Dominons les dominos

Quels assemblages obtient-on avec des dominos ? Au détour de ces questions posées par les amateurs de divertissements géométriques et qui intéressent aujourd'hui les professionnels, on rencontre les nombres de Fibonacci, d'étonnants résultats et des questions non résolues.

Tout juste un peu plus compliqué que le carré, l'anodin double carré, ou domino, est une source inattendue de questions géométriques et combinatoires qui plaisent à tous, car les astuces utilisées dans les démonstrations sont remarquables d'ingéniosité. Ainsi lorsque l'on a devant soi un polygone orthogonal (polygone obtenu en accolant par les côtés des carrés égaux) et une pile de dominos, la question que l'on se pose est celle du pavage : le polygone orthogonal peut-il être pavé par des dominos sans recouvrement, ni espace vide ? Nous emploierons l'adjectif *dominable* pour qualifier ces figures « pavables » avec des dominos.

Bien sûr, pour qu'un polygone orthogonal soit dominable, il faut que le nombre de carrés qui le composent soit un nombre pair, car chaque domino recouvre deux carrés d'un coup. Cette condition est-elle suffisante ? Non. Un exemple du contraire est la figure en forme de T (une barre horizontale et une barre verticale de même nombre de carrés). Un T composé de 6 carrés *(voir la lettrine du début du texte)*, trois pour la barre horizontale, trois pour le pied, n'est pas dominable.

Déterminer quels sont les rectangles dominables est facile. Un rectangle $n \times m$ est dominable si et seulement si n ou m est pair : si n est pair, on pave chacune des m lignes de longueur n qui compose le rectangle en plaçant $n/2$ dominos ; si m est pair, on procède de la même façon en décomposant la figure en lignes de longueur m ; si n et m sont tous les deux impairs, leur produit l'est aussi et le pavage d'un nombre impair de cases avec des dominos est impossible.

L'aide du coloriage en damier

Des raisonnements très astucieux, fondés sur le coloriage en damier, permettent de déterminer la « dominabilité » pour les figures obtenues en enlevant deux carrés à un rectangle $n \times m$ *(voir la figure 2a où l'on raisonne sur un carré $n \times n$, mais la méthode est générale)*. Nous allons examiner trois autres résultats généraux obtenus avec cette technique du coloriage en damier que le physicien Georges Gamov présentait comme un « miracle d'ingéniosité mathématique ».

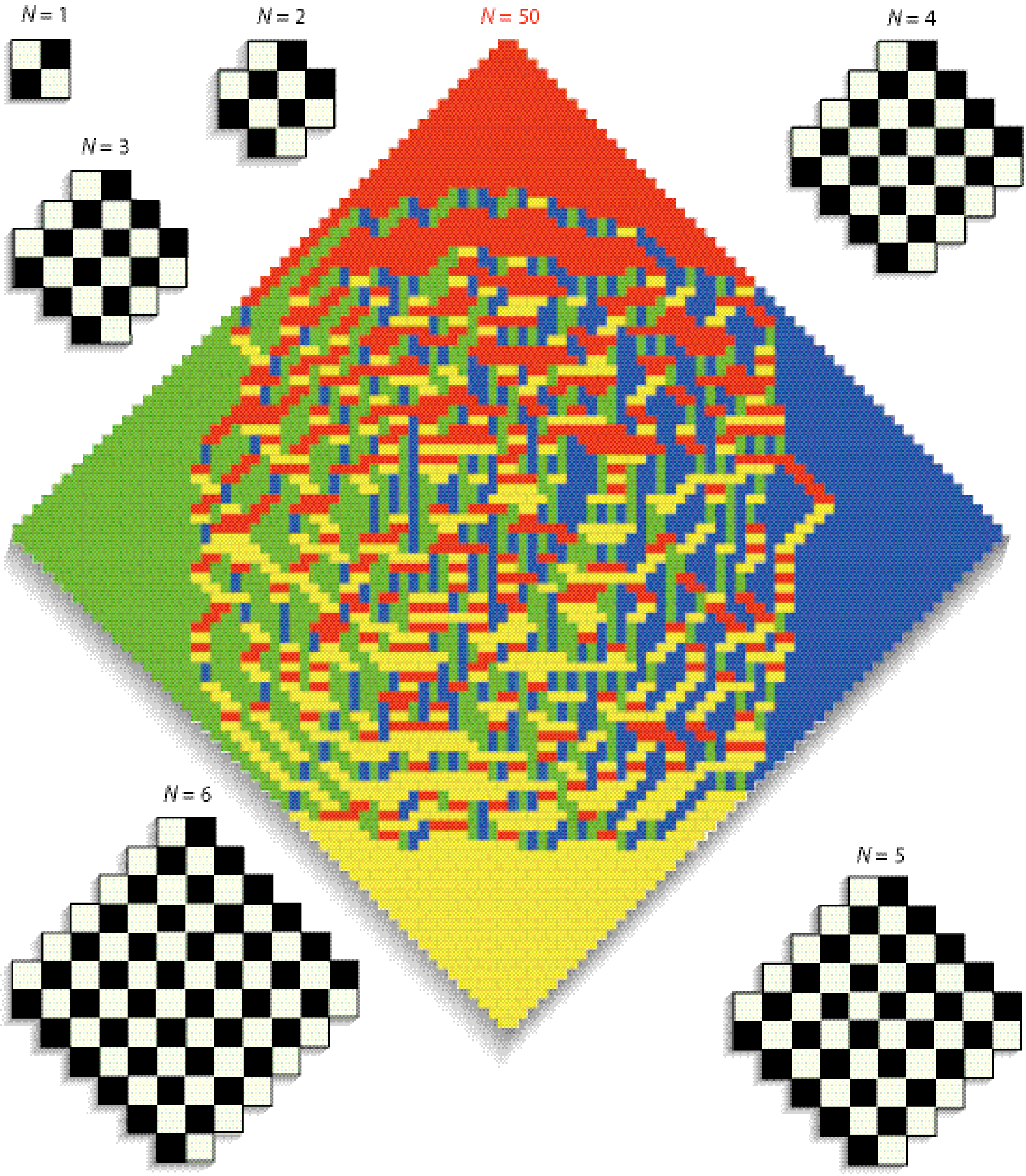
Le premier est le théorème des côtés pairs. Il affirme que si un polygone orthogonal n'a que des côtés de longueur paire, alors il est dominable. La démonstration est facile si on ajoute l'hypothèse que la figure est sans trou, elle l'est un peu moins si on considère des figures avec trous *(voir la figure 3)*. Le second résultat dû à Philip Hall a été découvert en 1935. Il indique que si un polygone orthogonal n'est pas dominable, alors un raisonnement simple par damier le prouvera. La figure 5 donne les explications concernant ce beau résultat.

