

DESCARTES' LOGARITHMIC SPIRAL

Chantal Randour

Athénée Royal Gatti de Gamond

UREM-ULB

ch.randour@brutele.be

Abstract

For many people, mathematics just means calculations.

Mathematically well-educated people know about proofs.

Few realize that mathematics takes ideas and imagination.

It is not easy to convey this to secondary school pupils.

One year ago, I gave it a try with Descartes' logarithmic spiral.

It was discovered by the French philosopher in 1638 in a study of mechanics. Its properties of self-reproduction were pointed out by Jacques Bernoulli (1654-1705) who required that the curve be engraved upon his tomb with the phrase "Eadem mutata resurgo" (I shall arise the same, though changed).

My 16-18 old pupils did a lot of work on the subject and organized an exhibition held at the Athénée Royal Gatti de Gamond (a secondary state school in Brussels).

My talk will be about Descartes' ideas and about my students' venture.

Some documents related to the talk.

1/ Descartes' spiral

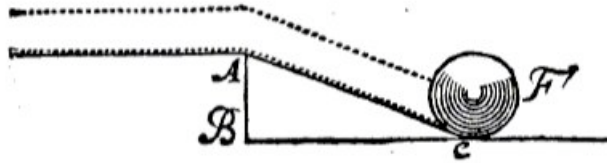
The first line of the curve appears in

"La Mécanique de Descartes".



LE PLAN INCLINÉ.

Si n'ayant qu'assez de force pour leuer 100 liures, on veut



neantmoins
leuer le cors
F, qui en pe-
se 200, à la
hauteur de
la ligne BA,
il ne faut
h

10

TRAITE' DE LA

que le tirer ou rouler le long du plan incliné CA, que je suppose deux fois aussi long que la ligne AB; Car par ce moyen, pour le faire paruenir au point A, on y employera la force qu'il faut pour faire monter 100 liures deux fois aussi haut: Et d'autant qu'on aura fait ce plan CA plus incliné, d'autant aura t'on besoin de moins de force pour leuer le poids F par son moyen.

Mais il y a encore à rabatre de ce calcul, la difficulté qu'il y auroit à mouuoir le cors F le long du plan AC, si ce plan estoit couché sur la ligne BC, dont je suppose toutes les parties également distantes du centre de la terre. Il est vray que cet empeschement estant d'autant moindre que le plan est plus dur, plus égal, & plus poli, il ne peut derechef estre estimé qu'à peu près, & n'est pas fort considérable.

On n'a pas besoin non plus de considerer, que la ligne BC estant vne partie de cercle, qui à mesme centre que la Terre, le plan AC doit estre tant soit peu vouté, & auoir la figure d'une partie de spirale d'écrite entre deux cercles, qui ayent aussi pour centre celuy de la terre; car cela n'est nullement sensible.

Following an explanation asked by Mersenne (1588-1648), Descartes gives some properties of the curve in letters addressed to the parisian father, member of the Minimes' order.

LETTRE DE M. DESCARTES

AU R. P. MERSENNE,

DU 13 SEPTEMBRE 1638,

POUR DÉMONSTRATION AU PRINCIPE SUPPOSÉ CI-DESSUS *.

(Lettre 74 du tome I.)

