PROBLEMATHS
18 octobre 2010

Problemath 4

Lors des négociations pour la formation d'un nouveau gouvernement, 30 négociateurs doivent s'asseoir autour d'une table ronde, chacun se trouvant à égale distance de ses deux voisins; 30 cartons portant les noms des négociateurs ont été disposés au préalable sur la table devant chacun des 30 sièges. Le premier jour, la confusion est telle qu'aucun négociateur ne s'assied en face du carton portant son nom. Le formateur prétend alors que , lorsqu'une telle situation se produit, on peut toujours faire tourner la table de façon à ce qu'au moins deux négociateurs se retrouvent assis en face de leur nom. Cette affirmation est-elle correcte?

Problemath 5

Existe-t-il un polynôme $p(x)$ à coefficients entiers et trois entiers a, b, c distincts deux à deux tels que $p(a) = b$, $p(b) = c$ et $p(c) = a$?

Problemath 6

Y a-t-il un trou noir dans $\mathbb{N}$? A partir d'un nombre naturel quelconque n (écrit en système décimal), on construit le nombre $\alpha(n)$ en écrivant à la queue leu leu le nombre de chiffres pairs, le nombre de chiffres impairs et le nombre total de chiffres de n. Ainsi, $n = 80322057626942$ comprend 10 chiffres pairs, 4 chiffres impairs et 14 chiffres en tout, donc $\alpha(n) = 10414$. Si on itère cette construction, on obtient la suite $80322057626942, 10414, 325, 123, 123, 123, \ldots$ Voici un autre exemple : $5771, 044, 303, 123, 123, 123, \ldots$
Tout nombre naturel est-il inexorablement attiré par 123, autrement dit toute suite $n,\ \alpha(n),\ \alpha^2(n),\ \alpha^3(n), \ldots$ est-elle constante (et égale à 123) à partir d'un certain rang?

Les solutions doivent nous parvenir au plus tard le lundi 15 novembre à 14h.

"A student who has merely done mathematical exercises but has never solved a mathematical problem may be likened to a person who has learned the moves of the chess pieces but has never played a game of chess. The real thing in mathematics is to play the game".(Stephen J.Turner)

Solution du Problemath 1.(N.B.: ce problème a été posé lors d'un examen d'admission à l'Université de Cambridge). Posons $x = |br|, y = |rc|$ et $\alpha = \widehat{acb}$ (avec $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$). Comme $x = \frac{1}{cos\alpha}$ et $y = \frac{1}{sin\alpha}$, on a $3 = x + y = \frac{1}{cos\ \alpha} + \frac{1}{sin\ \alpha}$, c'est à dire $sin\ \alpha + cos\ \alpha = 3sin\ \alpha\ cos\ \alpha$

$$\Rightarrow sin^2\ \alpha + 2sin\ \alpha\ cos\ \alpha + cos^2\ \alpha = 9sin^2\ \alpha\ cos^2\ \alpha$$
$$\Rightarrow 9sin^2 2\alpha - 4sin2\alpha - 4 = 0$$
$$\Rightarrow sin2\alpha = \frac{2}{9}(1 + \sqrt{10}) \text{ car } 0 < 2\alpha < \pi,$$

ce qui détermine deux valeurs de l'angle 2α dans l'intervalle $]0, \pi[$. En conclusion, $\alpha = \frac{1}{2}\ arcsin\ \frac{2 + 2\sqrt{10}}{9}$ ou $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\ arcsin\ \frac{2 + 2\sqrt{10}}{9}$ (c'est-à-dire à peu près $33°49'50"$ ou $56°\ 10'10"$)

Ont fourni une solution correcte : L. SCHOPEN (élève de 5ème à la St John's International School à Waterloo), M. BADALYAN, P. SCHRAM, R. WALRAVENS (BA1 maths), F. COLOMER, A. DUJARDIN, C. LABAR, A. LEFEBVRE (BA1 polytech), N. BAYEKULA, ATCHOUM, DORMEUR, GRINCHEUX, JOYEUX, PROF, SIMPLET, TIMIDE (BA2 maths), N. RADU (BA2 maths à l'ULg), G. TILLEMA (BA2 polytech), J. CORNET, F. MOTELET, H. SOTTIAUX (BA2 sciences industrielles à la Haute Ecole Robert Schuman à Arlon), P.A. JACQMIN (BA3 maths à l'UCL), S. MASSON (licencié en maths Univ. Mons-

Hainaut), C. LARIVIERE, Y. SUPRIN (profs de maths), C. VAN HOOSTE (assistant en polytech), W. DE DONDER, R. ENGLEBERT, F. DOIGNIE, N. GUMUCHDJIAN, G. VERHAEGEN (ingénieurs), S. PROKOFIEV (compositeur) et "Les Sept Nains".