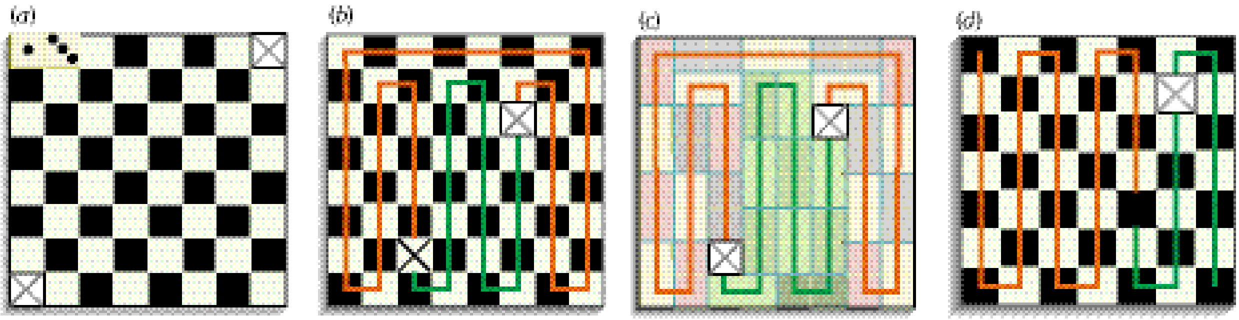
En 1999, György Csizmadia, Jurek Czyzowicz, Lezek Gasieniec, Evangeos Kranakis et Jorge Urrutia ont proposé un troisième résultat général : le théorème des côtés impairs *(voir la figure 6)*. À l'inverse du théorème des côtés pairs, il donne un critère permettant de savoir qu'un polygone orthogonal n'est pas dominable : si un polygone orthogonal sans trou n'a que des côtés de longueur impaire, alors il n'est pas dominable. N'est-il pas étonnant qu'il ait fallu attendre la fin du XX^{e} siècle pour découvrir un théorème aussi simple ?

Ainsi, le T composé de 3 carrés pour la barre horizontale et ayant un pied de longueur 3 n'a que des côtés de longueur impaire : 1 ou 3. D'après le nouveau critère et sans aucun raisonnement supplémentaire, nous savons qu'il n'est pas dominable. De même, un double escalier composé de lignes de 1, 3, 5, 7 carrés n'est pas dominable, car ses côtés ont pour longueur 1 ou 7. Le résultat est vrai plus généralement pour les doubles escaliers 1, 3, 5, ..., $2n+1$. La démonstration, assez longue et délicate, de ce nouveau résultat se fonde sur la technique du damier et consiste à montrer que, dans le cas indiqué, le nombre de cases blanches n'est pas égal au nombre de cases noires, ce qui bien sûr entraîne l'impossibilité d'un pavage par des dominos.