MON RÉVÉREND PÈRE,

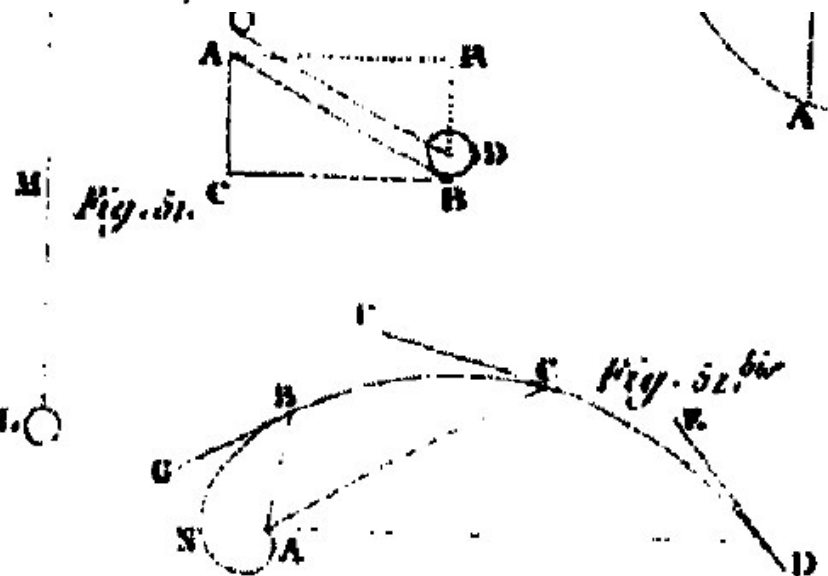
Vous me mandez aussi que je devois plus particulièrement expliquer la nature de la spirale qui représente le plan également incliné, et la façon dont se plie une corde lorsqu'ayant été toute droite et parallèle à l'horizon, elle descend librement vers le centre de la terre, et la grandeur de la petite sphère en laquelle se trouve le centre de gravité d'une autre plus grande sphère. Mais pour cette spirale elle a plusieurs propriétés qui la rendent assez reconnoissable : car si A est le centre de la terre, et que ANBCD soit la spirale, ayant tiré les lignes droites AB, AC, AD, et semblables, il y a même proportion entre la courbe ANB et la droite AB qu'entre la courbe ANBC et la droite AC ou ANBCD et AD, et ainsi des autres. Et si on tire les

• Figure 51 bis.

LETTRES.

557

tangentes DE, CF, GB, etc., les angles ADE, ACF, ABC, etc., seront égaux. Pour la façon dont se



454

LETTRES.

AU R. P. MERSENNE.

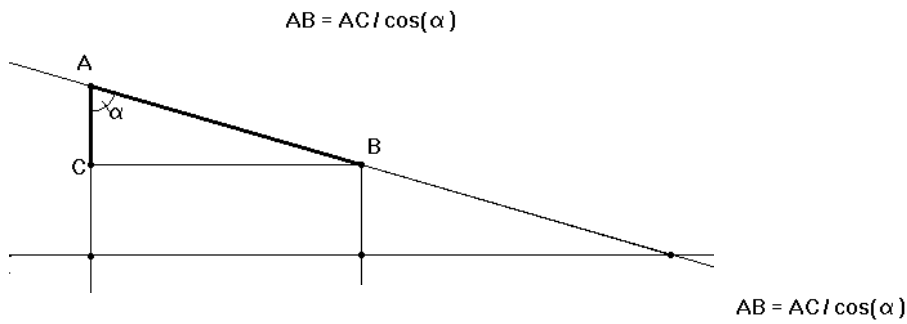
(Lettre 91 du tome II.)

LETTRES.

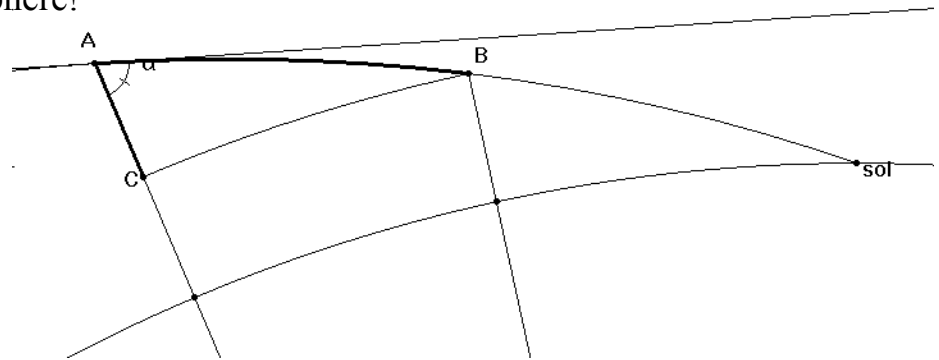
445

n'est lorsque ses deux bouts s'entre-touchent ; et il est certain que la spirale qui représente un plan également incliné doit parvenir jusques au centre de la terre. J'ai ri de ce que vous a écrit M. N. tou-

2/ The idea of Descartes illustrated with Cabri-Géomètre™.



