5)$
  $n \geq 3, \quad x^n + y^n = z^n \quad \Rightarrow \quad x = y = z = 0$
  (th. de Fermat-Wiles)

- dixième problème de Hilbert (1900) : déterminer un procédé par lequel on peut déterminer en un nombre *fini* d'opérations si une équation diophantienne est résoluble ou non

Fibonacci et Hilbert

- équation diophantienne : équation à coefficients entiers dont on recherche les solutions en nombres entiers
exemples : $x^2 + y^2 = z^2 \quad (x = 3, y = 4, z = 5)$
$n \geq 3, \quad x^n + y^n = z^n \quad \Rightarrow \quad x = y = z = 0$
(th. de Fermat-Wiles)

- dixième problème de Hilbert (1900) : déterminer un procédé par lequel on peut déterminer en un nombre *fini* d'opérations si une équation diophantienne est résoluble ou non

- Matiyasevitch (1970) : utilise la suite de Fibonacci pour montrer qu'un tel procédé n'existe pas

π, Φ et Fibonacci

- $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\Phi}{2}$ ou $\pi = 5\arccos\frac{\Phi}{2}$
  (voir triangle d’or)

π, Φ et Fibonacci

- $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\Phi}{2}$ ou $\pi = 5\arccos\frac{\Phi}{2}$
  (voir triangle d'or)

- $\log$ logarithme népérien
  $ppcm$ plus petit commun multiple

π, Φ et Fibonacci

- $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\Phi}{2}$ ou $\pi = 5\arccos\frac{\Phi}{2}$
(voir triangle d'or)

- $\log$ logarithme népérien
$ppcm$ plus petit commun multiple

- $\pi = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{6\log(F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \cdot F_n)}{\log\, ppcm\, \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}}}$

π, Φ et Fibonacci

- $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\Phi}{2}$ ou $\pi = 5 \arccos \frac{\Phi}{2}$
  (voir triangle d'or)

- $\log$ logarithme népérien
  $ppcm$ plus petit commun multiple

- $\pi = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{6 \log(F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \cdot F_n)}{\log ppcm \, \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}}}$

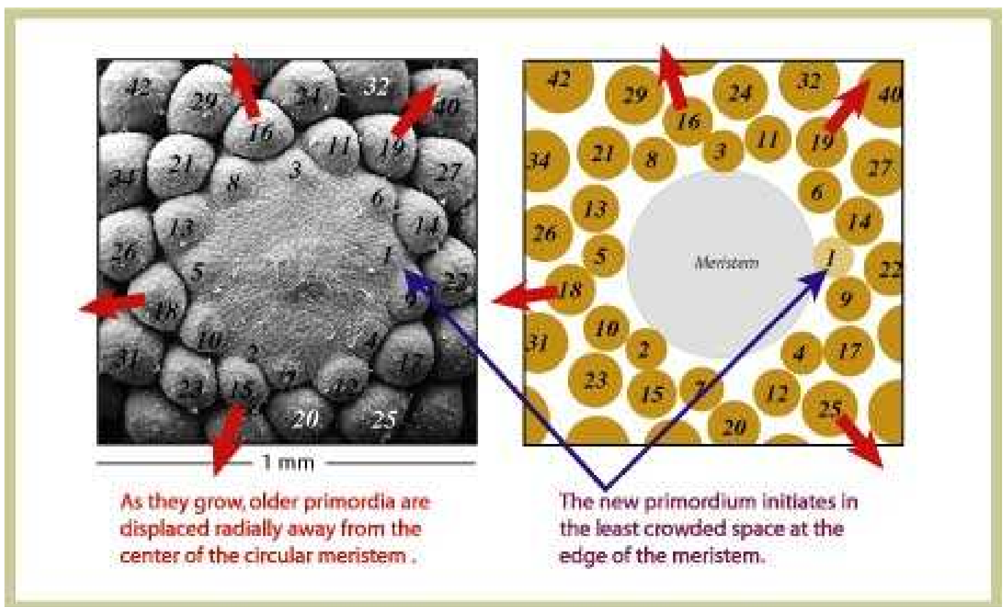
- formule due à Matiyasevitch (1983)

Lois de Hofmeister (1868)

- précisées par Douady et Couder (1991)
- dans un bourgeon, les unités botaniques (primordias) se forment une par une dans l'endroit le moins peuplé autour d'un méristème circulaire
- les primordias s'éloignent radialement du centre lorsqu'ils croissent

Lois de Hofmeister (1868)

- précisées par Douady et Couder (1991)
- dans un bourgeon, les unités botaniques (primordias) se forment une par une dans l'endroit le moins peuplé autour d'un méristème circulaire
- les primordias s'éloignent radialement du centre lorsqu'ils croissent