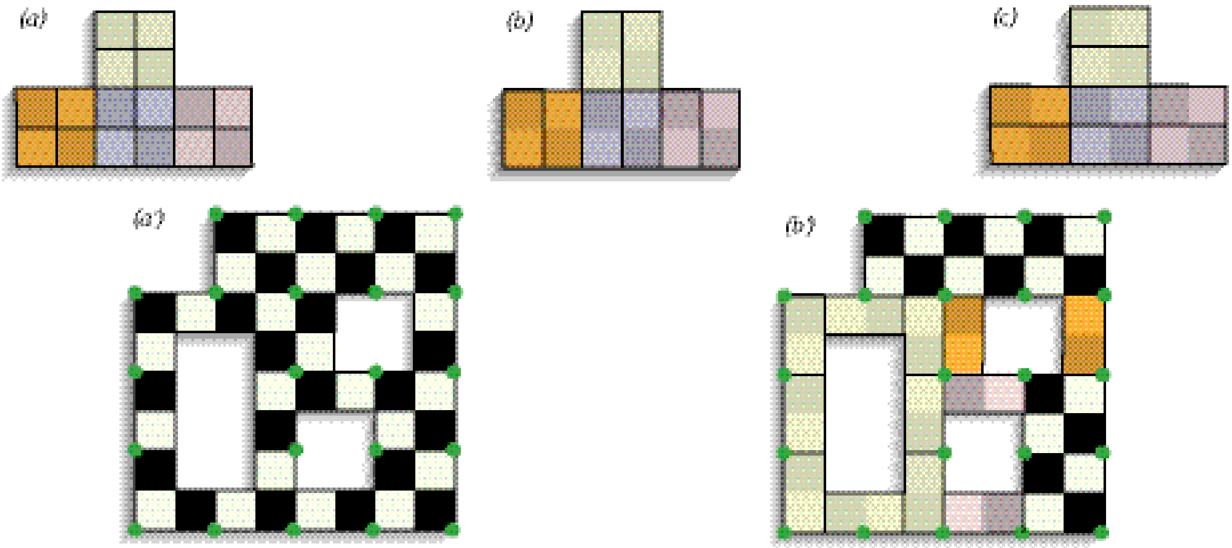
Si une figure possède un ou plusieurs trous, le théorème des côtés impairs n'est plus vrai comme le montre l'anneau carré le plus simple *(voir la figure 6)*. Lorsqu'un polygone orthogonal possède à la fois des côtés de longueur paire et des côtés de longueur impaire, on ne peut rien dire : parfois il est dominable, parfois non !

1. Le diamant aztèque d'ordre n est l'empilement de lignes centrées de carrés de longueur 2, 4, 6, ... , $2N-2$, $2N$, $2N$, $2N-2$,..., 6, 4, 2. La figure centrale dominable est étrange : presque tous les pavages par dominos d'un grand diamant aztèque possèdent une zone centrale circulaire désordonnée à l'intérieur d'un cercle « polaire », alors qu'à l'extérieur de cette zone tout est gelé en réseaux de dominos parallèles (voir le site http://www.math.wisc.edu/~propp/tiling/).


N = 1
N = 2
N = 50
N = 4
N = 3
N = 6
N = 5



2. Les miraculeux raisonnements par damier. *(a)* Si on enlève deux coins opposés à un carré $(2n) \times (2n)$ dominable, la figure obtenue n'est plus « dominable » (plus recouvrable exactement par des dominos). Pour le montrer, colorions les cases comme celles d'un damier. Tout domino, constitué de deux cases, posé sur le damier, couvre toujours une case blanche et une case noire. Une figure dominable a donc autant de cases noires que de blanches et la figure obtenue quand on enlève deux coins opposés d'un carré $(2n) \times (2n)$ possède deux cases blanches de plus que de cases noires (ou l'inverse selon les coins que l'on prend), car les coins enlevés sont de la même couleur : elle n'est donc pas dominable. *(b)* Si on enlève deux carrés de couleurs différentes à un carré colorié en damier, la figure obtenue est toujours dominable. Dessinons un chemin passant par tous les carrés du rectangle. Les deux cases enlevées (marquées d'une croix) coupent ce chemin en deux parties ayant chacune une longueur paire (car les cases enlevées sont de couleurs différentes et que les cases du chemin alternent blanche-noire-blanche-noire-...). Chacun de ces deux morceaux de chemin est dominable, donc la figure trouée *(c)* est dominable. *(d)* Si on enlève un carré de la couleur des coins (tous les quatre de la même couleur) à un rectangle non dominable $(2n + 1) \times (2m + 1)$ colorié en damier, la figure obtenue devient dominable : il suffit de dessiner un chemin en zigzag sur le damier et de raisonner comme précédemment.

