ULB

PROBLEMATHS
21 mars 2011

Voici les solutions des 4 derniers Problemaths, ainsi que le Palmarès final de cette année.

Solution du Problemath 10 La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (2010/2012)^x + (2011/2012)^x$ est somme de deux fonctions exponentielles de bases <1. Etant donné que f est continue, que $f(0) = 2$ et que $f(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$, on en déduit (par le théorème de la valeur intermédiaire) que l'équation $f(x) = 1$ a au moins une racine. Comme f est strictement décroissante (car somme de deux fonctions strictement décroissantes), cette racine est unique (et comprise entre 967 et 968, pour les fans d'analyse numérique!)

Ont fourni une solution correcte : M. BADALYAN, P. SCHRAM, R. WALRAVENS (BA1 maths), A. DUJARDIN (BA1 polytech), N. BAYEKULA, ATCHOUM, DORMEUR, GRINCHEUX, JOYEUX, PROF, SIMPLET (BA2 maths), N. RADU (BA2 maths à l'ULg), P.A. JACQMIN (BA3 maths à l'UCL), C. LARIVIERE, Y. SUPRIN, H.VERMEIREN (profs de maths), H. HUBRECHTS (KUL), W. DE DONDER, F. DOIGNIE (ingénieurs), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe), FAN TOMATE, BLANCHE-NEIGE et "Les Sept Nains".

Solution du Problemath 11 Dans ce qui suit, tous les ϵ valent 0 ou 1. On a $f(1) = 0$ (car $0 = f(2) = f(1+1) = 2f(1) + \epsilon$) et $f(3) = 1$ (car $0 < f(3) = f(2) + f(1) + \varepsilon = \varepsilon$). De plus , $3333 = f(9999) = f(9996{+}3) = f(9996){+}1{+}\varepsilon_1 = f(9993{+}3){+}1{+}\varepsilon_1 = f(9993){+}2{+}\varepsilon_1{+}\varepsilon_2 = ... = f(3){+}3332{+}\varepsilon_1{+}\varepsilon_2{+}\cdots{+}\varepsilon_{3332} = 3333 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{3332}$.
On en déduit que $f(3k) = k$ pour tout $k = 1, \ldots, 3333$. En particulier, $2011{=}f(3.2011) \geq f(2.2011) + f(2011) \geq 3f(2011)$, d'où on tire $f(2011) \leq 2011/3 < 671$. D'autre part, $f(2011) \geq f(2010) + f(1) = f(3.670) + 0 = 670$. Il en résulte que $f(2011) = 670$.
En fait, on peut prouver que $f(n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ pour tout $n \leq 3333$, mais f n'est pas univoquement déterminée au-delà (quoique, bien entendu, la fonction définie par $f(n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ vérifie toutes les conditions de l'énoncé).

Ont fourni une solution correcte: M. BADALYAN (BA1 maths), A. DUJARDIN (BA1 polytech), N. BAYEKULA, DORMEUR, GRINCHEUX, JOYEUX, PROF, SIMPLET (BA2 maths), N. RADU (BA2 maths à l'ULg), P.A. JACQMIN (BA3 maths à l'UCL), Y. SUPRIN, H.VERMEIREN (profs de maths), H. HUBRECHTS (KUL), W. DE DONDER, F. DOIGNIE, K. MADRANE (ingénieurs) et "Les Sept Nains".

Solution du Problemath 12 On cherche la valeur de $n \in \{1, 2, \ldots, 51\}$ qui maximise la probabilité $p(n)$ de trouver le premier as noir en $n-$ème position dans le paquet de 52 cartes. Or $p(n)$ est égal à la probabilité que la $n-$ème carte soit un des 2 as noirs (c'est-à-dire$\frac{2}{52} = \frac{1}{26}$), multipliée par la probabilité que l'autre as noir (qui a encore a priori 51 positions possibles) soit une des $52 - n$ cartes suivant le premier as noir. Par conséquent, $p(n) = \frac{52-n}{26.51}$ et cette probabilité est clairement maximale pour $n = 1$. Il faut donc parier sur la première carte du paquet (et non sur la 18ème, comme l'ont cru ceux qui ont utilisé erronément une espérance mathématique).

Ont fourni une solution correcte: K. SWAMINATHAN, L. SCHOPEN (resp. en 4ème et en 5ème à la St John's International School à Waterloo), R. WALRAVENS (BA1 maths), A. DUJARDIN (BA1 polytech), N. BAYEKULA, ATCHOUM, DORMEUR, GRINCHEUX, JOYEUX, PROF, SIMPLET (BA2 maths), N. RADU (BA2 maths à l'ULg), P.A. JACQMIN (BA3 maths à l'UCL), Y. SUPRIN (prof de maths), H. HUBRECHTS (KUL), W. DE DONDER, F. DOIGNIE (ingénieurs), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe) et "Les Sept Nains".