Appareil de Douady-Couder

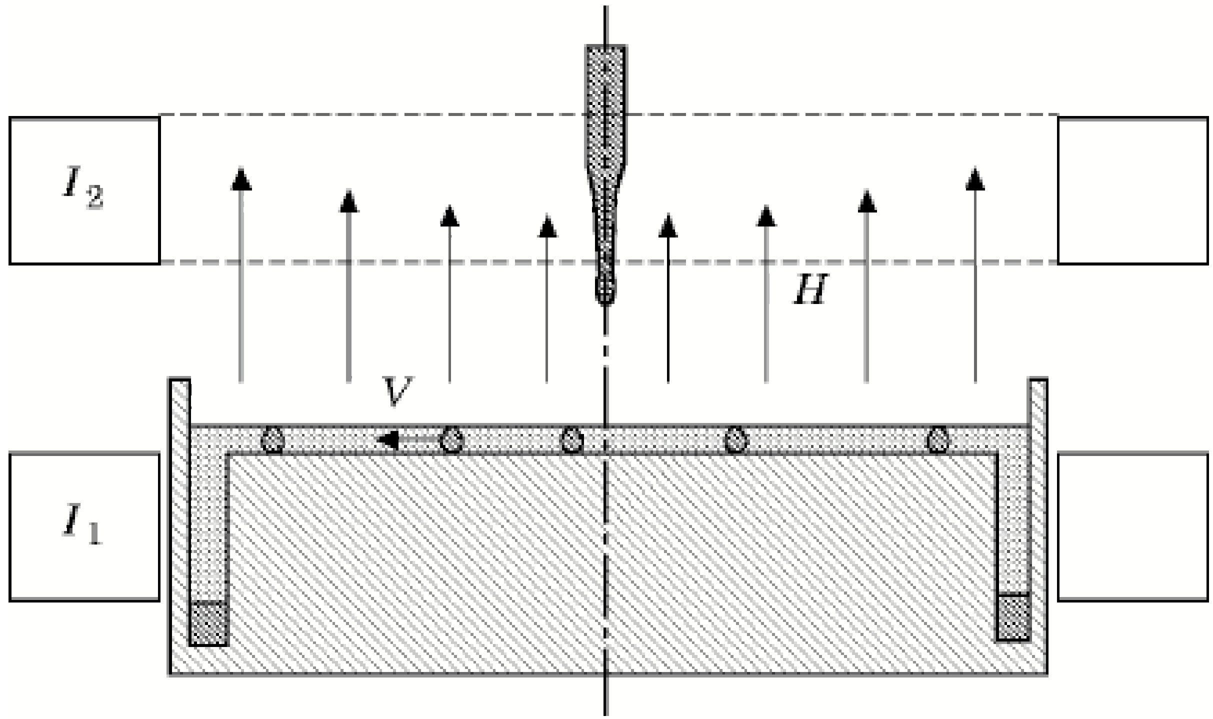
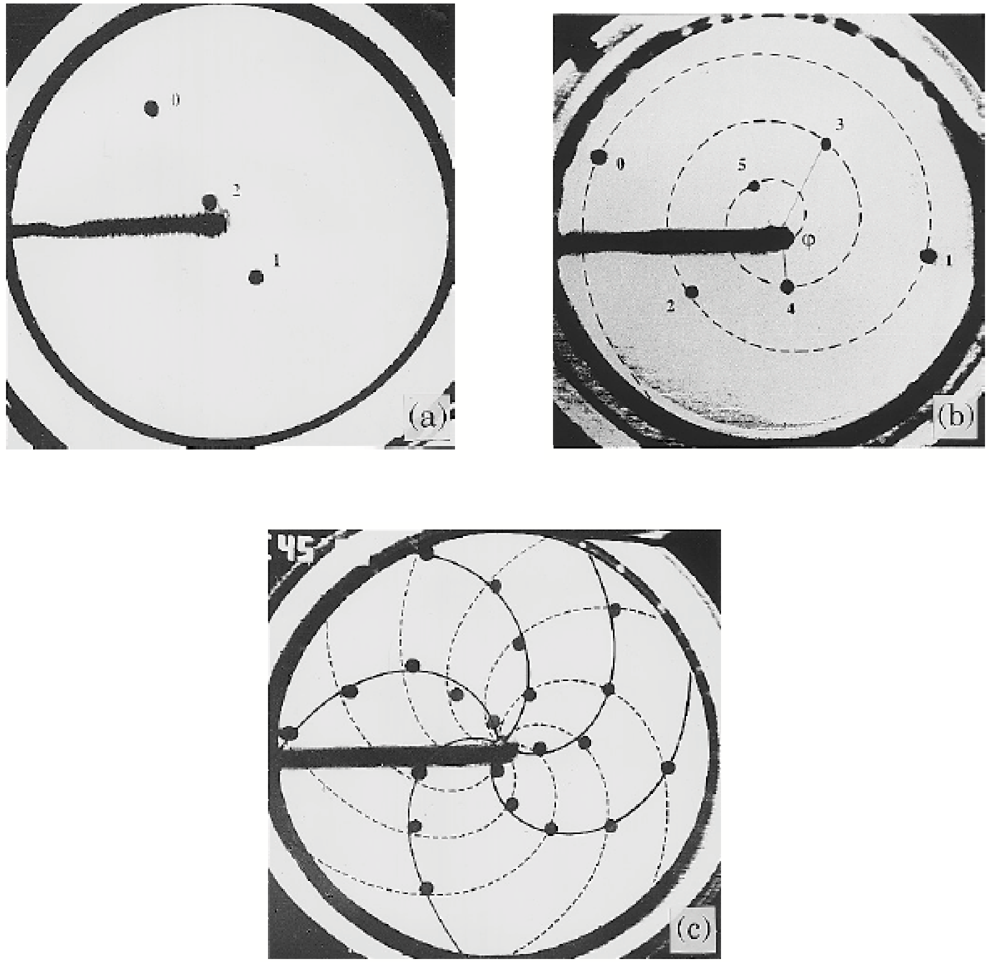