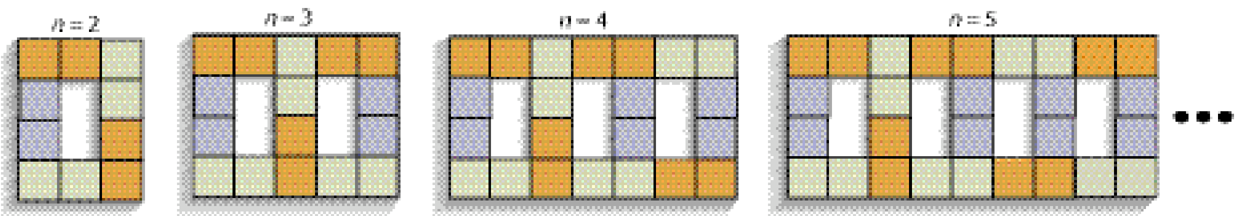


3. Le théorème des côtés pairs indique que si un polygone orthogonal n'a que des côtés de longueur paire, alors il est dominable. Si la figure est sans trou, on peut la diviser en carrés de côté 2, chacun pouvant alors être pavé par 2 dominos *(a)*. Dans ce cas, d'ailleurs, tous les dominos peuvent être placés horizontalement *(b)*, ou tous verticalement *(c)*. Si la figure possède des trous *(a')* cela se complique. La méthode pour paver la figure se décompose en trois étapes.

1- On place la figure sur le plan de façon que les coordonnées des points du pourtour soient toutes paires (points verts) : on obtient un tel positionnement en plaçant l'un des coins extérieurs de la figure au point de coordonnées (0, 0). La difficulté provient de ce que les sommets internes délimitant les trous n'ont pas de raison d'avoir des coordonnées paires, ce qui empêche de raisonner comme dans le cas où il n'y a pas de trou.

2- On pave les bords de chaque trou (soit tous les bords, soit les bords horizontaux, soit les bords verticaux) de façon que la partie restant à paver n'ait plus que des sommets de coordonnées paires *(b')*.

3- Pour la partie restante, on est ramené à une situation équivalente à celle de la configuration sans trou (une figure décomposable en carrés de côté 2), car cette partie est délimitée par des sommets – extérieurs et intérieurs – ayant à chaque fois deux coordonnées paires.



4. Problème inverse. Pour tout entier n, peut-on trouver une figure possédant exactement n pavages différents par dominos ? Les rectangles troués ci-dessus donnent la réponse : le rectangle ayant $n - 1$ trous possède exactement n pavages par dominos.

Pour beaucoup de figures particulières (comme les figures en fo rme de L, d'anneaux, de U, de croix, etc.), on sait déterminer si elles sont dominables ou pas et c'est une source inépuisable d'exercices géométriques simples et amusants. Notons que le problème de savoir si un polygone orthogonal est dominable ou non appartient à la classe des problèmes polynomiaux : il peut être traité en un temps inférieur à $C \times n^{3/2}$ (où C est une constante, et n le nombre de carrés de la figure).

Nombre de pavages possibles

Très naturellement, lorsqu'un polygone est dominable se pose la question du nombre de façons différentes de le paver par des dominos (lors de ces décomptes, si un pavage se déduit d'un autre par une symétrie ou une rotation, on le compte quand même).

Pour les rectangles $1 \times N$ (N évidemment pair), la réponse est patente : il n'y a qu'une façon de paver le rectangle. Pour les rectangles $2 \times N$, la réponse est intéressante puisqu'elle permet de retrouver la plus célèbre des suites de nombres entiers : la suite de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... où chaque terme $f(N)$ est la somme des deux précédents.

Voici le raisonnement par récurrence montrant que le nombre de façons différentes de paver un rectangle de taille $2 \times N$ par des dominos est $f(N+1)$. Pour paver le rectangle 2×1, il n'y a évidemment qu'une façon, $1 = f(2)$. Pour le rectangle 2×2, il y en a 2, soit $f(3)$: deux dominos hori zontaux ou deux dominos verticaux. Examinons la récurrence : supposons que pour paver par des dominos les rectangles de taille 2×1, 2×2, ..., $2 \times N$, il y a respectivement $f(2)$, ..., $f(N+1)$ façons de le faire et montrons que pour paver le rectangle $2 \times (N+1)$, il y en a $f(N+2)$.

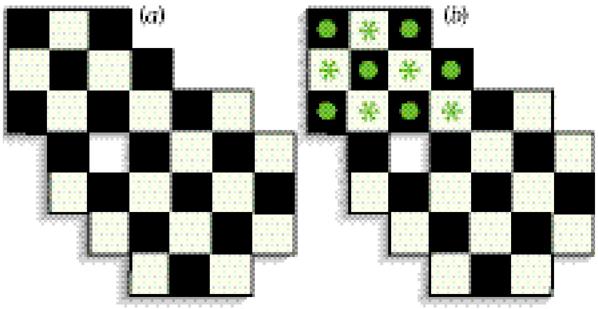
Il y a deux façons de placer les dominos remplissant l'extrémité droite du rectangle.

(a) Soit nous plaçons un domino verticalement, et alors il reste un rectangle de taille $2 \times N$ à couvri r, ce qui par hypothèse peut se faire de $f(N+1)$ façons différentes.