But earth is a sphere!



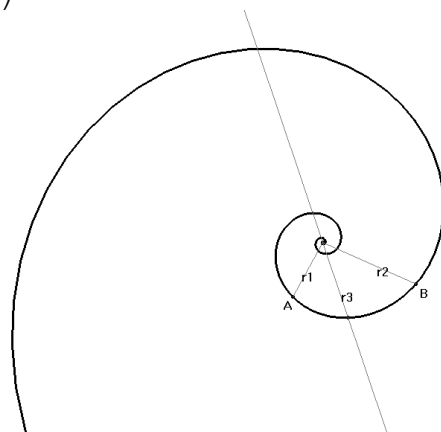
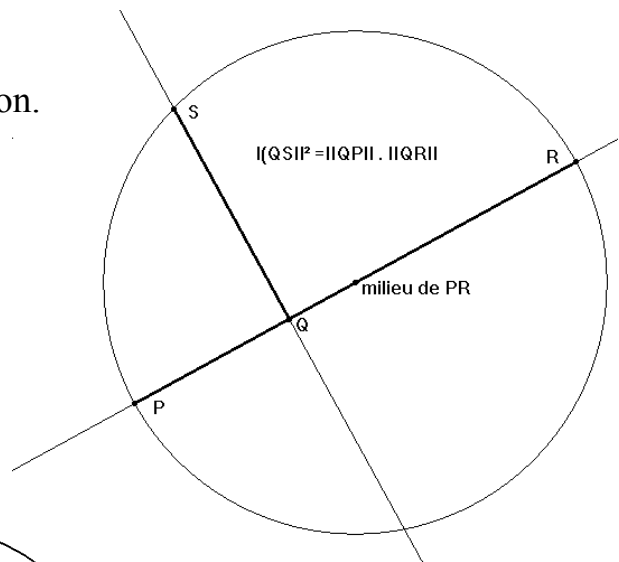
3/ A geometric construction of Descartes' spiral.

Geometric mean construction.

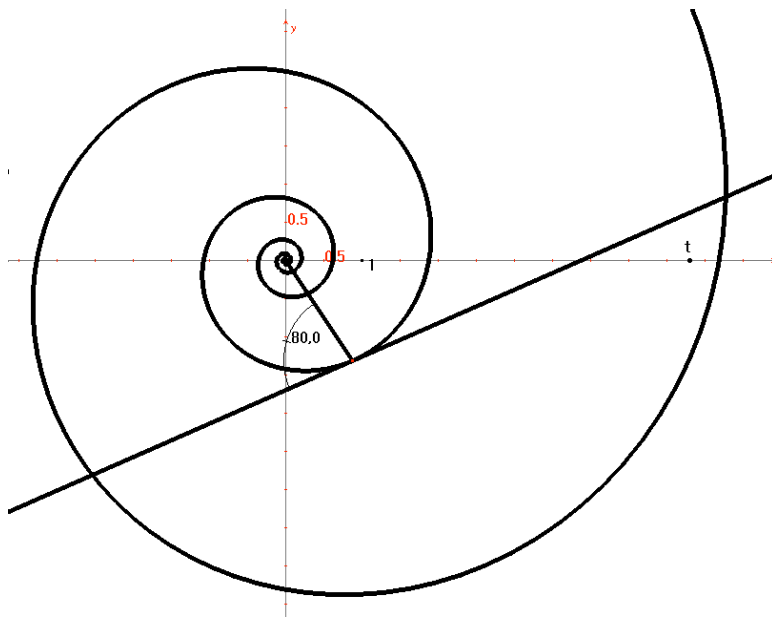
if $r_1 = e^{mt_1}$ and $r_2 = e^{mt_2}$

then point on bisectrix is $r_3 = e^{m \frac{t_1+t_2}{2}}$

and $(r_3)^2 = \left(e^{m \frac{t_1+t_2}{2}} \right)^2 = r_1 \cdot r_2$



4/ An other construction of the logarithmic spiral



$$r(t) = ae^{mt}$$

$$\text{tg}(\nu) = \frac{1}{m}$$

the angle between curve and direction vector is a constant.