Solution du Problemath 13 Soit D un disque fermé de rayon r et de centre 0 dans le plan $\mathbb{R}^2$. Supposons que D soit la réunion de deux sous-ensembles isométriques disjoints A et B. On peut supposer sans restreindre la généralité que $0 \in A$. Si α est une isométrie de $\mathbb{R}^2$ appliquant A sur B, alors $\alpha(0) \in B$ et donc $0 \neq \alpha(0)$. Désignons par p et q les extrémités du diamètre de D perpendiculaire à la droite passant par 0 et $\alpha(0)$. Comme $|0, a| \leq r$ pour tout $a \in A$, on a $|\alpha(0), b| \leq r$ pour tout $b \in B$. Comme d'autre part $|\alpha(0), p| = |\alpha(0), q| > r$, on en déduit que $p \in A$ et $q \in A$. Les points $\alpha(p)$ et $\alpha(q)$ sont les extrémités d'un diamètre de D car $|\alpha(p), \alpha(q)| = |p, q| = 2r$. Etant donné que $|\alpha(0), \alpha(p)| = |0, p| = r$ et

$|\alpha(0), \alpha(q)| = |0, q| = r$, le point $\alpha(0)$ est le milieu du diamètre $[\alpha(p), \alpha(q)]$ et de ce fait $\alpha(0) = 0$, une contradiction. Il n'existe donc pas de partition de D ayant les propriétés de l'énoncé.
Certains ont basé leur solution sur le fait que α conserve nécessairement le disque D; ce n'est pas du tout évident et il aurait fallu le démontrer! Notons aussi que le disque D dépourvu de son centre peut être partitionné facilement en deux sous-ensembles isométriques.

Ont fourni une solution correcte: P. SCHRAM (BA1 maths), GRINCHEUX, PROF, SIMPLET (BA2 maths), N. RADU (BA2 maths à l'ULg), P.A. JACQMIN (BA3 maths à l'UCL) et H. HUBRECHTS (KUL).

"Il y a une imagination étonnante dans les mathématiques. Il y avait beaucoup plus d'imagination dans la tête d'Archimède que dans celle d'Homère" (Voltaire, Dictionnaire philosophique, page 612, article " Imagination").

Pour terminer en beauté, voici le palmarès des Problemaths 2010-2011:

- Ont résolu 13 Problemaths : N. RADU (BA2 maths à l'ULg) et P. A. JACQMIN (BA3 maths à l'UCL), qui se voient attribuer le titre convoité d'Hyperproblematheur intégral non borné au sens de Schpotzermann et Wienerschnitzel.
- Ont résolu 12 Problemaths : C. DE GROOTE (alias PROF) et F. THILMANY (alias GRINCHEUX) (BA2 maths), H.P. BUI (alias DORMEUR) (BA3 maths).
- A résolu 11 Problemaths : M. DUERINCKX (alias SIMPLET) (BA2 maths)
- Ont résolu 10 Problemaths : W. DE DONDER (ingénieur), Y. SUPRIN (prof de maths)et "Les Sept Nains".
- Ont résolu 9 Problemaths: P. SCHRAM (BA1 maths), A. DUJARDIN (BA1 polytech) et C. ANTONY (alias JOYEUX) (BA2 maths).
- Ont résolu 8 Problemaths : L. MOORTGAT (alias ATCHOUM) (BA2 math), F. DOIGNIE (ingénieur) et C. DUMEUNIER (alias PROKOFIEV)(chercheur au Dépt d'Informatique).
- Ont résolu 7 Problemaths : R. WALRAVENS (BA1 maths), N. GUMUCHDJIAN et G. VERHAEGEN (ingénieurs).
- Ont résolu 6 Problemaths : L. SCHOPEN(élève de 5ème à la St John's International School à Waterloo), M. BADALYAN (BA1 maths), C. LARIVIERE (prof de maths), C. VAN HOOSTE (assistant en polytech).
- Ont résolu 5 Problemaths : N. BAYEKULA (BA2 maths), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe) et BLANCHE-NEIGE.
- Ont résolu 4 Problemaths : C. LABAR (BA1 polytech), H. DELANNOY (alias TIMIDE)(BA2 physique), H. HUBRECHTS (KUL) et H. VERMEIREN.
- Ont résolu 3 Problemaths : K. SWAMINATHAN (élève de 4ème à la St John's International School à Waterloo), T. DEFOIN (BA1 polytech), S. MASSON (licencié en maths Univ. de Mons-Hainaut), M. LE BLANC (alias Sophie GERMAIN).
- Ont résolu 2 Problemaths : A. LEFEBVRE (BA1 polytech), G. TILLEMA et A. OUEDRAOGO (BA2 polytech), R. ENGLEBERT (ingénieur).
- Ont résolu 1 Problemath : F. COLOMER (BA1 polytech), J. CORNET, F. MOTELET et H. SOTTIAUX (BA2 en sciences industrielles à la Haute Ecole Robert Schumann à Arlon), O. DECKERS (prof de maths), R. DENDIEVEL (assistant au Dépt de maths), B. DETERME et K. MADRANE (ingénieurs), A. WAJNBERG (journaliste scientifique), LONG JOHN SILVER, FAN TOMATE et "Le tueur de nains".

Tous ces problematheurs et problematheuses sont cordialement invités à un drink, suivi de la remise solennelle des diplômes et des prix, qui aura lieu le vendredi 1 avril à 12h30 dans le local 2.08.109 (8ème étage du Bâtiment NO, Campus Plaine,Boulevard du Triomphe)