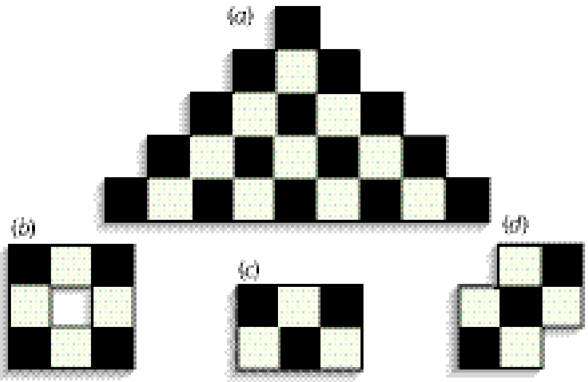
(b) Soit on place un domino horizontalement, mais alors il faut en placer un autre horizontalement sur le premier, et alors il reste un rectangle de taille $2 \times (N-1)$ à recouvri r, ce qui, par hypothèse, peut se faire de $f(N)$ façons différentes. Au total, le nombre de façons différentes de couvrir le rectangle de taille $2 \times (N+1)$ est donc bien $f(N+1) + f(N) = f(N+2)$.

Pour les rectangles de forme $3 \times (2N)$, il existe un résultat analogue. Le nombre de façons différentes de paver le rectangle est donné par la suite : $g(0) = 1$, $g(1) = 3$, $g(2) = 11$, $g(N+1) = 4\,g(N) - g(N-1)$. Les premiers termes de cette suite sont 3, 11, 41, 153, 571, 2131, 7953, 29681, 110771, 413403, 1542841, 5757961, 21489003, 80198051, 299303201... Il s'agit de la suite numérotée A001835 de l'*Encyclopédie des suites d'entier*s du mathématicien Neil Sloane que vous trouverez en : http://www.research.att.com/~njas/sequences/

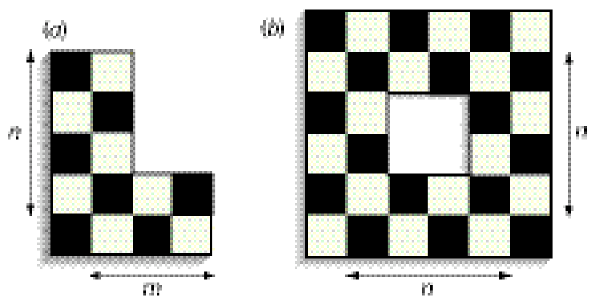
Pour un rectangle quelconque $(2n) \times (2m)$, une formule générale donnant le nombre de façons de le paver par des dominos a été découve rte en 1961 simultanément et indépendamment par trois personnes, M. Fisher, H. Temperley et P. Kasteleyn. Nous l'indiquons car, bien que complexe et difficile à démontrer, elle est étrange et belle. Elle montre que la résolution d'un problème simple oblige parfois à recourir à des outils inattendus,



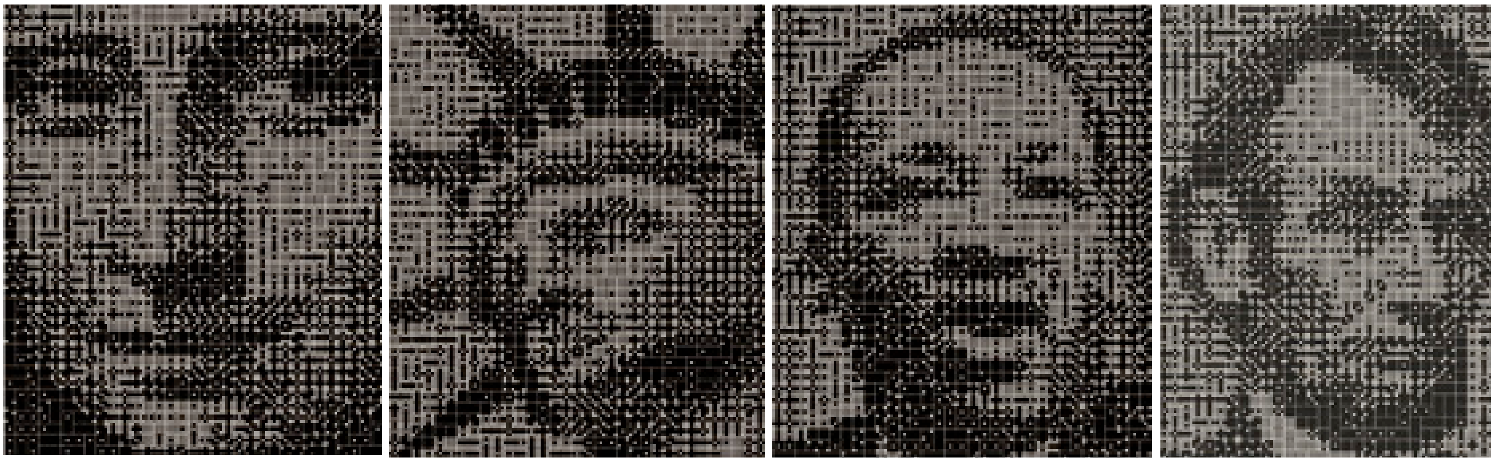
5. Le théorème de Philip Hall. Qua nd une figure coloriée en damier a le même nom bre de cases de chaque couleur, il existe un argument standard qui montre (si c'est le cas) que la figure n'est pas dominable. La figure a trouée comporte 32 carrés, 16 de chaque sorte, mais elle n'est pas dominable. Considérons sur la figure b les cases marqu é es par des ronds. Les cases avec lesquelles elles peuvent s'apparier (quand on y pose un domino) sont marquées par des étoiles. Il y a 6 ronds et seulement 5 étoiles : il sera donc impossible de poser des dominos sur les 6 ronds sans qu'ils se chevauchent : la figure n'est pas dominable. Le théorème de Philip Hall indique que si une figure n'est pas dominable, il est toujours possible de le démontrer avec ce raisonnement.