5/ The horses problem.

Four horses A, B, C, D are in this order on the vertices of a square.

They all race at the same constant speed.

A loves B, B loves C, C loves D and D loves A!

A every moment, each one goes to her favorite.

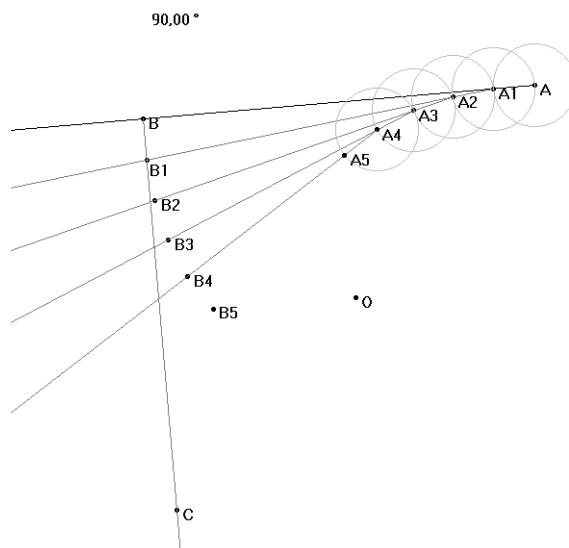
Draw the pathes of the horses.

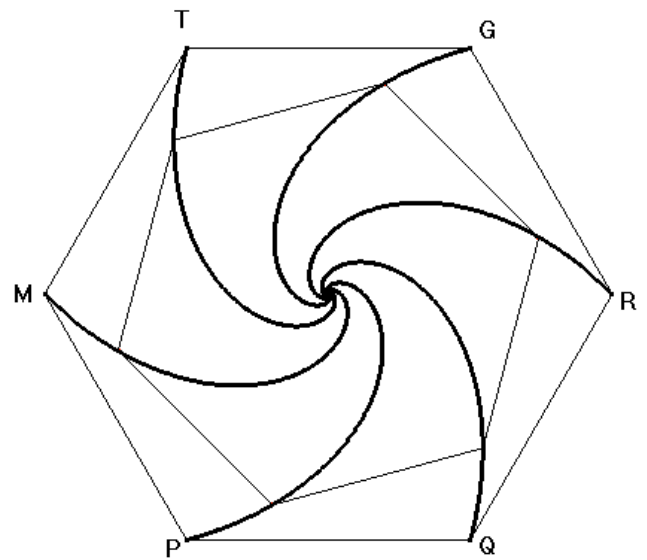
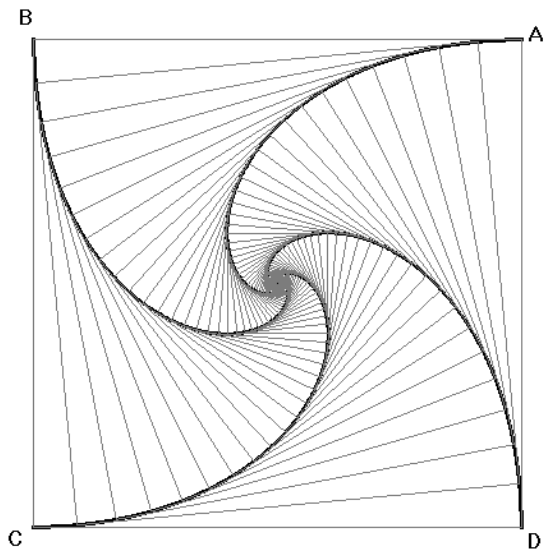
Some remarks:

Because the symmetry of the problem, the 4 horses are at every moment on the vertices of a square. The tangent between the curve followed by a horse makes an angle of 45° with the matching direction vector.

