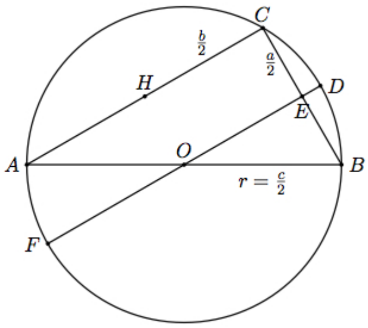
Une démonstration du Théorème de Pythagore

Alexandre Wajnberg,
UREM -ULB
alexandre.wajnberg(AT)skynet.be



7 juin 2009

Math-UREM

Unité de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Prof. Fr. Buekenhout - Prof. J. Sengier - Prof. R. Hinnion – C. Bouckaert
fbueken@ulb.ac.be – sengier@ulb.ac.be – rhinnion@ulb.ac.be
http://www.ulb.ac.be/sciences/urem/

Campus Plaine, CP – 213
Bd du Triomphe — 1050 Bruxelles
Tél. Secr. (32) (2) 650 58 64
Fax (32) (2) 650 58 67

Résumé

Nous présentons une démonstration du théorème de Pythagore particulièrement simple, basée sur le théorème des cordes sécantes.

Table des matières

1 Introduction

Le théorème de Pythagore (Weisstein, réf. [7]) est sans doute le plus célèbre théorème de la géométrie. Euclide, dans les Éléments (Livre I, Proposition 47), (Vitrac, réf. [5]), l'énonce comme suit :

Proposition 47 : *Dans les triangles rectangles, le carré (décrit) sur le côté sous-tendant l'angle droit est égal aux carrés (décrits) sur les côtés contenant l'angle droit.*
En langage plus moderne, *le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.*

Le nombre de démonstrations de ce théorème est impressionnant, de l'ordre de 500.
- Il y a bien sûr celle d'Euclide (I.47), (Vitrac, réf. [5]).
- Le plus important recueil, *The Pythagorean Proposition*, d'Elisha Scott Loomis, réf. [2], compte 371 preuves, dont les plus connues.
- On trouve également une très belle collection de 81 démonstrations en ligne sur le site de géométrie Cut-The-Knot, d'Alexander Bogomolny, réf. [1], qui publie également des preuves ne figurant pas dans Loomis, réf. [2], et rend compte des recherches qui se poursuivent toujours dans ce domaine très ancien des mathématiques.
- Enfin, le livre *The Pythagorean Theorem – a 4000-Year History,* d'Eli Maor, réf. [3], est une présentation et une « revue » vulgarisée des mathématiques reliées à ce célébrissime théorème.

Les démonstrations peuvent être groupées en familles selon les raisonnements suivis. Citons les démonstrations par dissections ou découpages, par cisaillements, par similitudes, les démonstrations numériques, trigonométriques, vectorielles et enfin algébriques, dont celles par le théorème des cordes sécantes, auxquelles se rattache la présente preuve.

2 Le théorème des cordes sécantes

On trouve un premier énoncé du théorème des cordes sécantes (TCS), avec sa démonstration, dans les Éléments d'Euclide (III.35), (Vitrac, réf. [5]) :

Proposition 35 : *Si dans un cercle deux droites se coupent l'une l'autre, le rectangle contenu par les segments de l'une est égal au rectangle contenu par les segments de l'autre.*
Maor, réf. [3], l'énonce comme suit (nous traduisons) :

Si par un point P situé à l'intérieur d'un cercle on fait passer une corde AB, le produit $PA \times PB$ est constant – il a la même valeur quelles que soient les cordes passant par P. [1]

1. Le TCS s'exprime de façon équivalente par la *puissance* du point P par rapport au cercle considéré (Weisstein, réf. [6]), concept introduit au XIX^{e} siècle par Jacob Steiner, réf. [4].

La démonstration par Euclide du TCS (III.35) est assez longue et repose notamment ... sur le théorème de Pythagore. C'est évidemment une difficulté pour notre propos ! Heureusement, nous pouvons sortir de ce raisonnement circulaire en démontrant le TCS autrement (cf. Fig. 1).