6. Le théorème des côtés impairs, d é couvert et démontré il y a six ans, indique que si un polygone orthogonal sans trou n'a que des côtés de longueur impaire alors il n'est pas dominable. Le double escalier à 16 carrés *(a)* qui n'a que des côtés de longueur 1 ou 7 n'est donc pas dominable (colorié en damier, il comporte 15 cases noires et 10 cases blanches). Si la figure a des trous, le cr itère n'est plus valable, comme le montre la figure *(b)* que l'on pave facilement avec 4 dominos. Lorsqu'une figure possède à la fois des côtés de longueurs pai res et impaires, rien de général ne peut être affirmé : la figure c est dominable, la figure d ne l'est pas.



7. Roberto Toraso de l'Université *Tor Vergata* de Rome a démontré en 2004 deux intéressants résultats. *(a)* Le nombre de pavages par des dominos d'un L dont l'axe central est composé de deux segments de longueurs n et m est donné par l'expression $f(n+1)\,f(m) + f(n)\,f(m+1)$ où $f(n)$ est la suite de Fibonacci. *(b)* Le nombre de pavages par des dominos d'un anneau carré de largeur 2 et dont le côté de l'axe cent ral a pour long ueur n est donné par l'ex pression $4(f(n+1)f(n-1) + f(n)^2)^2$.

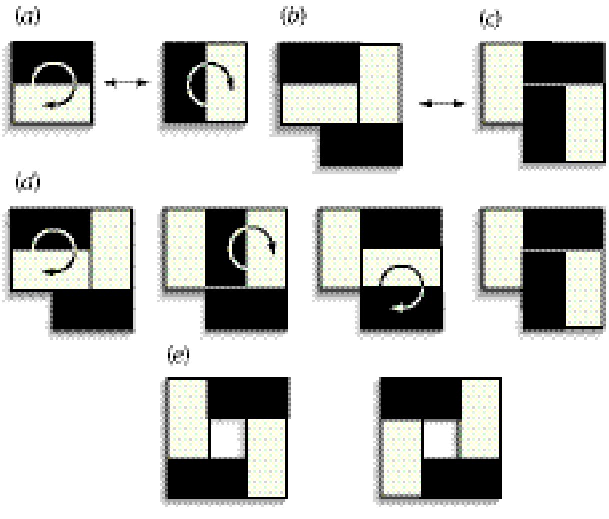


8. Portraits de dominos. Pour les construire, Robert Bosch utilise des jeux complets de dominos (DominoArtwork.com). Ces portraits utilisent 48 jeux complets de dominos jusqu'au double neuf alors que les dominos habituels ne vont que jusqu'au double six. Pour trou-

ici les fonctions trigonométriques (bien sûr on ne sait pas simplifier cette formule). Le nombre de façons différentes de paver un rectangle $(2n) \times (2m)$ par des dominos est exactement :

$$4^{mn}\prod_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{n}\left(\cos^2\frac{j\pi}{2m+1}+\cos^2\frac{k\pi}{2n+1}\right).$$

Par exemple, pour $m = 2$, $n = 3$ la formule donne : 4^6 ($\cos^2 36°$ + $\cos^2 25{,}71...°$) ($\cos^2 36°$ + $\cos^2 51{,}43...°$) ($\cos^2 36°$ + $\cos^2 77{,}14...°$) ($\cos^2 72°$ + $\cos^2 25{,}71...°$) ($\cos^2 72°$ + $\cos^2 51{,}43...°$) ($\cos^2 72°$ + $\cos^2 77{,}14...°$) = 4^6 (1,4662...)(1,0432...)(0,7040...)(0,9072...)(0,4842...)(0,1450...) = 281. On obtient un nombre entier à l'issue du calcul, bien



9. Le théorème de Thurston. En faisant tourner de 90° un couple de dominos formant un carré, on transforme une paire horizontale en paire verticale et réciproquement *(a)*. Considérons deux pavages *(b)* et *(c)* différents par dominos. En répétant l'opération de rotation de couples de dominos accolés *(d)*, on passe du pavage *(b)* au pavage *(c)*. D'après le théorème de Thurston, si le polygone orthogonal dont on part est sans trou, le passage d'un pavage à un autre par de telles rotations de couples de dominos accolés est toujours possible. L'anneau simple *(e)* montre que la condition « sans trou » est essentielle.

que les facteurs soient tous des nombres réels non entiers ! Vous pouvez vérifier, avec un programme d'ordinateur, qu'il y a bien 281 façons de paver un carré 4×6 par des dominos. Avec cette formule, les problèmes de dominos quittent le domaine des récréations mathématiques élémentaires !