Any curve such as at one of her point the direction vector and the tangent forms a constant angle is a logarithmic spiral.

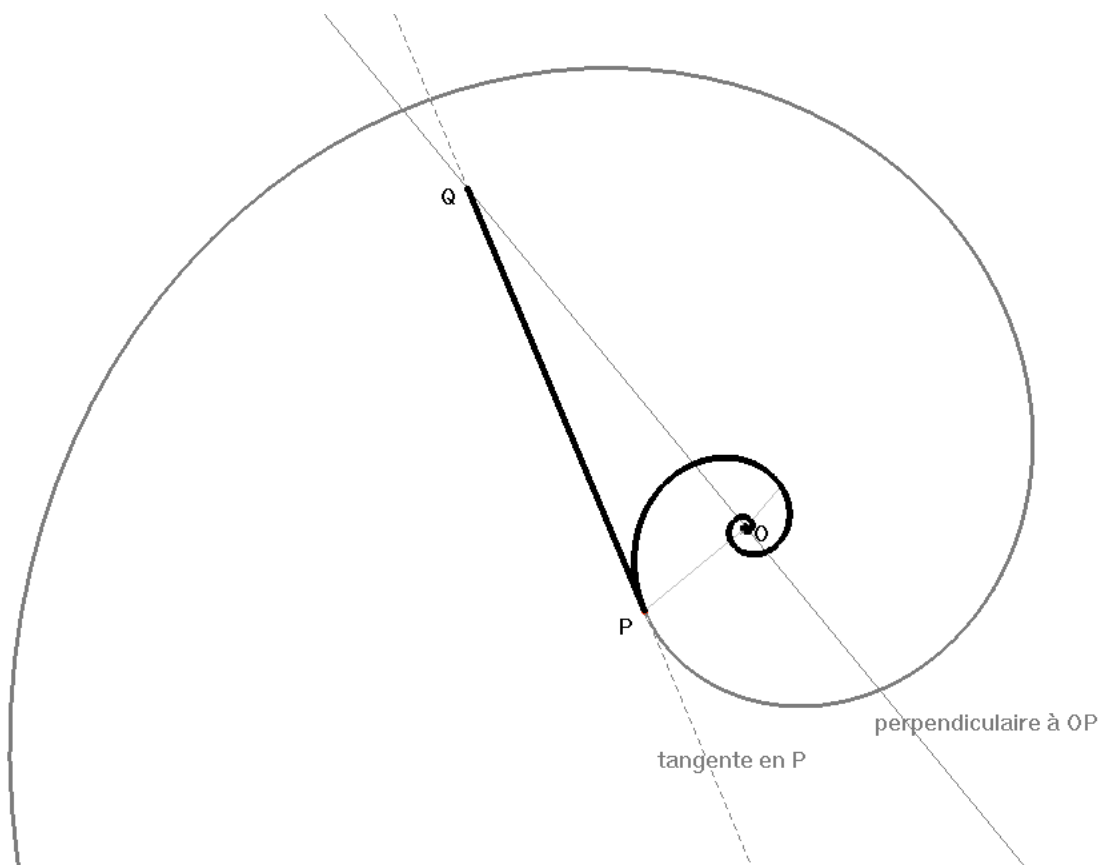
Approximation of the path of A and B. A better approximation is given reducing the segment.





Trajectories of the horses in case of 4 or 6.

6/ Torricelli (1608-1647) rectifies the curve



7/ Newton (1642-1727) about the logarithmic spiral

Extracts from

Mathematical Principles of Natural Philosophy by Sir Isaac Newton

translated by Andrew Mott

Revised by Florian Cajori

(Great Books of the Western World - Encyclopaedia Britannica, Chicago 1989).