FIG. 2. Sketch of the experimental apparatus. Drops of ferrofluid are used to simulate the primordia. The drops (of volume $v \approx 10\ \mathrm{mm}^3$) fall with a tunable periodicity T at the centre of a horizontal teflon dish. The vertical magnetic field H is created by two coils in the Helmholtz position. The dipoles are radially advected with velocity V by the magnetic field gradient (controlled by the currents I_1 and I_2 in the two coils). The drops ultimately fall into a deep ditch at the periphery, designed to prevent accumulation.

Phyllotaxis magnétique



Position des gouttes ferromagnétiques, en fonction des paramètres du dispositif

Conclusions

- le nombre d'or joue un rôle important dans des parties très diverses des mathématiques (géométrie, théorie des nombres, logique, algèbre, analyse, fractals, systèmes dynamiques, équations aux dérivées partielles...)

Conclusions

- le nombre d'or joue un rôle important dans des parties très diverses des mathématiques (géométrie, théorie des nombres, logique, algèbre, analyse, fractals, systèmes dynamiques, équations aux dérivées partielles...)
- le nombre d'or joue, dans la modélisation des phénomènes d'évolution en temps discret le rôle du nombre e dans le cas du temps continu

Conclusions

- le nombre d'or joue un rôle important dans des parties très diverses des mathématiques (géométrie, théorie des nombres, logique, algèbre, analyse, fractals, systèmes dynamiques, équations aux dérivées partielles...)
- le nombre d'or joue, dans la modélisation des phénomènes d'évolution en temps discret le rôle du nombre e dans le cas du temps continu
- les élucubrations numérologiques, philosophiques, esthétiques ou occultes fondées sur le nombre d'or sont à consommer *cum grano salis*

Conclusions

- le nombre d'or joue un rôle important dans des parties très diverses des mathématiques (géométrie, théorie des nombres, logique, algèbre, analyse, fractals, systèmes dynamiques, équations aux dérivées partielles...)
- le nombre d'or joue, dans la modélisation des phénomènes d'évolution en temps discret le rôle du nombre e dans le cas du temps continu
- les élucubrations numérologiques, philosophiques, esthétiques ou occultes fondées sur le nombre d'or sont à consommer *cum grano salis*
- car si "tout ce qui brille n'est pas d'or", "tout ce qui est d'or n'est pas nécessairement brillant"

Conclusions

- le nombre d'or joue un rôle important dans des parties très diverses des mathématiques (géométrie, théorie des nombres, logique, algèbre, analyse, fractals, systèmes dynamiques, équations aux dérivées partielles...)
- le nombre d'or joue, dans la modélisation des phénomènes d'évolution en temps discret le rôle du nombre e dans le cas du temps continu
- les élucubrations numérologiques, philosophiques, esthétiques ou occultes fondées sur le nombre d'or sont à consommer *cum grano salis*
- car si "tout ce qui brille n'est pas d'or", "tout ce qui est d'or n'est pas nécessairement brillant"
- pensez par exemple à certains "placements en or"...

Quelques références en or

- M. CLEYET-MICHAUD, *Le nombre d'or*, Que sais-je ?, PUF, 1978
- S. DOUADY, Y. COUDER, *Physical Review Letters* 68 (1992), 2098-2101
- M. LIVIO, *The Golden Ratio*, Broadway Books, 2003
- G. MARKOWSKY, *College Mathematical Journal* 23 (1992), 2-19
- J. MAWHIN, *Revue des Questions Scientifiques* 169 (1998), 145-178
- M. NEVEU, H.E. HUNTLEY, *Le nombre d'or*, Points Sciences, Seuil, 1995
- H. WALSER, *The Golden Section*, Math. Association of America, 2001