Les diamants aztèques

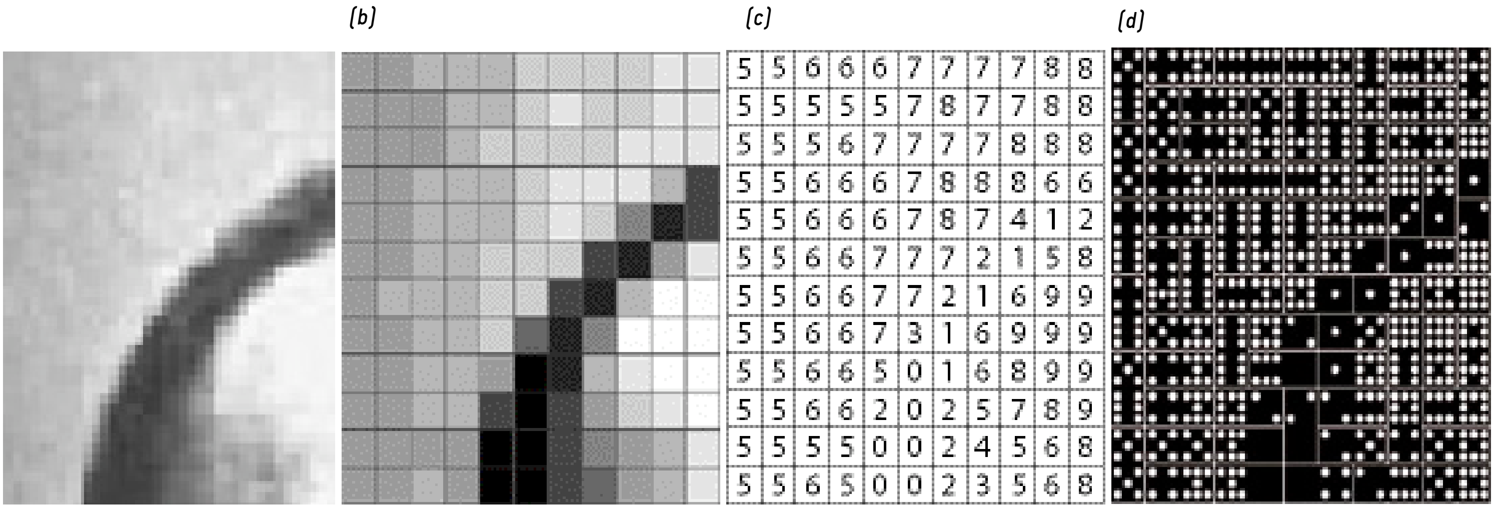
Plus récemment, N. Elkies, G. Kuperberg, M. Larsen et J. Propp ont montré que le nombre de pavages par des dominos du diamant aztèque d'ordre N – la figure symétrique composée de lignes de carrés ayant respectivement pour longueur 2, 4, 6, ..., $2N$, $2N$,..., 6, 4, 2 *(voir la figure 1)* – est $2^{N(N+1)/2}$, ce qui est tout de même plus sympathique que la formule pour le rectangle ! On connaît aujourd'hui 12 démonstrations de ce résultat. Malheureusement, aucune n'est simple.

Le degré de liberté pour paver une figure est le nombre de façons de paver la figure par dominos. Le *degré de liberté par carré* est la racine n-ième de ce degré, où n est le nombre de carrés de la figure. Plus ce nombre est petit plus il est difficile de paver la figure.

Un diamant aztèque d'ordre N possède $2N(N+1)$ carrés et donc le degré de liberté par carré de cette figure est exactement : $(2^{N(N+1)/2})^{1/2N(N+1)} = 2^{1/4} = 1{,}189207115...$

Pour un carré $N \times N$, on évalue le degré de liberté par carré à partir de la formule avec des cosinus. On trouve que ce nombre est 1,338515152... ce qui est sensiblement plus que pour le diamant aztèque. Cela n'est pas surprenant puisqu'on sent bien, en tentant de remplir un diamant aztèque par des dominos, que les côtés en escalier créent de nombreuses contraintes qui limitent les choix possibles, alors qu'on a beaucoup plus de liberté quand on remplit un carré $N \times N$.