[BOOK I SECTION II] PROPOSITION 9. PROBLEM 4

If a body revolves in a spiral PQS, cutting all the radii SP, SQ, &c., in a given angle; it is proposed to find the law of the centripetal force tending to the centre of the spiral.... therefore the centripetal force is inversely as the cube of the distance SP. Q.E.I.

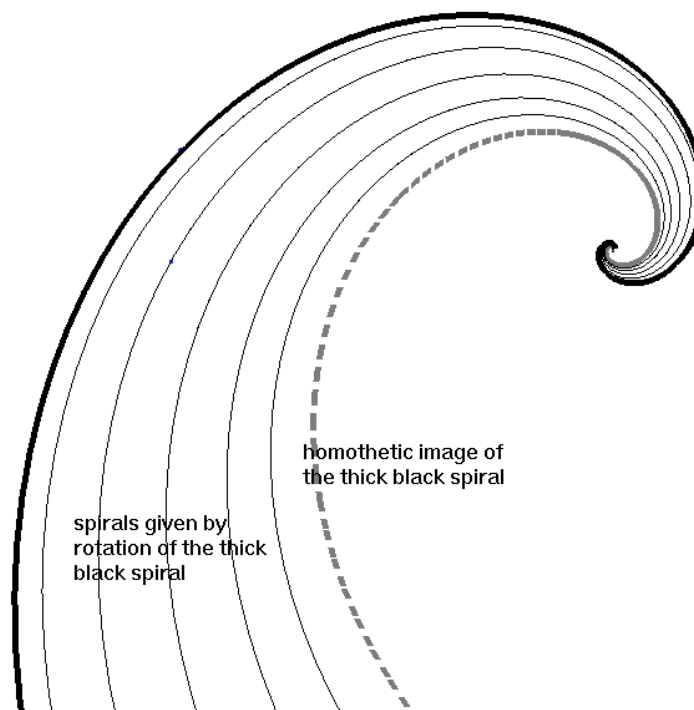
[BOOK II SECTION IV] PROPOSITION 15. THEOREM 12

If the density of a medium in each place thereof be inversely as the distance of the places to an immovable centre, and the centripetal force be as the square of the density: I say, that a body may revolve in a spiral which cuts all the radii drawn from that centre in a given angle.

[BOOK II SECTION IV] PROPOSITION 16. THEOREM 13

If the density of the medium in each of the places be inversely as the distance of the places from the immovable centre, and the centripetal force be inversely as any power of the same distance: I say, that the body may revolve in a spiral intersecting all the radii drawn from that centre in a given angle.

8/ Jacques Bernoulli (1654-1705) and Spira Mirabilis



9/ References:

- DESCARTES René, Traité de la Mécanique, publié par Charles Angot (Paris, 1668), disponible sur le serveur de la Bibliothèque Nationale de France.
- DESCARTES René, Lettre (à Mersenne) 74 du tome I (12 septembre 1638) disponible sur le serveur de la Bibliothèque Nationale de France sous la référence N0094264.
- MONTUCLA J.F., Histoire de mathématiques, tome second, 1799-1802, reproduction photographique publiée par Blanchard (Paris, 1960).
- NEWTON Sir Isaac, Mathematical Principles of Natural Philosophy translated by Andrew Motte, revised by Florian Cajori, Great Books of the Western World - Encyclopaedia Britannica, Chicago 1989.
- STOLL Andre, Les spirales (deuxième partie) texte disponible sur le site web irem.u-strasbg.fr/irem/ouvert/Ouvert97/Les%20spirales.pdf

10/ Interesting websites about spirals :

- www.mathematische-basteleien.de/spiral.htm -
- www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Descartes.html
- <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Equiangular.html>
- <http://www.mathcurve.com/courbes2d/courbes2d.shtml>
- <http://www.spirallessolaris.ca/rcarchibald.html>