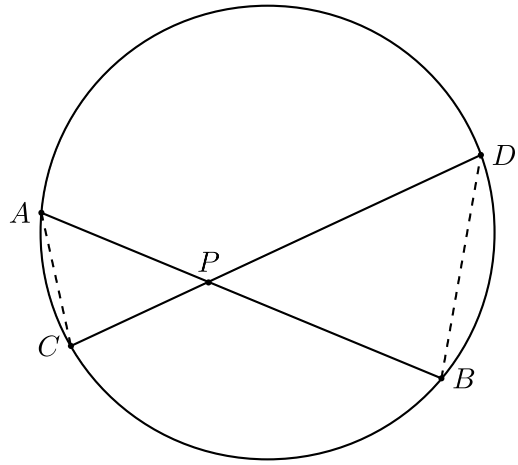


FIGURE 1 – Théorème des cordes sécantes : $PA \times PB = PC \times PD$

Démonstration (de l'énoncé selon Maor).
Les triangles APC et DPB formés par les deux cordes quelconques AB et CD se coupant en P sont semblables. En effet, leurs angles sont égaux deux à deux :

1. ils présentent, en P, deux angles opposés par le sommet (I.15) ;
2. les deux autres paires d'angles (C et B d'une part, et A et D d'autre part) interceptent un même arc (III.21).

Comme deux triangles semblables ont leurs côtés homologues proportionnels (VI.4) :

$$PA/PD = PC/PB = CA/BD,$$

on en déduit immédiatement la relation liant les côtés des triangles, ici : $PA \times PB = PC \times PD$, ce qui établit le TCS.

□

Il nous reste à écarter toute nouvelle circularité du raisonnement en vérifiant qu'aucun des théorèmes utilisés dans cette démonstration du TCS ne repose, directement ou indirectement, sur le théorème de Pythagore.

3 Les ascendances des théorèmes invoqués

1. **L'égalité d'angles opposés par le sommet.**
   C'est la proposition (I.15), antérieure, dans les *Éléments*, au théorème de Pythagore (I.47). Elle ne peut donc s'y appuyer.
2. **L'égalité d'angles inscrits interceptant le même arc du même cercle.**
   C'est la proposition (III.21) des *Éléments*. Elle repose sur (III.20), qui repose sur(I.5) et (I.32), également antérieures au théorème de Pythagore (I.47).
3. **La proportionnalité des côtés homologues de deux triangles semblables.**
   C'est la proposition (VI.4), basée sur (I.17), (I.28), (I.34), (VI.2), (V.16) et (V.22).

Écartons d'emblée les propositions (I.17), (I.28) et (I.34), antérieures au théorème de Pythagore, et examinons les ascendances de (VI.2), (V.16) et (V.22).

(VI.2) : repose sur (V.7), (VI.1), (V.11), (V.9).
- (V.7) repose sur une définition.
- (VI.1) repose sur (I.41), (V.15) et (V.11).
  - (I.41) est antérieur au théorème de Pythagore.
  - (V.15) repose sur (V.7) lequel repose sur une définition et sur (V.12), qui repose sur (V.1) lequel repose sur une définition.
  - (V.11) ne repose sur aucune proposition antérieure.
- (V.11) [cf. ci-dessus].
- (V.9) repose sur (V.8) ; et (V.8) sur (V.1), qui ne repose sur aucune proposition antérieure.

(V.16) : repose sur (V.15) et (V.14).
- (V.15) [cf. ci-dessus].
- (V.14) repose sur (V.8), (V.13) et (V.10).
  - (V.8) sur (V.1), donc sur une définition, et des définitions.
  - (V.13) repose sur une définition.
  - (V.10) sur (V.7) et (V.8) qui ne reposent pas sur le théorème de Pythagore [voir plus haut].

(V.22) : repose sur (V.4) et (V.20).
- (V.4) repose sur une définition et sur (V.3) ; (V.3) sur (V.2) ; et (V.2) ne repose pas sur une proposition antérieure.
- (V.20) sur (V.8), (V.13) et (V.10), [voir ci-dessus].

Donc notre démonstration du théorème des cordes sécantes ne se base pas sur le théorème de Pythagore et nous pouvons utiliser le TCS pour démontrer ce dernier.

4 Démonstration par TCS du théorème de Pythagore

Remarquons d'emblée qu'il existe plusieurs démonstrations du théorème de Pythagore basées sur le TCS. Le site Cut-The-Knot, réf.[1], en donne sept ; ce sont les preuves #11, # 22, #43, #59, #60, #61 et #71. Elles comportent des cercles construits soit sur l'un des côtés de l'angle droit, soit sur la hauteur issue de l'angle droit, soit encore ayant une autre relation avec le triangle ABC.

