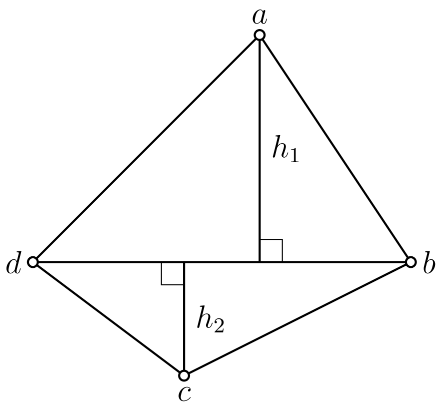
Le problemath $n°1$

Voici le tout premier problemath, proposé aux étudiants et à tous les membres du Département de Mathématique de l'ULB, en 1976.

Enoncé : Dans un quadrilatère convexe plan, d'aire $32\,\mathrm{cm}^2$, la somme des longueurs d'une diagonale et de deux côtés opposés est de $16\,\mathrm{cm}$.
Déterminer toutes les valeurs possibles de la longueur de l'autre diagonale.

Ce premier problème parut relativement coriace à l'époque et quatre semaine après, seuls quatre étudiants en étaient venus à bout. Une des solutions proposées est présentée ci-dessous.

Solution :



Données :

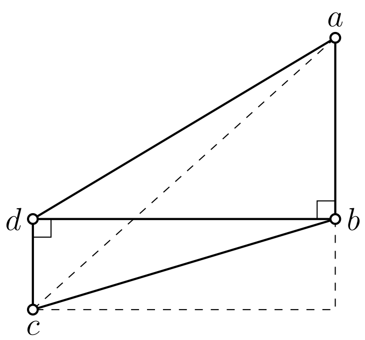
$$\begin{cases} ab + bd + dc & = & 16 & (1) \\ \dfrac{bd \cdot h_1}{2} + \dfrac{bd \cdot h_2}{2} & = & 32 & (2) \end{cases}$$

Comme $h_1 \leq ab$ et $h_2 \leq cd$, on tire

$$bd\,(h_1 + h_2) = 64 \leq bd\,(ab + cd) = bd\,(16 - bd)$$

Donc, $bd^2 - 16\,bd + 64 \leq 0$ ou $(bd - 8)^2 \leq 0$.

De ce fait, $bd = 8$, et (1) donne $ab+cd+8$, (2) donne $h_1+h_2 = 8$, de sorte que $h_1 = ab$, $h_2 = cd$ et le quadrilatère a l'allure ci-dessous.



Dès lors, $ac^2 = bd^2 + (ab + cd)^2 = 64 + 64$ et $ac = 8\sqrt{2}$, ce qui est le résultat cherché.

Cette solution était assortie du commentaire suivant.

Si on raisonne en songeant que l'ensemble des quadrilatères dépend de 5 paramètres (pour le groupe des isométries) et qu'il y a deux contraintes, on s'attend à ce que "beaucoup" de quadrilatères répondent à la question et que les valeurs prises par la diagonale cherchée recouvrent un intervalle. Il y a bien une infinité de quadrilatères répondant aux données mais il y en a moins que prévu et leur diagonale est unique.
Une autre question se pose alors. Comment ce problème a-t-il été composé ? On peut tenter une explication sur la base de l'approche adoptée par G.Gondon [1]. On retient

1. Le premier étudiant à avoir fourni une solution

uniquement la contrainte (1) et on étudie la variation de l'aire des quadrilatères obtenus. En cherchant le maximum de celle-ci on est conduit à la valeur 32.

En effet, en posant $ab = r$ et $cd = s$ $(r + s < 16)$, on a $db = 16 - (r + s)$. Pour un choix de r et de s, l'aire $\mathcal{A}$ du quadrilatère sera maximum si $r = h_1$ et $s = h_2$. Cette aire est alors $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\,(16 - (r + s))\,(r + s)$. Comme la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}\,(16 - x)\,x$ a son maximum en $x = 8$, on en déduit que l'aire maximum est atteinte pour $r + s = 8$ et que cette aire vaut $f(8) = \frac{1}{2}(16 - 8)\,8 = 32$.