D'autres propriétés fascinantes du diamant aztèque sont aujourd'hui étudiées par J. Propp et un groupe de chercheurs autour de lui. En particulier, ils ont démontré que lorsqu'on prend au hasard un pavage par dominos du diamant aztèque, il existe une zone circulaire centrale à l'intérieur d'un cercle dénommé *cercle polaire*, où les dominos sont placés de façon assez désordonnée dans les deux sens, alors que les parties autour sont très bien rangées (dominos bien paral-



ver les emplacements optimaux des dominos, R. Bosch divise l'image *(a)* en carrés *(b)* et mesure de 0 à 9 les intensités de gris *(c)* de chaque carré. Puis son programme calcule quel arrangement de dominos (pris au complet) réalise au mieux ces intensités *(d)*.

lèles). L'existence de ce cercle inattendu reste mystérieuse *(voir la figure 1)*. Indiquons, d'autre part, pour les pavages par dominos, deux résultats plus faciles démontrés par Roberto Toraso et décrits sur la figure 7.

Un étrange, délicat et merveilleux théorème a été formulé et démontré par William Thurston de l'Université de Princeton. Que ce lauréat de la médaille Fields 1982 (l'équivalent pour les mathématiques du prix Nobel) ait trouvé bon de s'occuper de dominos montre que tous les sujets mathématiques, y compris ceux qu'on classe parfois avec condescendance dans la catégorie des récréations mathématiques, sont susceptibles d'intéresser les meilleurs mathématiciens qui y découvrent parfois de véritables petits bijoux *(voir la figure 9)*.

Le décompte des pavages par dominos suggère une question simple : est-ce que pour tout entier N, il existe une figure dominable possédant exactement N pavages différents par dominos ? La réponse, positive, a été donnée par plusieurs amateurs dont B. Harris, Brendam Owen, Alexandre Muniz, Trevor Green et Timothy Luffingham qui ont proposé des constructions générales *(voir la figure 4)*. Une autre question est moins bien résolue : pour un N donné, quel est le nombre minimal $D(N)$ de carrés que doit posséder une figure pour qu'elle admette exactement N pavages différents par des dominos ?

Pour $N = 7$, par exemple, on connaît une figure à 10 carrés possédant 7 pavages différents par dominos et on n'en connaît aucune ayant moins de 10 carrés. On pense donc que $D(7) = 10$. Pour $N = 2000$, la question a été étudiée avec un soin particulier par de nombreux amateurs de récréation mathématique, car en l'an 2000 – année mondiale des mathématiques – elle avait été soumise comme défi. De nombreuses solutions à 38 carrés furent proposées, mais finalement le Japonais Yoshiyuki Kotani en trouva une à 34 carrés par une méthode de recherche systématique. Nous ignorons si 34 est le minimum possible, voir : http://www.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/0500.html. Les lecteurs de *Pour la Science* feront-ils progresser notre connaissance de ce problème de minimalité ?

Si vous trouvez ces questions de pavages trop abstraites, un jeu artistique vous réconciliera avec les dominos : le dessin avec des jeux complets de dominos. On se donne plusieurs jeux complets de dominos (avec des points allant de 0 à 6 ou de 0 à 9) ; on se donne aussi une image, par exemple la Joconde, et le but est de placer au mieux tous les dominos dont on dispose pour reproduire l'image choisie.

Les portraits de Robert Bosch

Robert Bosch a ainsi réalisé des dizaines d'images assez étonnantes (voir http://www.dominoartwork.com/). La méthode qu'il utilise est expliquée sur la figure 8. Sauf hasard extraordinaire, un recouvrement exact n'est pas possible, et donc il faut mener une recherche parmi tous les pavages utilisant les jeux complets de dominos pour trouver celui qui s'éloigne le moins de la grille de niveau de gris. Pour ce faire, R. Bosch utilise des algorithmes, nommés algorithmes d'optimisation en nombres entiers, développés depuis longtemps pour traiter des problèmes d'emplois du temps ou de conception de circuits.

Les innocents dominos occupent ainsi les artistes mathématiciens, les amateurs de récréations géométriques et informatiques, et les plus brillants des chercheurs, chacun faisant avancer notre maîtrise et notre compréhension du démoniaque petit rectangle. Notons enfin que les surprises comme celle du « cercle polaire » montrent que les mathématiques sont découvertes et non inventées car, si elles l'étaient, il n'y aurait pas de tels inattendus.

Auteur & Bibliographie

Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Univ. de Lille.

E. FRIEDMAN, *Le problème inverse et quelques autres questions de pavage par dominos*. Math Magic 2005 : www.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/0500.html

J.-P. DELAHAYE, *Les inattendus mathématiques*, Belin/Pour la Science, 2004.

Frederico ARDILA, Richard STANLEY, *Tilings 2004* : http://www.claymath.org/fas/senior_scholars/Stanley/

G. CSIZMADIA et al., *Domino tilings of orthogonal polygons*, in *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 13(4), pp. 443-459, 2004.

R. BOSCH, *Constructing Domino Portraits*, in *Tribute to a Mathemagician* (Ed. B. Cipra, E. Demaine, M. Demaine, T. Rodgers), A.K. Peters, Wellesley, Massachusetts, pages 251-256, 2004.