Solution du Problemath 2. Il y a 27! façons de répartir les 27 petits cubes dans les 27 emplacements possibles, et 24 orientations possibles pour chaque petit cube dans son emplacement, donc en tout $27!24^{27}$ façons de reconstruire un grand cube $3 \times 3 \times 3$. Désignons par C_i tout petit cube ayant exactement i faces noires; il y a 1 cube $C_0, 6$ cubes C_1, 12 cubes C_2 et 8 cubes C_3. Pour que le grand cube ait toutes ses faces entièrement noires, il faut et il suffit que chaque petit cube prenne la place qui était occupée(avant le désassemblage) par un petit cube ayant exactement le même nombre de faces noires, tout en étant bien sûr orienté convenablement à cet emplacement. Il y a donc $8!3^8$ façons de bien placer les C_3, $12!2^{12}$ façons de bien placer les $C_2, 6!4^6$ façons de bien placer les C_1 et 24 façons de placer le C_0. En conclusion, la probabilité cherchée vaut $\dfrac{8!3^8.12!2^{12}.6!4^6.24}{27!24^{27}} = \dfrac{6!8!12!}{27!24^{18}}$
c'est-à-dire à peu près $1,8298.10^{-37}$.

Ont fourni une solution correcte : M. BADALYAN, P. SCHRAM, R. WALRAVENS (BA1 maths), A. DUJARDIN, C. LABAR, A. LEFEBVRE (BA1 polytech), N. BAYEKULA, ATCHOUM, DORMEUR, GRINCHEUX, JOYEUX, PROF, SIMPLET, TIMIDE (BA2 maths), N. RADU (BA2 maths à l'ULg), A. OUEDRAOGO, G. TILLEMA (BA2 polytech), P.A. JACQMIN (BA3 maths à l'UCL), S. MASSON (licencié en maths Univ. Mons-Hainaut), Y. SUPRIN (prof de maths), C. VAN HOOSTE (assistant en polytech), W. DE DONDER, F. DOIGNIE, N. GUMUCHDJIAN, G. VERHAEGEN (ingénieurs), P. MASAI (directeur informatique à Toyota Motor Europe), S. PROKOFIEV (compositeur), LONG JOHN SILVER, BLANCHE-NEIGE et les "Les Sept Nains".

Solution du Problemath 3. Le polynôme $Q(x) = (x+1)P(x) - x$ est de degré 2010 et a 2010 racines distinctes, à savoir $0, 1, 2, \ldots, 2009$. Il est donc de la forme $Q(x) = a\ \pi_{k=0}^{2009}(x-k)$ pour un certain $a \in \mathbb{R}_0$. D'autre part, $Q(-1) = 0.P(-1) + 1 = 1$,donc $1 = Q(-1) = a(-1)^{2010}(2009+1)! = a.2010!$. Il en résulte que $Q(2010) = a.2010! = 1$, d'où finalement $P(2010) = (Q(2010) + 2010)/2011 = (1 + 2010)/2011 = 1$
Ont fourni une solution correcte : L. SCHOPEN (élève de 5ème à la St John's International School à Waterloo) P. SCHRAM (BA1 maths), C. LABAR (BA1 polytech), ATCHOUM, DORMEUR, GRINCHEUX, JOYEUX, PROF, SIMPLET, TIMIDE (BA2 maths), N. RADU (BA2 maths à l'ULg), P.A. JACQMIN (BA3 maths à l'UCL), S. MASSON (licencié en maths Univ. Mons-Hainaut), C. LARIVIERE, Y. SUPRIN (profs de maths), C. VAN HOOSTE (assistant en polytech), W. DE DONDER, N. GUMUCHDJIAN, G. VERHAEGEN (ingénieurs), S. PROKOFIEV (compositeur) et "Les Sept Nains".

Comme dessert, voici le premier épisode d'un grand feuilleton culturel :
La théorie mathématique de la chasse au lion dans le désert

- La méthode géométrique: Le chasseur place une cage sphérique dans le désert, il y entre et ferme la cage. Puis il effectue une inversion par rapport à la cage. Le lion est alors à l'intérieur de la cage et le chasseur à l'extérieur.

- La méthode axiomatique : Ayant placé une cage dans le désert, le chasseur introduit le système d'axiomes suivant :
  Axiome 1 : L'ensemble des lions dans le désert est non vide
  Axiome 2 : S'il y a un lion dans le désert, il est dans la cage.
  On en déduit facilement (exercice laissé au lecteur) le Théorème : Il y a un lion dans la cage.

- La méthode algébrique : Le chasseur irrigue le désert et y plante du blé, de façon à en faire un champ (forcément fini). La capture d'un lion nul étant triviale, on peut supposer le lion $L \neq 0$. Il est facile de trouver 1, qui est juste à droite de 0 dans le sous-champ premier. Il suffit alors de décomposer 1 en LL^{-1}, puis de se débarrasser de L^{-1} pour avoir L.