Language: **French**

Day: **1**

*Mercredi 15 juillet 2009*

**Problème 1.** Soit $n$ un entier strictement positif et soit $a_1, \dots, a_k$, avec $k \geqslant 2$, des entiers strictement positifs distincts appartenant à l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ tels que $n$ divise $a_i(a_{i+1} - 1)$ pour $i = 1, \dots, k-1$.

Montrer que $n$ ne divise pas $a_k(a_1 - 1)$.

**Problème 2.** Soit $ABC$ un triangle et $O$ le centre de son cercle circonscrit. Les points $P$ et $Q$ sont des points intérieurs aux côtés $CA$ et $AB$ respectivement. Soit $K$, $L$ et $M$ les milieux respectifs des segments $BP$, $CQ$ et $PQ$, et soit $\Gamma$ le cercle passant par $K$, $L$ et $M$. On suppose que la droite $(PQ)$ est tangente au cercle $\Gamma$.

Montrer que $OP = OQ$.

**Problème 3.** Soit $s_1, s_2, s_3, \dots$ une suite strictement croissante d'entiers strictement positifs telle que les sous-suites

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \qquad \text{et} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

soient deux progressions arithmétiques.

Montrer que la suite $s_1, s_2, s_3, \dots$ est aussi une progression arithmétique.

*Jeudi 16 juillet 2009*

**Problème 4.** Soit $ABC$ un triangle tel que $AB = AC$. Les bissectrices de $\widehat{CAB}$ et $\widehat{ABC}$ rencontrent respectivement les côtés $BC$ et $CA$ en $D$ et $E$. Soit $K$ le centre du cercle inscrit dans le triangle $ADC$. On suppose que $\widehat{BEK} = 45°$.

Trouver toutes les valeurs possibles de $\widehat{CAB}$.

**Problème 5.** Déterminer toutes les fonctions $f$ de l'ensemble des entiers strictement positifs dans l'ensemble des entiers strictement positifs telles que, pour tous entiers strictement positifs $a$ et $b$, il existe un triangle non aplati dont les longueurs des côtés sont

$$a, \ f(b) \ \text{ et } \ f(b + f(a) - 1).$$

**Problème 6.** Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des entiers strictement positifs distincts et soit $M$ un ensemble de $n-1$ entiers strictement positifs ne contenant pas $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Une sauterelle doit faire des sauts le long de l'axe réel ; partant du point 0, elle doit effectuer $n$ sauts vers la droite de longueurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dans l'ordre de son choix.

Montrer que la sauterelle peut choisir l'ordre de ses sauts de façon à ne passer par aucun point de $M$.



*Durée : 4 heures 30 minutes*
*Chaque problème vaut 7 points*