La démonstration présentée ici [2] « *appears to fill an omission in this serie of proofs. The construction also looks simpler and more natural than any listed by Loomis. What a surprise !* » (A. Bogomolny, réf.[1]). Elle ne nécessite en effet pas d'autre cercle que le cercle circonscrit et une médiatrice d'un des côtés de l'angle droit.

Démonstration

Soit un triangle rectangle ABC et son cercle circonscrit (Fig. 2). E et H sont les milieux des côtés de l'angle droit. DF est la médiatrice du côté CB.

Comme le côté CB est une corde du cercle circonscrit au triangle ABC, sa médiatrice DF est également un diamètre de ce cercle.

En appliquant le TCS à ces deux cordes sécantes CB et DF, on a :

$$CE \times EB = DE \times EF$$

Mais

$$DE = (OD - OE)$$

et

$$EF = (OF + OE)$$

Donc

$$CE \times EB = (OD - OE)(OF + OE) \tag{1}$$

Nous pouvons exprimer ceci en termes des longueurs des côtés du triangle puisque

2. Mise en ligne sur `http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml` le 3 septembre 2008 (Proof #79).

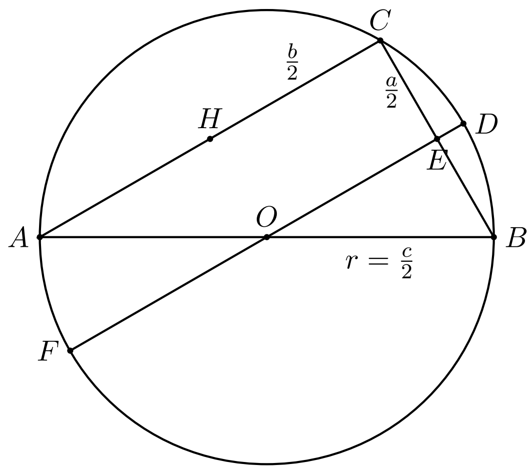


FIGURE 2 – Théorème de Pythagore par le TCS : $CE \times EB = DE \times EF$

- $CE = EB = a/2$.
- $OD = OF = r = c/2$.
- Enfin, le côté AC et le diamètre DF étant tous deux, par construction, perpendiculaires au côté CB, ils sont parallèles et l'on peut appliquer le théorème de Thalès, avec EO passant par le milieu de CB, ce qui donne : $EO = AC/2 = b/2$.

Donc, en remplaçant dans (1), on a

$$(a/2)^2 = (c/2 - b/2)(c/2 + b/2) = (c/2)^2 - (b/2)^2 \text{ qui se simplifie en } a^2 = c^2 - b^2.$$

□

Remerciements

- à Francis Buekenhout (UREM, ULB), pour son intérêt et sa lecture critique précieuse ;
- à Charlotte Bouckaert (UREM, ULB) pour la conversion en LaTeX.

Références

[1] Alexander BOGOMOLNY : Cut-the-knot. `http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml`.

[2] Elisha Scott LOOMIS : *The Pythagorean Proposition : Its Demonstrations Analyzed and Classified and Bibliography of Sources for Data of Four Kinds of "Proofs"*. National Council of Teachers of Mathematics, 2nd édition, 1968.

[3] Eli MAOR : *The Pythagorean Theorem – a 4000-Year History*. Princeton University Press, 2007.

[4] Jacob STEINER : Einige geometrische Betrachtungen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1:161 – 184, 1826.

[5] Bernard VITRAC : *Les Éléments*, volume 1 : Introduction, Livres 1 – 4. Presses Universitaires de France, 1990.

[6] Eric W. WEISSTEIN : Circle Power. MathWorld – A Wolfram Web Resource `http://mathworld.wolfram.com/CirclePower.html`.

[7] Eric W. WEISSTEIN : Pythagorean Theorem. MathWorld – A Wolfram Web Resource, `http://mathworld.wolfram.com/PythagoreanTheorem.html`.

Toute référence à cet article peut se faire comme suit :
Alexandre WAJNBERG : Une démonstration du théorème de Pythagore. *Math-UREM*, ULB, `http://dev.ulb.ac.be/urem/`, 2009.